

波高と周期の結合確率分布の近似的表現

Adaptable Representation of Joint Distribution of Wave Heights and Periods

北野利一¹・森下和帆²・喜岡 渉³

Toshikazu KITANO, Kazuho MORISHITA and Wataru KIOKA

A practical form of the joint distribution of wave heights and periods is proposed in this paper. It is traditionally inevitable to employ the approximation of local-height and local-period in sense of simplicity. The ambiguous relation in the previous studies is pointed out, which is the doubtful assumption between the angular velocity and real-period, and then an alternative relation is introduced newly. It is an advantage in this study that the marginal distribution of wave height is obtained as the Rayleigh distribution. The proposed joint distribution is so adaptable that the effect of nonlinearity and wave-breaking will be easily taken into account.

1. ま え が き

不規則波浪の基本的な特性として、波高と周期の結合確率分布を明らかにすることは重要である。近年、Stansell ら (2004) は、個々波が連続する波列から抽出されることを考慮し、また、負の周期も扱うことにより、Longuet-Higgins (1983) の理論分布における周期をゼロクロス法の定義に沿うように改めた。しかし、Stansell らの理論では、波高分布が Rayleigh 分布とは大きく異なり、実際の不規則波の波高分布とも異なること、また、波高を条件とする周期分布の裾がシミュレーション結果に比して長いことなどの問題点がある。

工学的応用の立場から望まれる確率分布は、できる限り単純な関数形で、できる限り多くの不規則波の統計的特性を忠実に表現することである。波高と周期の結合分布を誘導するにあたり、多くの近似処理を伴うことは避けられない。特に、個々波の波高や周期は、1 周期という有限な時間内を継続して計測して初めて定義できるものであるにもかかわらず、ある特定の時刻における瞬間的な量で置き換える。他方、確率分布として成立させるためには、負の確率が生じないことや全確率が 1 となることなどの前提を満たす必要もある。そのため、例えて言えば、“あっちを引っ込めると、こっちが飛び出る” ような不具合が生じないように、近似の適用に際して、適度なバランスが必要と考える。その観点からいえば、線形不規則波の波高分布を Rayleigh 分布とみなすことは、その誘導過程で多くの近似が陽にも陰にも用いられ、理論的な裏づけは極めて曖昧である反面、結果的に成功しているといえる。なぜなら、データとの適合性が比較的に良好であり、また、非線形性の効果や碎波による影

響を考慮しやすいからである。

本研究は、既往の研究における問題点を明らかにした上で、新たな近似を用いた結合確率分布を提案する。

2. 波高階級毎の周期の特性

例えば、合田 (1990) に見るように、波浪スペクトルを与えて、得られる標本波形から、不規則波の特性を探索することは可能である。本章では、数式に基づく理論展開に先立ち、先見的な考察を行う。

i) ピアソン・モスコビッツ型の波浪スペクトル (以下、PM と略) から生成された標本波形の波高と周期の散布図を図-1 に示す。図中の曲線は、波高を説明変数として周期の局所的回帰 (Loader, 1999) を行ったものである。波高の小さい階級で周期は短く、波高が大きな階級で周期はほぼ一定であり、その一定値は波全体の平均周期 (破線) より大きいことが確認できる。このことは、多くの研究で指摘されてきた。図-2 は、その回帰曲線からの残差を波高に対して描いた散布図である。残差ゼロ (実線) に対して、正と負の残差に若干の違いがある。また、平均波高あるいは波高の最頻値の周辺で、周期の残差の絶対値は大きく、波高の増加および減少に伴い、周期の残差の絶対値は減少することも確認できる。

Longuet-Higgins (1975, 1983) および Stansell (2004) で導出された波高と周期の結合分布では、不規則波の特性の違いは、帯域幅パラメータ

$$\nu = \sqrt{\frac{m_2 m_0}{m_1^2} - 1} \dots\dots\dots (1)$$

によってのみ区別される (波高および周期の無次元化に必要なスケール・パラメータを除く)。ここで、 m_k は k 次のスペクトル・モーメントであり、ピアソン・モスコビッツ型スペクトルの場合、 $\nu=0.42$ である。

ii) 帯域幅パラメータ $\nu=0.42$ となるほぼ対称な釣り鐘型スペクトル (Almost Symmetric Bell Shaped

1 正会員 工博 名古屋工業大学大学院准教授 工学研究科
2 新日本製鐵(株)
3 正会員 Ph. D. 名古屋工業大学大学院教授 工学研究科

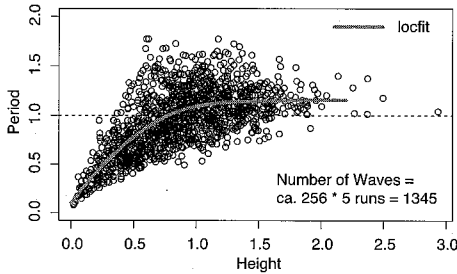


図-1 波高と周期の散布図 (PM による標本波形)

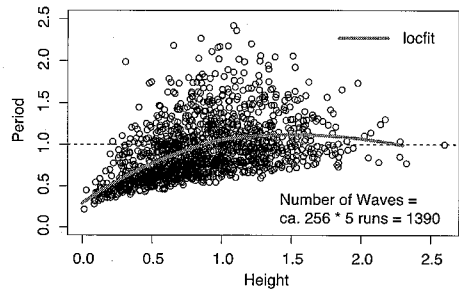


図-3 波高と周期の散布図 (ASBS による標本波形)

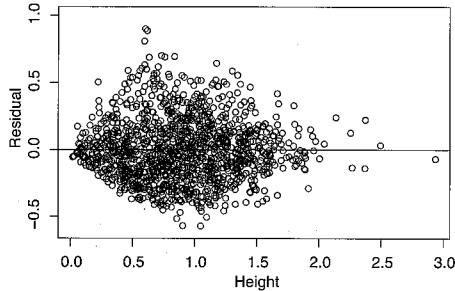


図-2 周期の回帰曲線に対する残差 (PM による標本波形)

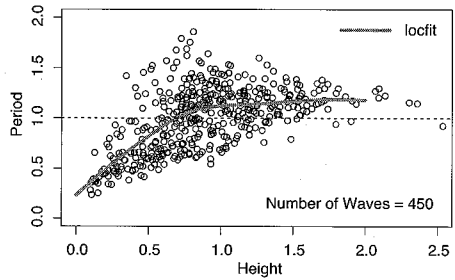


図-4 波高と周期の散布図 (現地データ)

spectrum; 以後 ASBS と略)

$$S(f) = Ce^{-\frac{(f-\bar{f})^2}{D}} (f > 0) \dots\dots\dots (2)$$

から生成される標本波形の波高と周期の散布図を図-3 に示す. PM の ν と同じ値をとるため, Longuet-Higgins (1975, 1983) および Stansell (2004) の各理論に基づけば, 波高と周期の結合確率分布は, 両スペクトルに対して, 一致するはずである. しかし, 図-3 を見るとおり, 波高の頻度が高い階級での周期のばらつき, 波高の大きな階級での平均周期 (すなわち, 有義波周期など) が, 2つのスペクトルの波形で異なっている.

iii) 喜岡ら (2007) による現地観測で得られた標本波形に対して, 波高と周期の散布図を図-4 に示す. 波高の階級に応じて, 階級内の平均周期の推移は, 上述の i) および ii) と類似している. 他方, 図-5 に示すとおり, 波高の周辺分布は, Rayleigh 分布 (碎線) からやや乖離し,

$$p(z) = \frac{d}{dz} \exp\{-(z/\alpha)^\kappa\} \dots\dots\dots (3)$$

で与えられる Myrhaug・Kjeldsen (1986) が提案する分布 (実線, z は, 後述するとおり, 自乗平均平方根による無次元波高, $\alpha=1.05$, $\kappa=2.39$) にほぼ従っていることが確認できる. これは, 波浪の非線形性による波形の非対称性の効果と考えられる.

以上の予備的な考察から, 波高階級毎の周期の特性として, 階級毎の平均周期およびその偏差は, 波高に応じ

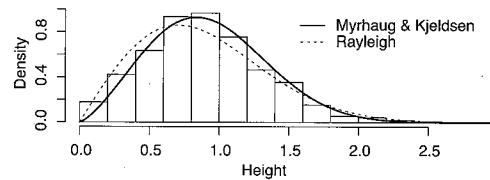


図-5 波高分布 (現地データ)

て変化すること, また, スペクトル帯域幅パラメータ ν によりのみ支配されるわけではないこと, 非線形性を有する現地波形を対称とした場合, 波高分布は, Rayleigh 分布 (式 (3) において, $\alpha=\sqrt{2} \approx 1.42$, $\kappa=2$) から若干乖離するものの, 波高と周期の結合分布のパターンには, 非線形性の効果は明確ではないことがわかる.

3. 位相角の微係数

任意の周波数 f に対して, ある周波数 $\bar{f}$ (その角周波数を $\bar{\sigma}$ とし, $\bar{\sigma}=2\pi\bar{f}$) まわりに,

$$2\pi f = \bar{\sigma} + 2\pi(f - \bar{f}) \dots\dots\dots (4)$$

と展開すれば, 不規則波 η は,

$$\eta = \text{Re}(\rho e^{i\bar{\sigma}t}) \dots\dots\dots (5)$$

として表現できる. ここで,

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp\{2\pi i(f_k - \bar{f})t\} \dots\dots\dots (6)$$

である. したがって, 包絡線 R および位相角 ϕ は, 次のように定義できる.

$$R=|\rho|; \phi=\arg \rho \cdots \cdots (7)$$

この時、複素変動量 ρ の実部 R_c および虚部 R_s に加え、それらの時間による微係数 $\dot{R}_c$ および $\dot{R}_s$ は、中心極限定理より、多次元正規分布に従う。そこで、周波数 $\bar{f}$ をオービタル・クロスによる波の平均周波数 $f_{01}(=m_1/m_0)$ として選べば、無次元波高 z と位相角の微係数 $\dot{\phi}$ の同時確率密度関数は、次式のように得られる。

$$p(z, \dot{\phi}) = \frac{2z^2}{\sqrt{\pi} \nu \bar{\sigma}} \exp \left\{ -z^2 \left(1 + \frac{\dot{\phi}^2}{\nu^2 \bar{\sigma}^2} \right) \right\} \cdots \cdots (8)$$

ただし、包絡線 R の 2 倍を波高 H とし、無次元波高 z は、自乗平均平方根 H_{RMS} で除した量、すなわち、

$$z = \frac{H}{H_{\text{RMS}}} = \frac{R}{\sqrt{2} m_0} \cdots \cdots (9)$$

である。

Longuet-Higgins (1975, 1983) および Stansell ら (2004) の研究では、式 (8) に現れる位相角の微係数 $\dot{\phi}$ に波の周期 T を関連づけることにより、波高と周期の結合確率分布を誘導している。すなわち、

$$\frac{2\pi}{T} \sim \bar{\sigma} + \dot{\phi} \cdots \cdots (10)$$

という関係を用いている。この関係は、式 (4) の関係に符合するものである。また、各々の研究で、式 (10) の取り扱い方が、わずかに異なる。以下では、その相違点について検討する。

(1) Longuet-Higgins (1975) での取扱い

式 (10) の両辺を平均角周波数 $\bar{\sigma}$ で除して、その逆数をとることにより、無次元周期 τ を

$$\tau = \frac{T}{\bar{T}} = \frac{1}{1 + \dot{\phi}/\bar{\sigma}} \approx 1 - \frac{\dot{\phi}}{\bar{\sigma}} \cdots \cdots (11)$$

と近似し、周期を位相角の微係数 $\dot{\phi}$ に関係づける。ここで、平均周期 $\bar{T}$ を

$$\bar{T} = 1/\bar{f} = \frac{2\pi}{\bar{\sigma}} = 1/f_{01} \cdots \cdots (12)$$

と置いていることに注意せよ。上式を式 (8) に代入して波高と周期の同時確率密度が得られる。

(2) Longuet-Higgins (1983) での取扱い

式 (11) の最右辺のように近似せず、変形すれば、

$$-\frac{\dot{\phi}}{\bar{\sigma}} = 1 - \frac{1}{\tau} \cdots \cdots (13)$$

という関係が得られる。これを式 (8) に代入して波高と周期の同時確率密度が得られる。この場合、周期 τ が正の値に限定されるための補正係数が含まれる。さらに特筆すべきは、その周辺分布としての波高分布が、もはや Rayleigh 分布とはならないことである。ただし、Longuet-Higgins (1983) は、その違いはわずかであると断っている。また、波高による周期の条件付き確率の最頻値は、次式に示す周期 τ_L となる。

$$\tau_L = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + (4\nu^2/R^2)}} \cdots \cdots (14)$$

(3) Stansell らによる取扱い

Stansell ら (2004) の原論文は多くを検討し、難解であると考えため、ここでは、その理論のエッセンスの紹介と問題点の指摘を行う。

水位 η を実軸に、水位の Hilbert 変換した量

$$\xi = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(u)}{t-u} \frac{du}{\pi} = \text{Im}(\rho e^{i\theta}) \cdots \cdots (15)$$

を虚軸にとり、複素平面上での点 $\zeta = \eta + i\xi$ の運動を考える。この時、複素平面における点 ζ の偏角 φ は、

$$\varphi = \bar{\sigma}t + \phi \cdots \cdots (16)$$

と定義され、複素変動量 ξ は以下のように表される。

$$\xi = R e^{i\varphi} \cdots \cdots (17)$$

偏角の微係数 $\dot{\phi}$ は、原点から延ばした半直線（これを基線とよぶ）を横切る角速度を表す。そのため、 $\dot{\phi}/(2\pi)$ の逆数は、基線を横切る瞬間における局所周期とみなすことができる。水位 η が上向きにゼロ線を横切るとは、偏角 φ の増加とともに正の実軸を横切ることと、偏角 φ の減少とともに負の実軸を横切ることの 2 つの場合を含む。ここではガウス過程の成立する線形な不規則波を対象としているので、全ての基線で起こりうる確率は同等である。したがって、水位のゼロアップクロスの確率は、ある 1 つの基線を横切ることに対して、偏角の増加と減少の両方とも考える必要がある。それゆえ、ゼロアップクロス時の局所周期は、 $\dot{\phi}/(2\pi)$ の逆数の絶対値に等しいことがわかる。すなわち、位相角の微係数 $\dot{\phi}$ と周期 τ の関係は、式 (13) に加え、

$$-\frac{\dot{\phi}}{\bar{\sigma}} = 1 + \frac{1}{\tau} \cdots \cdots (18)$$

という関係も、Stansell らの研究では用いている。ゼロダウンクロス時の局所周期も同様に考えることができる。その結果、ゼロクロスによる平均周期の逆数 $f_{02}(=\sqrt{m_2/m_0})$ と偏角の微係数 $\dot{\phi}$ の関係は、

$$E|\dot{\phi}|/(2\pi) = f_{02} \cdots \cdots (20)$$

となる。 E は期待値を表す。上式の右辺の平均周波数 f_{02} は、単位時間あたりの波の数（の期待値）と解釈できる。したがって、両辺を波の数 f_{02} で除し、波高 z と偏角の微係数 $\dot{\phi}$ の確率密度関数 $\tilde{p}(z, \dot{\phi})$ を用いて、式 (19) の左辺の期待値を表現すれば、

$$\frac{1}{2\pi f_{02}} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{\phi}| \tilde{p}(z, \dot{\phi}) d\dot{\phi} = 1 \cdots \cdots (20)$$

となる。これは、1 波あたりの波高 z と偏角の微係数 $\dot{\phi}$ の全確率が 1 であることを示している。ここで、確率密度関数 $\tilde{p}$ は、式 (9) の確率密度 p を用いれば、

$$\tilde{p}(z, \dot{\phi}) = p(z, \dot{\phi}) | \dot{\phi} = \dot{\phi} - \bar{\sigma} \quad (21)$$

である。波高と周期の結合確率密度として、

$$p_s(z, \tau) = \frac{f_{01}}{f_{02}} \frac{2\pi}{\tau^3} \left[\tilde{p}\left(z, \frac{\bar{\sigma}}{\tau}\right) + \tilde{p}\left(z, -\frac{\bar{\sigma}}{\tau}\right) \right] \quad (22)$$

と置けば、式 (20) は、次のように表される。

$$\int_0^\infty dz \int_0^\infty p_s(z, \tau) d\tau = 1 \quad (23)$$

式 (22) の周辺分布として得られる波高分布は、Rayleigh 分布とはかなり異なる。

Stansell ら (2004) では、シミュレーション波形から得られる波高や周期を通常のゼロクロスの定義によらず、峰高および谷高 (半波高) の倍を波高とし、偏角が $\pi/2$ 進む時間 (4 半周期) の 4 倍を周期として得られるデータと照合している。このような処理は、彼らの理論の成立条件に合わせるためのものであり、Stansell らの理論は、現実的な個々波の波高と周期を対象としていない。

従来の理論において、問題となっているのは、位相角の変化を周期で置き換える、式 (10) の関係である。式 (10) は式 (4) と非常に類似するため、その置き換えが成立することが当然に思えるが、瞬間的な位相速度から定義される局所周期は、本来の個々波の周期ではない。また、複素平面における位相角の時間変動 $\dot{\phi}$ とスペクトルにおける周波数の差 $(f - \bar{f})$ とは直接的に対応しない。したがって、式 (10) の両辺は、決して等号で結べる関係ではなく、単なる仮定である。

Stansell らの理論は興味深いけれども、厳密には成立しない仮定を設けているにも関わらず、周期をゼロクロス波に一致させる調整や、1 波あたりの確率に読み替える調整などの厳密な取扱いをすることは、あまり意味がないと考える。

4. 新たな近似

前節で考察した問題点の指摘を踏まえると、式 (10) の関係は、他のものに代替可能であることがわかる。本研究では、まず第 1 段階として、以下の関係を考える。

$$\frac{2\pi}{T} = \sigma_p + \dot{\phi} \quad (24)$$

ただし、平均角速度 σ_p は、あらゆる場合に一定値をとるのではなく、波高に依存する量として扱う。したがって、ある波高に対しては、 $\sigma_p = \bar{\sigma}$ が成立し、その場合は、式 (24) は式 (13) に変形される。

波高分布を Rayleigh 分布とみなすことは、海岸工学の過去の経緯からも都合がよい。そのための数学的な条件は、範囲 $[0, \infty)$ をとる周期 T が位相角の微係数 $\dot{\phi}$ がとりうる範囲 $(-\infty, \infty)$ の全域に対応する関係でなければならない。そこで第 2 段階として、式 (13) に対して、

$$\frac{\dot{\phi}}{\bar{\sigma}} = \log \tau \quad (\sigma_p = \bar{\sigma}) \quad (25)$$

という近似を行う。同等の近似を式 (24) に適用すれば、

$$-\frac{\dot{\phi}}{\bar{\sigma}} \approx \frac{\log(\tau/\tau_p)}{\tau_p} \quad (26)$$

となる。

図-6 は、位相角の微係数 $\dot{\phi}$ と周期 τ の関係について、既往の研究で扱われている式 (11), (13) および (18) と本研究での式 (25) を図示している。

前述のとおり、周辺分布である波高分布が Rayleigh 分布になるように、あらかじめ意図している。そのため、式 (8) を Rayleigh 分布で除して、波高による $\dot{\phi}$ の条件付き確率を求めた上で、式 (26) の関係を代入する。

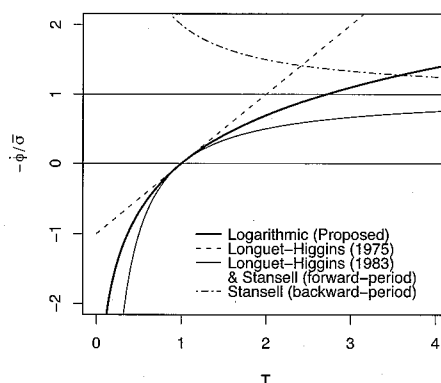


図-6 周期と位相角の微係数の関係

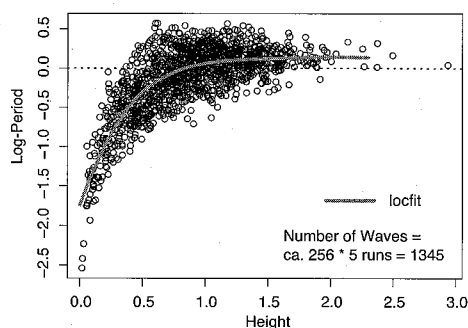


図-7 対数周期と波高の散布図 (PM による標本波形)

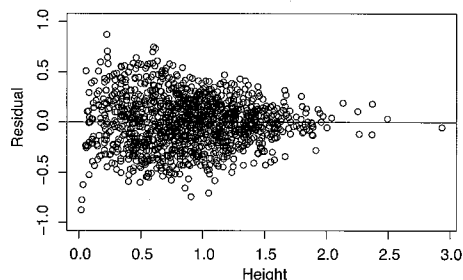


図-8 対数周期の残差 (PM による標本波形)

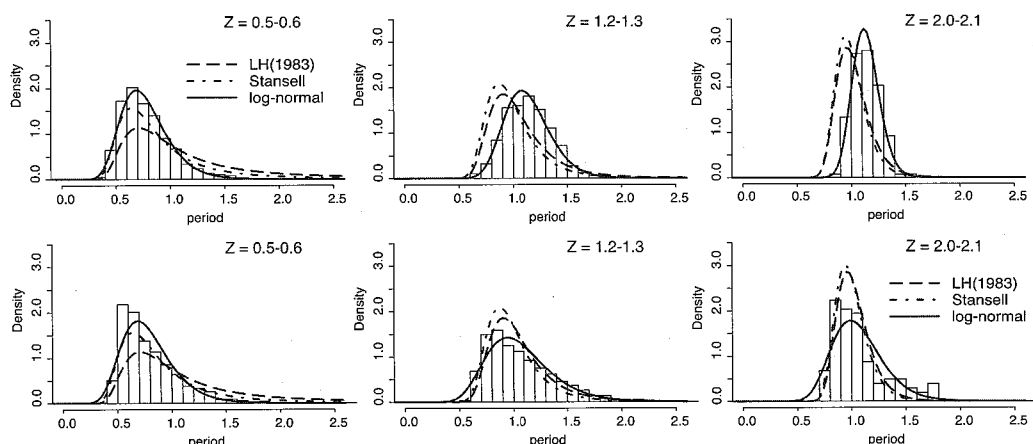


図-9 波高階級別の周期分布 (上段: PM による, 下段: ASBS による)

その結果, 周期 τ の条件付き確率是对数正規分布として得られる. あるいは, 対数周期 $\log \tau$ の条件付き確率が

$$p(\log \tau | z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log \tau - \mu}{\delta}\right)^2\right\} \quad (27)$$

と正規分布として得られる. ここで, その正規分布の平均 μ および標準偏差 δ は以下のように表される.

$$\mu = \log \tau_p, \quad \delta = \frac{\nu \tau_p}{\sqrt{2}z} \quad (28)$$

この理論の問題点は, τ_p を別の理論を用いて定めなければならないことである. さらに, 式 (26) が仮説であることから, 帯域幅パラメータ ν の値は式 (1) のものに一致しないと推測される. τ_p については, Longuet-Higgins (1983) で得られる式 (14) の τ_L を援用するという考え方もある. ただし,

$$\tau_L \rightarrow 1_- \quad (R \rightarrow \infty) \quad (29)$$

となり, 波高の大きな階級における平均周期が波全体の平均周期となるので, 有義波周期に関する経験的事実

$$T_{1/3}/\bar{T} \approx 1.2 \quad (30)$$

に対応しない. したがって, 北野ら (2000) による理論で式 (14) を補正することも可能と考える. スペクトル特性量と関係づけるための数式展開は, 紙面の都合より別の機会に譲り, ここでは, 式 (28) の μ および δ をデータから推定する立場で検討する. 図-7 は, PM による標本波形の個々波の対数周期に対して, 局所回帰により $\log \tau_p$ を求めたものを図示している. 図-8 は, その残差 $\log(\tau/\tau_p)$ であり, この場合, 対数周期の分布の対称性が明確である. 図-9 は, 局所周期で得られた τ_p を用いて, PM と ASBS による標本波形の周期分布である. 約 256 波のシミュレーションを 100 回行ったものをデータとしている. いずれのスペクトルの場合も, 既往の理論より, 本研究で提案する対数分布が良好である.

非線形性の有する現地波形も含め, ここでは詳細な議

論は控えるが, 式 (3) を周辺分布として式 (27) の条件分布に掛け合わせるにより, 結合分布として適用可能と考える.

5. ま と め

既往の研究での問題点に対し, 新たな関係式を提案することにより, 波高を条件とする周期の条件付き分布は, 対数正規分布として導かれることを示した.

謝辞: 鈴木達典氏 (東洋建設(株), 今春より) および岡田拓也君 (名古屋工業大学大学院) には, 標本波形の生成および整理と図面の作成について協力いただいた.

参 考 文 献

- 喜岡 渉・加藤寛之・北野利一 (2007): 高波浪時の波群特性に関する現地観測, 海工論文集, 第 54 巻, pp. 161-165.
- 北野利一・瀬瀬 肇・中野 晋 (2000): 周波数スペクトルに基づく有義波周期の理論, 海工論文集, 第 47 巻, pp. 71-75.
- 合田良実 (1987): 数値シミュレーションによる波浪の標準スペクトルと統計的性質, 第 34 回海工論文集, pp. 131-135.
- Loader, C. (1999): Local Regression and Likelihood, Springer, 290p.
- Longuet-Higgins, M. S. (1975): On the joint distribution of the periods and amplitude of sea waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 80, pp. 2688-2694.
- Longuet-Higgins, M. S. (1983): On the joint distribution of wave periods and amplitudes in a random wave field, Proc. Roy. Soc. Lond. A 389, pp. 241-258.
- Myrhaug, D. and S. P. Kjeldsen (1986): Steepness and asymmetry of extreme waves and the highest waves in deep water, Ocean Eng., Vol. 13, pp. 549-568.
- Stansell, P., J. Wolfram and B. Linfoot (2004): Improved joint probability distribution for ocean wave heights and periods, Jour. Fluid Mech., Vol. 503, pp. 273-297.