

# 高波の頻度解析に用いられるワイブル分布の形状母数

Shape Parameter of Weibull Distribution Employed in Extreme Wave Height Statistics

北野利一<sup>1</sup>

Toshikazu KITANO

The Weibull distribution of three parameters has been frequently employed in the extreme wave height analysis. The value of shape parameter is pre-required in estimating the location and scale parameters by the least-square fit. Goda (1988) recommends the four values of shape parameter in point of view of the statistical properties of Weibull distribution. This study shows that the values selected by Goda and an additional new value interpret the dynamical properties of wind-waves, and it demonstrates the estimation method based on the extreme value theory for a practical data of wave heights.

## 1. ま え が き

高波の長期頻度解析における母分布の候補として、極値分布に加えて、ワイブル分布も用いられることが多い。位置および尺度母数の推定に最小自乗法を用いる場合には、形状母数  $k$  の値を先見的に与える必要がある。合田 (1988) によれば、Petruaskas・Aagaard (1970) が提案した 7 種類を 4 種類に絞り込んで、 $k=0.75, 1, 1.4, 2$  を用いることを推奨している。その背景に、高波標本の現実的なサイズを対象にすれば、分布相互の差異を識別することが困難であるため、それ以上に細かく分類しないとしている。また、 $k=1, 2$  を含むように、 $\sqrt{2}$  を等比とする等比級数に近い数列を  $k$  の推奨値に選んでいると考える。したがって、合田 (1988) が推奨する 4 種類の  $k$  の値は、確率分布特性に由来するものであり、高波の力学特性によるものではない。本研究では、これらワイブル分布の母数  $k$  の値が、海岸工学として重要な意味を持つ力学特性を示すことを明らかにする。

## 2. ワイブル分布

高波の頻度解析に用いられるワイブル分布は、

$$P(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x-B}{A}\right)^k\right\}, B \leq x < \infty \dots (1)$$

と表される。ここで、 $A$  および  $B$  は、位置母数および尺度母数であり、 $k(>0)$  は形状母数である。Petruaskas・Aagaard (1970) が、高波の波高分布の候補の 1 つとして導入した時には、形状母数の値を

$$k = 0.75, 0.85, 1.0, 1.1, 1.25, 1.5, 2.0 \dots (2)$$

の 7 種類に分類した。形状母数を離散的に選ぶわけは、プロットイング・ポジションによる基準化変量に対して、標本を最小自乗法であてはめる推定法による。なお、

置母数  $B$  を含む 3 母数のワイブル分布に対して、 $k \leq 2$  の場合、すなわち、式 (2) に示される全ての場合、最尤法による母数推定は意味をなさないことが示されている (Smith, 1985)。

高波資料は、一般に、閾値をこえる波高を収録した資料 (極大波高資料) を用いることが多い。その際、閾値となる波高を、後述するような極値理論に基づいて決めるのではなく、波浪資料をとりまとめる担当者の都合で定める場合には、当然ながら、閾値をこえる波高が、極値分布 (あるいは、極値分布の一部) に従うことは稀かつ偶然である。そのため、式 (1) に示すワイブル分布を経験的に利用してきたものとする。また、ワイブル分布は、確率の主要部となる範囲で、確率密度関数の形状が柔軟に変化する性質があることがわかる。ワイブル分布は、その形状母数が  $k=1$  の場合、指数分布になる。対数正規分布は、 $k=2$  のワイブル分布と特性が類似していると、合田 (1988) は指摘した上で、対数正規分布の役割は  $k=2$  のワイブル分布で代替可能であると、結論づけている。このように極大波高資料に柔軟なワイブル分布に対して、前述の理由から、合田 (1988) は、その形状母数の値を以下の 4 種類に絞り込んでいる。

$$k = 0.75, 1.0, 1.4, 2.0 \dots (3)$$

山口ら (1997) は、日本沿岸の気象・海象要素の極値資料を統計解析した際に、本来的に  $k > 2.0$  および  $k < 0.75$  の母分布に従うべき資料がある可能性を指摘し、Yamaguchi・Hatada (1998) は、式 (3) に示した  $k$  の値に加え、

$$k = 0.5, 2.5, 3.0 \dots (4)$$

の 3 種の値も含めて解析することを推奨している。

以上のように、少なくとも高波の波高について、極値分布に従わない資料に対しては、伝統的にワイブル分布を母分布として用いられてきた経緯がある。

極大波高資料の母分布  $G$  に対して、その出現過程が

単純ポアソン過程であれば、年最大波高の母分布  $F$  と結び付けることができる。極大波高の年平均発生数  $\lambda$  を用いて、一般的に、以下のような関係がある。

$$F(x) = e^{-\lambda(1-G(x))} \dots\dots\dots (5)$$

### 3. 極値分布

高波の波高分布がいかなるものであっても、高波を抽出する期間の幅を大きく設定すれば、その期間に生起する高波の最大波高の分布は、漸近的に、次式に示す一般化極値分布に従う。

$$P(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right\}, & \xi \neq 0 \\ \exp\left\{-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}, & \xi = 0 \end{cases} \dots\dots (6)$$

ここで、 $\mu$ ,  $\sigma$  および  $\xi$  は、順に、位置、尺度および形状母数である。また、ガンベル分布、フレシェ分布およびワイブル分布の3種類の分布に、一般化極値分布を分類する場合もある（それぞれの分布は、一般化極値分布の形状母数がゼロ、正値および負値に対応する）。ここで注意を要するのは、 $\xi < 0$  のワイブル分布は、式(1)のワイブル分布ではないことである。式(6)に示す極値分布は、最大値を対象としたものである。それに対し、式(1)のワイブル分布を極値分布として扱う場合は、最小値を対象にする。しかし、高波の波高という最大値を対象とするので、式(1)に示すワイブル分布は極値分布ではない。このような混乱を避けるために、 $\xi < 0$  の極値分布を逆ワイブル分布とよぶこともある。

極大波高資料に対して、その母分布がいかなるものであっても、高波を抽出する閾値を高く設定すれば、その期間に生起する高波の極大波高の分布は、漸近的に、次式に示す一般化パレート分布に従う。

$$P(x|x > u) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi\frac{x-u}{\sigma_u}\right)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x-u}{\sigma_u}\right), & \xi = 0 \end{cases} \dots\dots (7)$$

ここで、 $u$  は閾値であり、尺度母数  $\sigma_u$  は閾値  $u$  に依存する。一方、形状母数  $\xi$  は閾値に依存せず、その極大波高資料から抽出した期間最大波高の母分布、すなわち、式(6)に示す極値分布の形状母数  $\xi$  に一致する。また、 $\xi = 0$  の一般化パレート分布は、指数分布であり、すなわち、 $k=1$  のワイブル分布であることに注目する。

### 4. ワイブル分布の漸近収束

極大波高資料がワイブル分布に従う期間最大波高は、漸近的にガンベル分布に従う。同様に、ワイブル分布に従う極大波高は、漸近的に一般化パレート分布に従う。

特に、 $k=1$  の場合は明白である。後者については、漸近ではなく、そのものに一致している。また、前者については、次の近似が成立することから確認できる。

$$(1 - e^{-x})^m \rightarrow e^{-e^{-x \log m}}, m \rightarrow \infty \dots\dots\dots (8)$$

なお、上式の収束は速く、比較的小さな  $m$  であっても、その近似が成立する。しかし、 $k \neq 1$  の場合 ( $k$  が 1 より遠ざかるにつれて)、ガンベル分布への収束は非常に緩慢となり、現実的な観測期間で観測される高波をガンベル分布あるいは指数分布（すなわち、 $\xi=0$  の一般化パレート分布）で適合させるのは無理がある。むしろ、そのような高波資料に対して、一般化極値分布で無理矢理に適合させると、 $k < 1$  あるいは  $k > 1$  の場合に応じて、フレシェ分布あるいは逆ワイブル分布として過った推定をすることになる。

Takahashi(1979)は、漸近収束を示す際に用いる退化関数の基準化係数を示すことにより、ワイブル分布の収束性の緩慢さを明らかにしている。本研究では、北野(2004)で導入された裾厚度

$$\xi_R = \log_b \frac{x_Q - x_R}{x_R - x_S} \dots\dots\dots (9)$$

の値を見ることにより、ワイブル分布がガンベル分布に収束する際の緩慢さについて示そう。式(9)において、極大波高資料の母分布に対して、再現期間  $R=10$  [year] および  $Q=50$  [year] とする確率波高  $x_R$  および  $x_Q$  に対し、対数の底  $b=5$  および再現期間  $S=2$  [year] とする確率波高  $x_S$  を用いて、クォンタイル曲線が類似する一般化極値分布の形状母数の値  $\xi$  となるように裾厚度  $\xi_R$  は考案されている。その際に、北野(2004)では言及していないが、少し注意すべき点がある。再現期間とは、確率波高を閾値として、平均的に1回こえる期間を示すものであるが、年最大波高が閾値をこえるのか、あるいは、極大波高が閾値をこえるのか、という取扱いの微妙な違いがある（その違いは、再現期間  $R$  や年平均発生数  $\lambda$  が小さい場合に現れる）。北野(2004)では、“極大波高が閾値をこえる”という取扱いをしている。

本研究では、“年最大波高が閾値をこえる”とした取扱いをして、式(5)を用いて式(9)の裾厚度パラメータ  $\xi_R$  を算出する。ここでは、 $\lambda$  を変化させることにより、固定された期間（＝1年）における最大波高が従う分布がガンベル分布（ $\xi=0$ ）に漸近する様子を相対的に検討する。表-1に示すとおり、年平均発生数  $\lambda$  が多くなれば、裾厚度  $\xi_{10}$  はゼロに収束するものの、その収束性は非常に緩慢であることがわかる。

### 5. 極値のベキ乗量

高橋(2006)によれば、ある条件のもとで、極値  $X$  と

表-1 ワイブル分布の裾厚度  $\xi_{10}$  の値

| $k(\text{Weibull})$ | 0.75 | 1.0  | 1.4   | 2.0   |
|---------------------|------|------|-------|-------|
| $\lambda = 1$       | 0.21 | 0.07 | -0.05 | -0.15 |
| 2                   | 0.15 | 0.03 | -0.06 | -0.14 |
| 4                   | 0.11 | 0.02 | -0.06 | -0.12 |
| 8                   | 0.09 | 0.01 | -0.06 | -0.11 |
| 16                  | 0.07 | 0.00 | -0.05 | -0.10 |
| 32                  | 0.06 | 0.00 | -0.05 | -0.09 |

極値のベキ乗量  $X^p$  の従う一般化極値分布の形状母数が一致する。すなわち、正の確率変数  $X$  が従う分布関数の漸近分布を式(6)とする時、その形状母数が  $\xi \leq 0$  であれば、正のベキ数  $p$  による  $X^p$  が従う漸近分布は、形状母数  $\xi$  の極値分布となる。なお、 $\xi > 0$  の場合には、 $X^p$  が従う漸近分布は、形状母数  $p\xi$  の極値分布となり、形状母数の値が一致しない。なお、 $\xi = 0$  の場合は、de Haan(1970)に示されている。

ワイブル分布の場合は、漸近分布がガンベル分布( $\xi = 0$ )であるので、そのベキ乗量は常にガンベル分布に従う。問題は収束性である。

閾値をこえる極大波高の標本分布が、一般化パレート分布に漸近することを示すためには、1) 超過平均および超過メディアンについて、それらの閾値による変化をみると、2) 閾値を変えて順次、抽出される極大波高の標本から一般化パレート分布の母数推定を直接推定することの2側面から検討できる。1) については、式(7)の一般化パレート分布の超過平均  $e_u$  が

$$e_u = E(x-u | x > u) = \frac{\xi}{1-\xi} u + \frac{\sigma_0}{1-\xi} \quad (10)$$

で表され、また、超過メディアン  $\bar{e}_u$  が

$$\bar{e}_u = 2^\xi u + \frac{2^\xi - 1}{\xi} \sigma_0 \quad (11)$$

で表されることに基づく。 $\sigma_0$ はある基準となる閾値  $u_0$  に対する尺度母数である。 $e_u$  および  $\bar{e}_u$  は、いずれも閾値  $u$  に対して線形であり、その勾配は、閾値に依存しない形状母数  $\xi$  のみで表される。したがって、一般に、極大波高が一般化パレート分布に漸近することは、1) の場合、 $e_u$  および  $\bar{e}_u$  が一定勾配の直線に漸近することに相当する。2) については、もちろん、推定される形状母数が一定値に漸近することである。

表-1の  $\lambda=2$  の場合を例にして、 $k=2$  のワイブル分布に従う  $10^3$  年分の極大波高の標本を生成し、極大波高  $H$  とそのベキ乗量  $H^2$  の標本超過平均と標本超過メディアンについて、1) の視点で描いたものを図-1および2に示す(それぞれの上段の折れ線)。閾値が十分に大きいと、標本サイズが非常に小さくなるために誤差変動が大きくなり、 $e_u$  および  $\bar{e}_u$  の勾配が水平に近づくことの確認が困難になることもわかる。図中の曲線は、式(1)を基にして計算される理論値である。理論曲線を補助線

として見れば、 $e_u$  および  $\bar{e}_u$  が水平の直線に漸近し、ベキ乗量  $H^2$  が、もとの量  $H$  より収束がはやいことがわかる。このことは、2) の視点からも確認できる。図-1および2の下段は、極大波高  $H$  とそのベキ乗量  $H^2$  から推定される形状母数  $\xi$  の値の変化(折れ線)を示したものである。図中の曲線は、式(9)の裾厚度  $\xi_R$  を示している。ただし、閾値が  $x_R$  となるように、再現期間  $R$  を変化させ、その5倍の再現期間を  $Q$  とし、対数の底が常に  $b=5$  となるように再現期間  $S$  を変化させている。また、参考のため、累積分布関数  $F$  およびその確率密度関数  $f$  に対して、

$$\tilde{\xi}(u) = \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{1-F(x)}{f(x)} \right) \right] \Bigg|_{x=u} \quad (12)$$

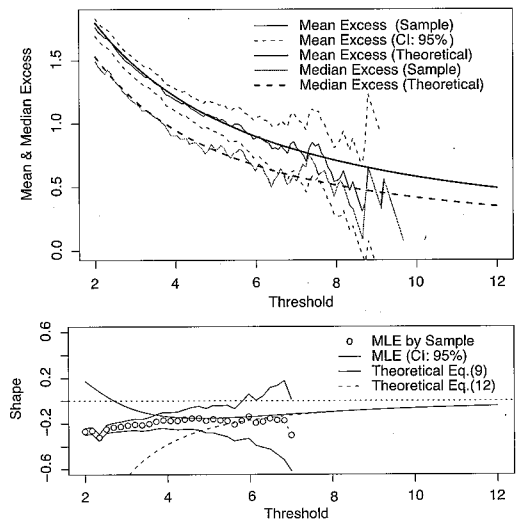


図-1 極大波高のガンベル分布への漸近

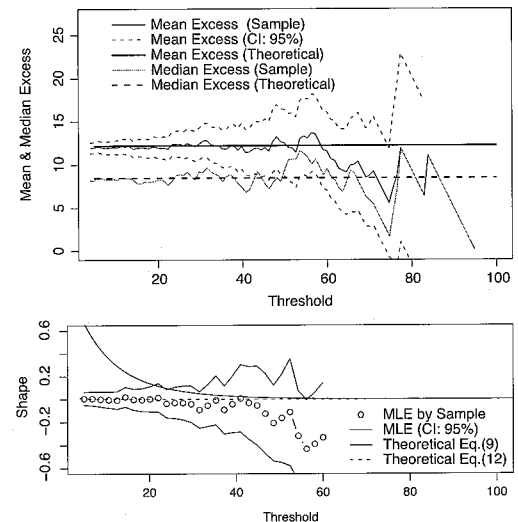


図-2 極大波高の自乗量のガンベル分布への漸近

と定義する  $\xi$  の閾値  $u$  による変化も描いている。なお、上式の極限は、von Mises (1954) によれば、極値分布の形状母数  $\xi$  に一致する。すなわち、

$$\lim_{u \rightarrow x_{\infty}} \tilde{\xi}(u) = \xi \quad (13)$$

となる。ただし、 $x_{\infty}$  は分布の上限である。

上述の例を一般化しよう。十分に大きな  $x$  に対して、

$$\left( \frac{x^{1/p} - B}{A} \right)^k = \left( 1 - \frac{B}{x^{1/p}} \right)^k \frac{x^{k/p}}{A^k} \rightarrow \frac{x^{k/p}}{A^k} \quad (14)$$

である。 $x$  は  $x^{1/p}$  のべき数を  $p$  とするべき乗量とみて、ある定数  $\alpha$  および  $\beta$  を定めれば、

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{x^{1/p} - B}{A} \right)^k \right\} \right]^m \\ & \rightarrow \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{x^{k/p} - \beta \log m}{\alpha} \right) \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

となると考えてよいだろう。上式の近似は、式(8)と原理は同じであり、急速な収束性を期待できる。式(15)において、

$$p = k \quad (16)$$

の時、右辺はガンベル分布になる。すなわち、形状母数  $k$  のワイブル分布に従う極大波高  $H$  (式(15)における  $x^{1/p}$ ) に対して、べき数  $p$  を  $k$  とするべき乗量  $H^k$  は、急速にガンベル分布に収束するといえる。

## 6. 高波の諸元

波高の自乗量  $H^2$  は、進行方向に測った単位長さあたりの進行波の平均エネルギーと解釈できる。また、合田 (2002) および Goda (2003) によれば、Wilson の波浪推算式の関係に基づいて、極大波高  $H$  とその周期  $T$  は、以下の関係が成り立つことが示される。

$$T \propto H^{0.63} \quad (17)$$

このことは、波高が周期の  $3/2$  乗に比例するという Toba (1997) の  $3/2$  乗則に対応するものである。式(17)を利用すると、べき乗量  $H^{1.37}$  は、

$$H^{1.37} \sim \frac{H^2}{T} \quad (18)$$

であるので、高波の発生に必要なエネルギーの供給量 (単位面積に対する単位時間あたり) に相当している。また、波形勾配  $H/L$  ( $L$  は波長) を摂動展開のパラメータとするストークス波の2次の非線形項の大きさは、

$$\frac{H^2}{L} \propto \left( \frac{H}{T} \right)^2 \propto H^{0.74} \quad (19)$$

となるので、べき乗量  $H^{0.74}$  は高波の非線形項の大きさとみなすこともできる。波高そのもの (べき数が1) も含め、これらの波浪諸元のべき数は、式(3)に示すとおり、合

田 (1988) が推奨するワイブル分布の形状母数の値に対応している。また、1波あたりの進行波の平均エネルギーは、

$$H^2 L \propto (HT)^2 \propto H^{3.26} \quad (20)$$

となることから、べき乗量  $H^{3.26}$  は、波群のエネルギーに相当する。したがって、山口ら (1997) が指摘するように、 $k > 2$  の範囲のワイブル分布も検討する必要がある、式(3)に示す  $k$  に加え、

$$k = 0.75, 1.0, 1.4, 2.0, 3.3 \quad (21)$$

の合計5種のワイブル分布は、力学的な特性量を極値とする漸近分布をもち、それらを極大波高の母分布の候補と考えるのがよいことがわかる。

## 7. 推定法

Petruaskas・Aagaard (1970) および合田 (1988) による推定法は、極値分布ではないワイブル分布の母数を直接的に推定することを解析の主体とするため、極値解析ではない。本研究では、極値理論に基づく極値解析をめざす。すなわち、極大波高のべき乗量をガンベル分布にフィッティングさせる。そのため、適切なべき数を選択す

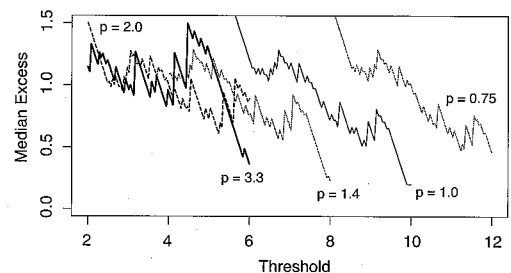


図-3 ベギ変数による超過メディアンの変化

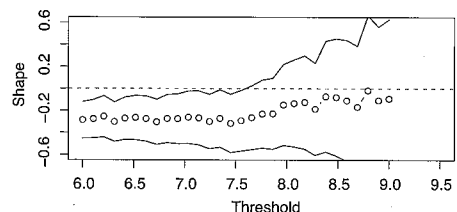


図-4  $\xi = 0$  への漸近 (べき数1の場合)

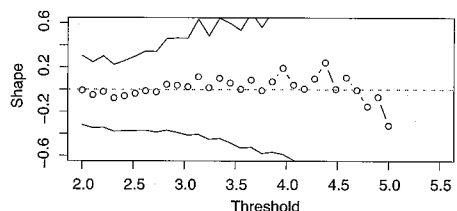


図-5  $\xi = 0$  への漸近 (べき数3.3の場合)

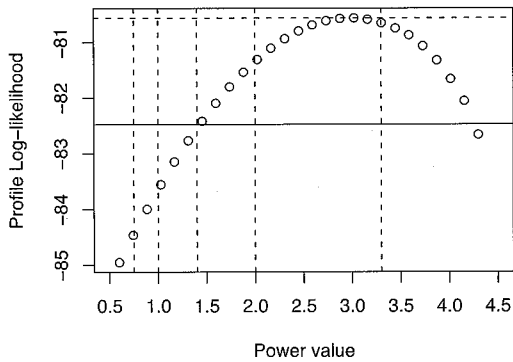


図-6 ベキ数によるプロファイル尤度の変化

る必要があるが、式(16)より、式(21)に示すワイブル分布の形状母数  $k$  に一致するベキ数  $p$  を選択すれば、ガンベル分布への漸近収束は急速となる。同時に、多くの標本を推定に利用できるため、推定誤差が小さくなることも期待できる。Goda(2000)で扱われている Kodiak 沖の波浪追算資料を用いて、以下に具体的に示す。

ベキ乗量  $X^p$  は、ベキ数  $p$  を変化することにより、幅広い値をとる。対話的に解析をすすめる場合には、図-1 および 2 に相当するグラフを順次に描けばよいが、式(21)の 5 つの値のベキ数について、超過平均の推移を一括表示し、その勾配を相互に比較したい場合には、困難となる。そこで、極大波高  $H_{i=1-n}$  に対して、ベキ乗量  $H_i^p$  ではなく、Box・Cox(1964)によるベキ変換

$$H_i^{(p)} = \frac{H_i^p - 1}{p\hat{H}^{p-1}} \quad (p > 0) \quad (22)$$

を用いると都合がよい。ここで、 $\hat{H}$  は極大波高  $H_i$  の幾何平均であり、以下のように求められる。

$$\hat{H} = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1-n} \log H_i\right) \quad (23)$$

なお、式(22)の変換は、上述の理由だけではなく、尤度を計算する上でも都合がよい。図-3 は、式(22)による波高のベキ変換量の超過メディアン  $\bar{e}_u$  の閾値  $u$  による変化を表す。 $p=0.75, 1, 1.4$  では、わずかな先端(例： $u>8, p=1$ )で勾配ゼロとみなせるのに対し、 $p=2, 3.3$  では、標本のとりうる範囲で勾配ゼロと判断できる。図-4 および 5 は、波高そのもの  $H$  とベキ変換量  $H^{(3.3)}$  の閾値を変化させて推定される式(7)の形状母数  $\hat{\xi}$  の値である。両者とも、図-3 の勾配ゼロの範囲で、 $\xi=0$  に漸近する様子が確認できる。

客観的なベキ数の選定を行うために、プロファイル尤度を用いた尤度比検定を行う。図-6 は、ベキ数を変えながら、それぞれのベキ数に対する尤度の最大値(これがプロファイル尤度である)を求めたものである。したがって、 $p=3.3$  あたりが最大尤度をとる。プロファイル尤度は統計量であり、その 2 倍の値が、自由度 1 のカ

イ自乗分布に従う。信頼係数を 95% にとれば、図中の実線をこえるプロファイル尤度が許容される。その範囲に式(21)のベキ数のうち、 $p=2, 3.3$  が含まれている。高波標本のデータ数が限られるため、複数のベキ数が選択されるが、最終的には、最大尤度に近い値をとるベキ数を形状母数  $k$  の値とみるのが適切と判断する。

## 8. 結 論

合田(1988)が推奨するワイブル分布の形状母数  $k$  の 4 種の値を含む、式(21)に示す計 5 つの値には、力学的な意味があることを示した。また、現地の高波資料を対象とした場合、未知となる形状母数  $k$  の選定について、極値理論に基づく選定手法を提案した。

謝辞：森瀬喬士氏(JR 東海コンサルタンツ(株)、今春より)には、図面の作成で協力いただいた。

## 参 考 文 献

- 北野利一(2004)：極値波高分布を特徴づける 2 つの指標－裾長と裾厚度－，統計数理，第 52 巻，pp. 135-149。
- 合田良実(1988)：極値統計におけるプロットング公式ならびに推定値の信頼区間に関する数値的検討，港湾技術研究所報告，第 27 巻，pp. 31-92。
- 合田良実(2002)：Wilson 推算式による波浪の簡易計算について，ECOH/YG 技術論文，No. 1，pp. 1-3。
- 高橋倫也(2006)：パワーベータ分布，極値理論の工学への応用(3)，統計数理研究所共同研究レポート，Vol. 183，pp. 40-53。
- 山口正隆・畑田佳男・大福 学(1997)：わが国沿岸における気象・海象要素の極値の推定，自然災害科学 J. JSNDS，Vol. 15，pp. 303-314。
- Box, G. E. P. and D. R. Cox(1964)：An analysis of transformations, J. R. Stat. Soc. Ser. B, Vol. 26, pp. 211-243。
- de Haan, L.(1970)：On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 124p。
- Goda, Y.(2000)：Random Seas and Design of Maritime Structures, World Scientific, 443p。
- Goda, Y.(2003)：Revisiting Wilson's formulas for simplified wind-wave prediction, Jour. of WPCOE, ASCE, Vol. 129, pp. 93-95。
- Smith, R. L.(1985)：Maximum likelihood estimation in a class of non-regular cases, Biometrika, Vol. 72, pp. 67-90。
- Takahashi, R.(1979)：Remark on stabilizing constants of the extreme statistic, Jour. Japan Statist. Soc., Vol. 9, pp. 79-86。
- Toba, Y.(1997)：The 3/2-power law for ocean wind waves and its applications, Advances in Coastal and Ocean Engineering, ed. Philip L.-H. Liu, Vol. 3, World Scientific, pp. 31-65。
- von Mises, R.(1954)：La distribution de la plus grande de  $n$  valeurs, Rev. Math. Union Interbalkanique, Vol. 1, pp. 141-160。
- Yamaguchi, M. and Y. Hatada(1998)：An extremal analysis system and its application to the estimation of extremes of meteorological and oceanographic elements around the coasts of Japan, Proc. of Wave Measurement and Analysis (WAVES '97), pp. 932-946。