

Shock Capturing Scheme の浅海短周期波への適用

Application of Shock Capturing Schemes for Deformation of Neashore Periodic Waves

下園武範¹・草野真史²・田島芳満³・佐藤慎司⁴

Takenori SHIMOZONO, Masahumi KUSANO, Yoshimitsu TAJIMA and Shinji SATO

A numerical model for transformation of short periodic waves is developed on the basis of hybridization of highly accurate finite difference scheme and TVD scheme. TVD scheme is highly dissipative when applied to oscillating solutions because it is not able to distinguish smooth extrema from discontinuity by its smooth indicator. To overcome the fatal shortcoming, TVD scheme is hybridized with a scheme with higher order accuracy. A switch function together with a discontinuous indicator is introduced to make the scheme TVD from breaking point to the shore. The model performance is verified through comparisons of model results with experimental data as well as existing empirical formulae. It is found that wave damping due to breaking is reproduced well by TVD scheme if an appropriate switch is employed.

1. はじめに

Boussinesq 型モデルに代表される浅海波動モデルの課題のひとつは、砕波や遡上といった不連続面を含む現象の取り扱いである。従来、砕波モデルや遡上モデルといったサブモデルを組み込むことで問題に対処してきた。しかしながら経験的なパラメータを数多く含んだこれらの手法では不規則波や多方向波の問題など、複雑な状況への対応に限界がある。これに対して、近年、双曲型の問題における不連続面の取り扱いについて Shock Capturing Schemes と総称される手法が注目され、海岸工学の分野においても津波遡上の問題を中心に適用例が見られる (Brocchini ら, 2001)。これらは波形情報を参照しながら、解の単調性を維持するために必要な減衰を自動的に与えるというもので、従来法に比べて任意性が小さい。著者ら (下園ら, 2006) は孤立波の伝播・砕波・遡上にこれらのスキームのひとつである TVD 法を適用し、実験との比較を通して高い精度を有することを確認している。本稿はさらに同スキームの浅海短周期波の砕波や遡上への適用を試みたものである。

短周期波のような振動的な振る舞いをする解を扱うとき、TVD 法では砕波帯外にも大きな減衰が導入されてしまうため、砕波に至る前に解が散逸する結果になる。そのため、この種のスキームを浅海短周期波へ適用した例はほとんどみられない。対象が異なるが、同構造の問題に対するアプローチとして Yee ら (1999) による研究がある。この研究では、衝撃を含む気体の乱流場の直接解析にあたり、高精度差分スキームと TVD 法のハイブリッ

ド化により滑らかな領域と不連続な領域の計算精度を両立させる方向が示された。本研究ではこの手法を拡張することにより、沖から遡上域までを統一的に扱うことが可能な人為的要素を排除した計算モデルの開発を行った。

2. 計算モデルの概要

本研究では沖から遡上域までを統一的に扱えるモデルの開発が念頭にあるため、基礎方程式には非線形性を顕に扱えるものが望ましい。そこで、後藤ら (1984) による非線形分散波理論式を基に、Schafer & Madsen (1995) に倣って線形分散性および底面勾配の影響を改善した以下のような方程式を用いた。

$$V_t + F_x = G \dots\dots\dots (1)$$

$$V = \begin{bmatrix} D \\ Q \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} Q \\ Q^2/D + gD^2/2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ -gDz_x + \Psi \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} \Psi = & (D^3G_1/3 - D^2G_2/2)_x + z_x(D^3G_1/2 - DG_2/2) \\ & + B_2D^3[(Q/D)_{xx} + \{(Q^2/D)_x/D\}_{xx} + g(D+z)_{xxx}] \\ & + B_1D^2[Q_{txx} + (Q^2/D)_{xxx} + g\{D(D+z)_x\}_{xx}] \end{aligned} \dots\dots\dots (3)$$

$$G_1 = U_{tx} + UU_{xx} - (U_x)^2 \dots\dots\dots (4)$$

$$G_2 = U_1 z_x + U[Uz_x]_x \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 D : 全水深、 Q : 流量、 U : 断面平均流速、 z : 基準面からの底面高、 g : 重力加速度あり、 B_1 および B_2 は修正係数である。上式の分散項を線形化すれば Schafer & Madsen (1995) の修正 Boussinesq 方程式に一致する。

つぎに計算手法について説明する。本稿の計算スキームは高次精度差分法と TVD 法のハイブリッドスキームである。解が滑らかであると判断された箇所には減衰の

1 正 会 員 修(工) 東京海洋大学助手海洋科学部
2 非 会 員 国土交通省九州地方整備局
3 正 会 員 Ph.D 東京大学大学院准教授工学系研究科
4 フェロー 博(工) 東京大学大学院教授工学系研究科

少ない前者を用い、解が不連続になると自動的に減衰が加わる後者に切り替えることによって碎波などの不連続な現象を表現することを意図している。以下ではそれぞれのスキームについて簡略に解説した後に、両者の切替法について説明する。

(1) 高次精度差分スキーム

簡便に時間四次精度を達成する方法として、Adams の予測子修正子法や Runge-Kutta 法があるが、ここでは後者を採用した。すなわち、新しい時間ステップにおける変数は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} k_1 &= L(V^n) \\ k_2 &= L(V^n + 0.5\Delta tk_1) \\ k_3 &= L(V^n + 0.5\Delta tk_2) \\ k_4 &= L(V^n + \Delta tk_3) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\hat{V}^{n+1} = V^n + dt(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \quad (7)$$

ここに、 L は式 (1) を解く演算子であり、各ステップは分散項を含むため陰的に扱わなければならない。空間差分については、一階微分項については四次精度中央差分を採用し、二階微分項には二次精度中心差分を用いた。ただし行列解法に Thomas のアルゴリズムを採用するため、分散項に含まれる一階微分項については二次精度中央差分を用いている。

(2) TVD スキーム

以下の議論を明瞭にするため TVD スキームについて概説する。TVD スキームにはいくつか存在するが、ここでは Roe-Sweby 型の二次精度 TVD スキームを扱う。TVD 法では式 (1) の同次方程式を考える。

$$V_t + F(V)_x = 0 \quad (8)$$

式 (8) を差分化するにあたり、以下のような保存形式の差分スキームを採用する。

$$V_i^{n+1} = V_i^n - \lambda(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) \quad (9)$$

ここに、 $\lambda = \Delta t / \Delta x$ である。式 (9) は Jacobean A を用いて以下のように書き換えることができる。

$$V_t + AV_x = 0 \quad (10)$$

$$A = F_V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ Q/D + gh^2/2 & 2Q/D \end{bmatrix} \quad (11)$$

式 (10) は双曲型であるため A は対角化可能であり、

$$A = RAR^{-1}, \quad A = \text{diag}(a^l) \quad (12)$$

と表すことができる。ここに $\text{diag}(a^l)$ は a^l ($l=1, 2$) を対角成分とする対角行列を表す。 a^l は特性速度であり、

$$a^1 = U - C, \quad a^2 = U + C \quad (13)$$

で表される。ここで R は微小な時間・空間内で一定であると、局所線形化することで式 (9) を以下のように書き換える。

$$W_t + AW_x = 0, \quad W = R^{-1}V \quad (14)$$

TVD 法では従来法のように元の変数 V に対して減衰を導入するのではなく、式 (14) のように分解した各成分波に対して減衰を与える。式 (14) を一次精度風上差分を用いて差分化すれば、

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \lambda(G_{i+1/2} - G_{i-1/2}) \quad (15)$$

$$G_{i+1/2} = \frac{1}{2}[A(W_{i+1}^n + W_i^n) - |A|(W_{i+1}^n - W_i^n)] \quad (16)$$

となる。左から R をかけて元の変数に対応するセル間フラックスを求めると以下ようになる。

$$F_{i+1/2}^{RP} = \frac{1}{2}(F_{i+1} + F_i - R_{i+1/2}|A_{i+1/2}|\alpha_{i+1/2}) \quad (17)$$

ここに、

$$\alpha_{i+1/2} = R_{i+1/2}^{-1}(U_{i+1}^n - U_i^n) \quad (18)$$

である。また、同様に二次精度の Lax-Wendroff 法を用いて差分化すれば、セル間フラックスは

$$F_{i+1/2}^{LW} = \frac{1}{2}(F_{i+1} + F_i - R_{i+1/2}\lambda A_{i+1/2}^2 \alpha_{i+1/2}) \quad (19)$$

のように表される。なお、添え字 $i+1/2$ の中間値は Riemann 問題の近似解で評価する。以下では最も一般的な Roe (1981) による近似解を用いた。式 (17) の 1 次精度風上差分は新たなピークを作ることなく常に解の単調性が保障されるが、2 次精度以上の差分では解が不連続になると非物理的な振動を生じる。TVD スキームは二つのハイブリッドスキームであり、以下のように流速制限関数によって両者を使い分ける。

$$F_{i+1/2}^{TVD} = \frac{1}{2}(F_{i+1} + F_i + R_{i+1/2}\Phi_{i+1/2}) \quad (20)$$

$$\Phi_{i+1/2} = -[|A_{i+1/2}| - \text{diag}(\delta(r_{i+1/2}^l)(|A_{i+1/2}| - \lambda A_{i+1/2}^2 \alpha_{i+1/2}))] \quad (21)$$

$$r_{i+1/2}^l = \frac{\alpha_{i+1/2}^{l+1}}{\alpha_{i+1/2}^l}, \quad I = \text{sgn}(\alpha_{i+1/2}^l) \quad (22)$$

ここで、 sgn は符号関数である。また、 r^l は滑らかさの指標であり、解が滑らかなところでは $\delta=1$ となって式 (20) は二次精度のフラックスを与え、逆に不連続な箇所では δ が 0 に近づき、風上差分化により必要な数値減衰が導入される。Sweby (1984) は解が単調性を維持するための条件である TVD 条件 (Harten, 1983) を満たしながら、二次精度を維持するために δ の取りうる範囲を示した。以下の計算では、その範囲内で最大の

減衰を与える minmod 関数を用いている。

式 (20) は右辺第二項までの中心差分のフラックスに第三項の減衰項を加えた形になっている。したがって以下のようにすれば、(1) で示した高次差分スキームに TVD 法の概念に基づく減衰項を加えることができる。

$$V_i^{n+1} = \hat{V}_i^n - \lambda (R_{i+1/2} \Phi_{i+1/2} - R_{i-1/2} \Phi_{i-1/2}) \quad (23)$$

しかしながら、式 (23) をそのまま短周期波の問題に適用した場合、解の滑らかな箇所でも解が減衰してしまう。これは第 1 に滑らかさの指標が通常の波谷や波峰と非線形性によって形成される不連続な波形を厳密に区別できないためである。さらに、Lax-Wendroff 法は 4 次の数値粘性を有しており、振動的にふるまう解に適用した場合にはその影響は無視できない。したがって (23) をそのまま短周期波の問題に適用した場合には、上記二つの要因により時間の経過とともに解が散逸する結果となる。そこで Yee ら (1999) に倣って式中の Φ を以下のように書き換える

$$\Phi_{i+1/2}^* = \text{diag}(S_{i+1/2}^l) \Phi_{i+1/2} \quad (24)$$

ここで、 S^l は l 番目の成分波に対して高次差分スキームと TVD スキームを切り替えるためのスイッチ関数であり、0 と 1 の間の値をとる。適切なスイッチ関数を導入することにより、減衰が要請される箇所のみで自動的にスキームを TVD 化されることができる。 S^l の具体的な表式については次節に示す。

(3) スキームの切替法

ここでは式 (24) のスイッチ関数について述べるにあたり、TVD 法の適用範囲を考える。浅水方程式はボアのような不連続な解を弱解として含んでいるため、比較的緩やかな砕波に適用した場合には計算安定性が担保されればある程度物理的に正しい解への収束性は保障されると考えられる。したがって周期波の砕波を対象とすると、急激な砕波の後のいわゆる Inner Surf zone から遡上域にかけては、ボアとの類似性から TVD 法により物理的に正しい解を与えることが可能と考えられる。したがって、問題は砕波直後の急激な波高変化をどのように表現するかという点にある。ここでは減衰の必要ないポテンシャル領域から大きな減衰が要請される領域が急激に切替わるようなスイッチ関数を導入するという方法をとった。

まず、以下のような解の不連続性を表すパラメータを新たに考案した。

$$\theta_i^l = \frac{a_i^l - a_{i+1}^l}{|a_i^l|}, \quad l = \text{sgn}(a_i^l) \quad (25)$$

このパラメータはある点での特性速度とその下流側の隣接点での特性速度の相対差を表している。下流の特性速度が上流の特性速度よりも小さい場合には、それぞ

れの点を通る特性曲線同士が下流で交じり合うことになる、つまり不連続面が形成される。したがって式 (25) のパラメータが大きいくほど、浅水理論の枠組みで不連続面の形成が切迫していることを表す。このパラメータを用いてスイッチ関数を以下のように定義した。

$$S_i^l = \begin{cases} 1 & \text{if } \theta_i^l > \theta_b \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (26)$$

$$S_{i+1/2}^l = \max(S_{i-1}^l, S_i^l, S_{i+1}^l, S_{i+2}^l) \quad (27)$$

ここに θ_b は閾値であり、 θ がこの値を超えた場合に TVD 法による減衰が導入される。 θ_b の具体的な値は次節で議論する。なお、隣接点間の最大値をとるのは、空間的な幅を持たせて減衰を与えるためである。

3. モデルの検証

(1) 高精度差分スキーム

まず、前節で採用した高精度差分スキームの性能を検証するため、勾配 1/20 の一様斜面上を様々な波形勾配の周期波が伝播する計算を行った。沖の入射条件はアーセル数によって 3 次のストークス波と 2 次のクノイド波を使い分けた。岸のドライエリアでは極小さな水深 $h_d = 10^{-4}$ m を常に与えるとともに、底面勾配項を無視する。水深がこれを下回ったときにはその点での流速をゼロとし、水深を h_d に設定しなおす処理を行う。Roe (1981) の Riemann 解法では厳密に解の正值性が保証されないため、この処理により保存性を損なう可能性があるが、その影響は軽微である。

図-1 に異なる波形勾配の入射波の浅水変形の計算結果を首藤 (1974) によるクノイド波を基にした理論値とともに示す。波形勾配が小さいときにはわずかに理論値よりも小さい値となつているが、概ね砕波限界付近まで良好な結果が得られた。

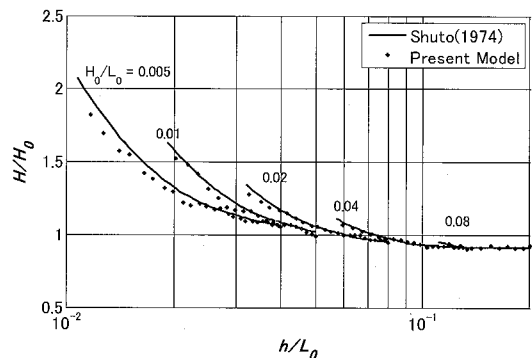


図-1 浅水変形の計算結果と首藤 (1974) による理論値

(2) パラメータの同定

つぎに、スイッチ関数に用いたパラメータの閾値を

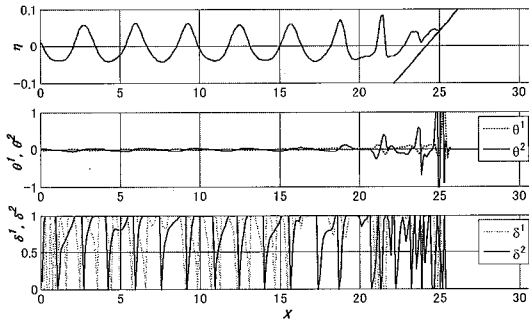
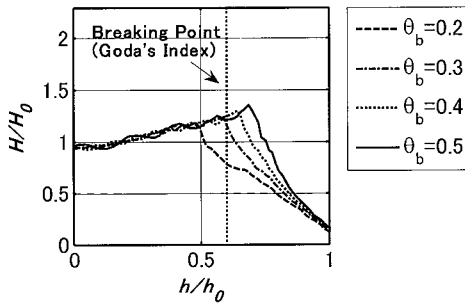


図-2 水面波形と各種パラメータ

図-3 θ_b と碎波減衰の関係

同定するため様々な条件でテスト計算を行った。図-2 には結果の一例として、勾配 1/20、波形勾配 0.01 の場合の水面波形、不連続性を表すパラメータ θ_b および流速制限関数 δ の値を示している。沖の滑らかな波峰や波谷において流速制限関数 δ の値がゼロとなっていることが分かる。これは先に述べたように滑らかさを表す指標 r' が滑らかなピークをも不連続として判定するためであり、スイッチ関数を導入しなければ、風上差分化によって大きな減衰が導入され、入射波は短い時間の内に散逸する結果になる。一方、新たに導入したパラメータは非線形性による波峰の先鋭化に伴って大きくなっていることが分かる。

つぎに図-2 と同条件で異なる θ_b を用いて計算した斜面上での波高分布を図-3 に示す。 θ_b が大きいほど、碎波点は岸側に移動し、波高低減が急になることがわかる。また静水汀線位置での波高は θ_b の値に関係なく一定となった。図中には合田の碎波指標に基づく碎波点を点線で示しており、この条件では 0.3 程度の値でよく適合することが分かる。さまざまな条件で検討を行った結果、 θ_b の最適値は波形勾配や底面勾配への依存性が見られたが、概ね 0.3-0.4 程度の値をとればよいことが分かった。

(3) 実験結果との比較

碎波帯内および遡上域でのモデルの妥当性を検証するため水理模型実験を行った。片側に一樣勾配斜面

表-1 実験条件

Case	周期 T (s)	入射波高 H_1 (cm)	波形勾配 H_0/L_0	沖水深 h_0 (cm)
1	1.33	7.0	0.027	29.0
2	2.00	6.8	0.010	29.0
3	2.34	6.0	0.006	29.0

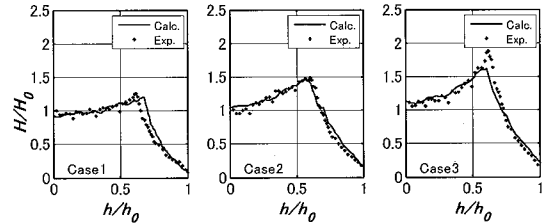


図-4 斜面上の波高分布

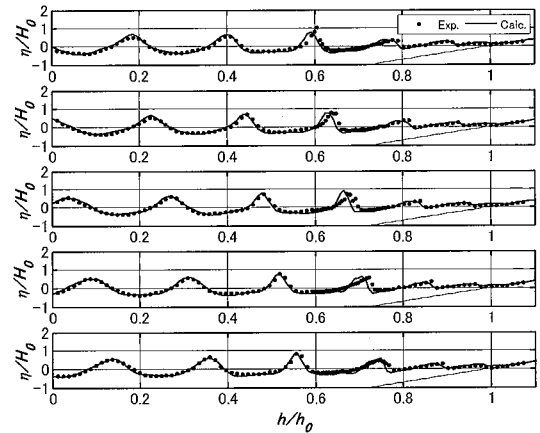


図-5 斜面を伝わる周期波の変形 (Case1)

(0.035) を有する造波水路において表-1 に示す 3 ケースの規則波を入射させ、斜面上での水面変動を互いに同期させながら計測した。

図-4 に 3 つのケースの斜面上での波高分布の実験結果および計算結果を示す。3 つのケースとも計算ではパラメータ θ_b に同じ値 0.35 を用いた。この値は Case2 で最適化されたものであるため、Case1 および 3 ではわずかに碎波点の位置にずれが見られるものの、すべてのケースで計算値は実験で得られた波高分布をよく再現している。この結果と図-3 の結果から、碎波点の位置さえ正確に与えることができれば、その後の減衰は TVD 法に基づく減衰で十分再現可能であるということが類推できる。

図-5 および図-6 に Case1 および Case3 の水面波形の 1 周期間の変化を示す。両ケースともに碎波帯外から遡上域に至るまでの水面変動が良好に再現されていることが分かる。

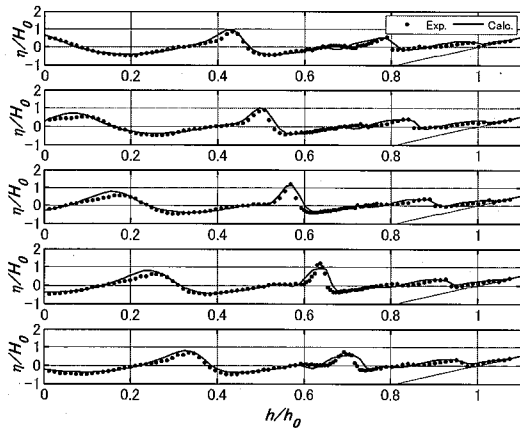


図-6 斜面を伝わる周期波の変形 (Case3)

(4) 幅広い条件での検討

より幅広い条件下でのモデルの性能検証を行うために、波形勾配 0.005-0.06, 底面勾配 1/10-1/30 の間で計 24 ケースを設定し、波形勾配 0.02 で最適化されたパラメータを用いて計算を行った。図-7 および図-8 にはそれぞれ計算から得られた碎波水深および波高と合田の碎波指標による値との比を示している。計算上の碎波点は波高の極大点とした。また図-9 には計算された遡上高を小川・首藤 (1982) の半理論式とともに示している。

これらの結果から単一の θ_b では幅広い条件の碎波水深を再現しきれないが誤差は 10% 程度であること、さらに波形勾配が小さく、底面勾配が大きいほど θ_b を小さくと

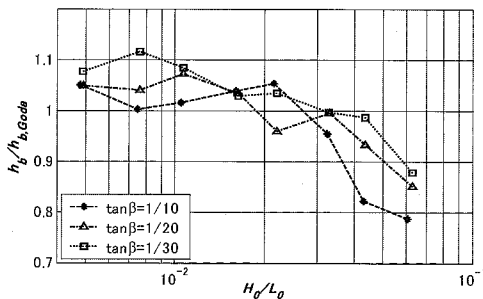


図-7 各ケースの碎波水深

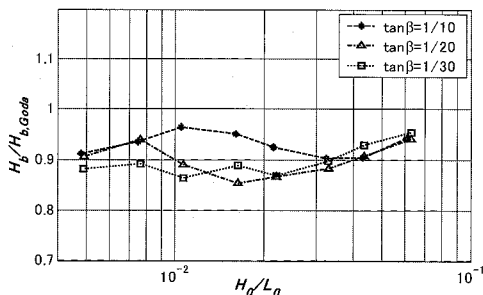


図-8 各ケースの碎波波高

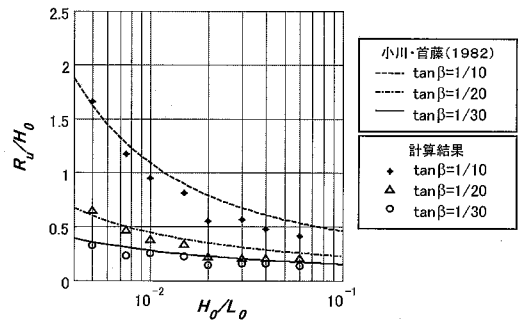


図-9 各ケースの遡上高

る必要があるということが分かる。また、遡上高に関しては波形勾配が小さい場合に過少になる傾向がみられた。

4. おわりに

本研究では任意性の少ない統一的な浅海波動モデルの構築を目指して、Shock Capturing Schemes のひとつである TVD 法の浅海短周期波への適用を試みた。碎波点の決定に任意性が残ったが、TVD 法に基づく減衰は短周期波の碎波に伴う波高低減を十分な精度で再現できることが実験値との比較を通して明らかとなった。ここで導入したスイッチ関数のさらなる改良と、本スキームが従来スキームに対して優位性を発揮するであろう不規則波や多方向波の問題へのモデル適用性の検証を今後の課題としたい。

参考文献

- 小川由信, 首藤伸夫 (1982): 波打帯の水理特性について, 第 29 回海講論文集, pp. 135-139.
- 後藤智明 (1984): アーセル数が大きい場合の非線形分散波の方程式, 土木学会論文集, 第 351 号, II-2, pp. 193-202.
- 下園武範・舟山英男・佐藤慎司 (2006): 衝撃捕捉法によるボア状碎波の形成と遡上の解析, 第 53 回海講論文集, pp. 26-30.
- 首藤伸夫 (1974): 非線形長波の変形 - 水路幅, 水深の変化する場合, 第 21 回海講論文集, pp. 57-63.
- Brocchini, M., R. Bernetti, A. Mancinelli and G. Albertini (2001): An efficient solver for nearshore flows based on the WAF method, Coastal Eng., Vol. 43, pp. 105-129.
- Harten, A. (1983): High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys., Vol. 49, pp. 357-393.
- Roe, P. L. (1981): Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, J. Comp. Phys., 43, (1981)
- Schaffer, H. A., P. A. Madsen (1995): Further Enhancements of Boussinesq-type Equations, Coastal Eng. Vol. 26, pp. 1-14
- Sweby, P. K. (1984): High resolution TVD schemes using flux limiters. Lect. Appl. Math., Vol. 22, pp. 289-309.
- Yee, H. C., N. D. Sandham and M. J. Djomehri (1999): Low-Dissipative High-Order Shock-Capturing Methods Using Characteristic-Based Filters, J. Comput. Phys. Vol. 150, pp. 199-238.