

巻き波型碎波における水面追跡の高精度化のための CISP H 法の提案

Development of CISP H Method for Accurate Water-Surface Tracking in Plunging Breaker

Khayyer Abbas¹・後藤仁志²・Shao Songdong³

Abbas KHAYYER, Hitoshi GOTOH and Songdong SHAO

A Corrected Incompressible SPH (CISP H) method is proposed for accurate tracking of water surface in breaking wave and resultant splash-up. Corrective terms are derived based on a variational approach to ensure the angular momentum preservation of Incompressible SPH (ISPH) formulations. The proposed CISP H model is applied to simulate the breaking and post-breaking of solitary waves on a plane slope. The high precision of the CISP H model is confirmed through comparisons with experimental data of plunging breaker. The introduction of corrective terms significantly improves the capability and the accuracy of the ISPH model in the simulation of wave breaking and resultant splash-up.

1. はじめに

SPH 法 (Lucy, 1977) は, 宇宙物理学の分野で圧縮性流体の解析を目的として開発されたが, 弱圧縮性を扱う WCSPH (Weakly Compressible SPH) 法 (Monaghan, 1994) へと改良され, 水面波の解析にも適用されるようになった. Monaghan・Kos (1999), Dalrymple・Rogers (2005) は, WCSPH 法を水面波の斜面遡上過程に適用している. さらに, SPH と並ぶ粒子法の代表格である MPS 法 (Koshizuka・Oka, 1996) の非圧縮性流体用のアルゴリズムを取り入れた非圧縮性流体の解析法である ISPH (Incompressible SPH) 法が Shao・Lo (2003) により提案され, 本格的な水面波解析への適用が可能となった (例えば, Shao・Gotoh, 2004).

ISPH 法は碎波・遡上過程に関して MPS 法と同程度の再現性を有する手法であるが, 巻き波型碎波における splash-up の再現性に関して不十分な点が残されている. CIP 法に基づく splash-up の計算 (例えば, 渡部・佐伯, 1996) では, plunging point から再跳躍する大曲率・薄層の水脈が明瞭に計算されるが, 粒子法 (例えば, Gotoh・Sakai, 1999) では, plunging point から再跳躍後に水塊分裂が活発化して大曲率・薄層の水脈が維持されない.

本稿では, このような CIP 法等の高精度 Euler 型モデルと比較した場合の粒子法の弱点について, (i) 流体応力の非等方性の記述と (ii) 離散化に伴う運動量の保存性の 2 つの点から検討し, 粒子間相互作用モデルに内包される問題点をできる限り簡便に修正するためのモデルの改良, すなわち CISP H (Corrected Incompressible SPH) 法を提案する.

2. ISPH 法

(1) ISPH 法の基礎式

粒子法では, Navier-Stokes 式

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{T} + \mathbf{g} \quad (1)$$

(ρ : 流体の密度, $\mathbf{u}$: 流速ベクトル, P : 圧力, $\mathbf{T}$: 粘性応力テンソル, $\mathbf{g}$: 重力加速度) を基礎式とする. 標準的な SPH 法 (WCSPH 法) では, 陽解法によって安定した計算を実行するために人工粘性を用いた等方的粘性項が導入される. これに対して, ISPH 法 (Shao・Lo, 2003) では, 歪み速度テンソルを計算して粘性を評価するので, 流体応力の非等方性が考慮される. しかし, ISPH 法も plunging point から再跳躍する大曲率・薄層の水脈を十分に再現できないことが知られているので (Shao, 2006), もう一方の問題すなわち離散化に伴う運動量の保存性に関して, ISPH 法を対象に考察を進めることとする.

ISPH 法では, 圧力勾配項, 粘性項は

$$\left(\frac{1}{\rho}\nabla P\right)_i = \sum_j m_j \left(\frac{P_j}{\rho_j^2} + \frac{P_i}{\rho_i^2}\right) \nabla_i W_{ij} \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{T}\right)_i = \sum_j m_j \frac{8\nu_0\rho_j}{(\rho_i+\rho_j)^2} S_{ji} \nabla_i W_{ij} \quad (3)$$

$$S_{ji} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ji} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{ji} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{ji} & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{ji} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ji} = \frac{u_{ji}}{r_{ij}} \frac{x_{ji}}{r_{ij}} = \frac{u_j - u_i}{r_{ij}} \frac{x_j - x_i}{r_{ij}} \quad (5)$$

$$r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}| = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \quad (6)$$

と記述される. ここに, m_j : 粒子 j の質量, W_{ij} : カーネル関数, ν_0 : 動粘性係数, S_{ji} : 歪み速度テンソル (式 (4) は 2 次元の場合の表式, (u, v) : 流速の x お

1 学生会員 M.Sc. 京都大学大学院博士後期課程
2 正会員 博(工) 京都大学准教授 工学研究科都市環境工学専攻
3 Ph.D. University of Bradford 講師

よび y 成分), $\mathbf{r}_i$: 粒子 i の位置ベクトルである。

(2) 運動量保存性

粒子 i に外力が作用しないとき, 粒子 i の運動量は保存される。粒子周囲の相互作用領域内の他の粒子との相互作用力 (コントロールボリューム内の内力) を $\mathbf{F}_{aij}$ とすると,

$$\sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{F}_{aij} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ならば運動量は保存される。以下では粒子 i, j 間の相互作用力の保存性について順に確認する。

圧力勾配力は,

$$\mathbf{F}_{ai \rightarrow i}^p = m_i m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij} \quad \dots\dots\dots (8)$$

と書ける。カーネル関数は一般に, $\nabla_i W_{ij} = \mathbf{r}_{ij} \Phi_{ij}$ (Φ_{ij} はスカラー関数) であるから,

$$\nabla_i W_{ij} = \mathbf{r}_{ij} \Phi_{ij} = -\mathbf{r}_{ji} \Phi_{ji} = -\nabla_j W_{ij} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となって,

$$\mathbf{F}_{ai \rightarrow j}^p = -\mathbf{F}_{aj \rightarrow i}^p \quad \dots\dots\dots (10)$$

が得られ, 任意の粒子 i, j に関して圧力勾配力が相殺され, 保存性が保証される。

一方, 粘性応力 (x 成分) は,

$$\mathbf{F}_{aj \rightarrow i}^{vx} = \frac{m_i m_j}{(\rho_i + \rho_j)^2} \frac{4\nu_0 \rho_j}{r_{ij}^2} W_{ij}^{diff} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$; W_{ij}^{diff} = 2u_{ij} x_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x} + (v_{ij} x_{ij} + u_{ij} y_{ij}) \frac{\partial W_{ij}}{\partial y}$$

と書ける。

$$u_{ij} x_{ij} = (-u_{ji})(-x_{ji}) = u_{ji} x_{ji} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\left(\frac{\partial W_{ij}}{\partial x} \right)_i = -\left(\frac{\partial W_{ij}}{\partial x} \right)_j \quad \dots\dots\dots (13)$$

であることから, 圧力勾配力と同様に,

$$\mathbf{F}_{aj \rightarrow i}^{vx} = -\mathbf{F}_{ai \rightarrow j}^{vx} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となり, 保存性が保証される。

(3) 角運動量保存性

次に, 粒子周囲の相互作用領域内の他の粒子との相互作用力に関して, 角運動量が保存されるには,

$$\sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{aij} = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

が満足される必要がある。これまでで明らかなように,

$\mathbf{F}_{ai \rightarrow j} = -\mathbf{F}_{aj \rightarrow i}$ だから, 粒子 i, j に付いて言えば,

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ai \rightarrow j} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{aj \rightarrow i} = -\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ai \rightarrow j} \quad \dots\dots\dots (16)$$

となるが, これは内力 $\mathbf{F}_a$ がベクトル $\mathbf{r}_{ij}$ と平行でない限りゼロとはならない。カーネル関数がベクトル $\mathbf{r}_{ij}$ と

スカラー関数の積で記述されることを考えると, 内力を規定する応力テンソルが等方的な場合には式 (16) はゼロとなって, 角運動量が保存される。したがって, 圧力勾配項に関しては, 角運動量の保存性も保証される。一方, ISPH 法の粘性項は, 歪み速度を用いた非等方型の項であるので, 角運動量は保存されない。

この章の冒頭にも述べたように, 標準的な SPH 法 (WCSPH 法) では人工粘性を用いた等方的粘性項が用いられるので, 運動量, 角運動量とも離散化に伴う保存性には問題がないが, 粘性項の等方性ゆえに水脈の伸長が際立った方向性を有する splash-up の再現性には弱点を抱えざるを得ない。以上の議論から明らかなように, WCSPH 法と ISPH 法は (i) 流体応力の非等方性の記述と (ii) 離散化に伴う運動量の保存性の 2 つの点についてトレードオフの関係にある。

3. CISP法

速度勾配を修正することにより ISPH 法で角運動量保存を実現することを考える。剛体回転する流れ場における流速は,

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \dots\dots\dots (17)$$

と書けて ($\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$: 角速度ベクトル, $\mathbf{r}$: 位置ベクトル), この流れ場における速度勾配は,

$$\nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} ; \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる ($\boldsymbol{\Omega}$: 回転速度テンソル)。このテンソル $\boldsymbol{\Omega}$ は交代行列 ($\boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega}$) であるから, 変形速度テンソル $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2$ はゼロとなり, さらにテンソル $\mathbf{D}$ のトレースとして得られる発散 $\text{div } \mathbf{u} = 0$ となるので, この流れ場からはいかなる並進運動も生じないことは明らかである。この流れ場で, SPH の離散化を行った場合に, 上記と同様の性質が保証されるよう, 流速勾配を修正するときに必要な修正行列を導出すれば, 離散化に伴う付加的角運動量の影響を相殺する修正が可能となる。

SPH の速度勾配は,

$$\nabla \mathbf{u}_i = \sum_j V_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \otimes \nabla_i W_{ij} \quad \dots\dots\dots (19)$$

と記述される。ここに, V_j : 粒子 j の体積, $\otimes$: テンソル積である。先ほどと同様に剛体回転する流れ場を考えると,

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u}_i &= \sum_j V_j (\boldsymbol{\Omega}_j \mathbf{r}_j - \boldsymbol{\Omega}_i \mathbf{r}_i) \otimes \nabla_i W_{ij} \\ &= \boldsymbol{\Omega}_i (\sum_j V_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \otimes \nabla_i W_{ij}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

を得る (Bonet・Lok, 1999)。つまり, SPH の離散化によって $\nabla \mathbf{u} \neq \boldsymbol{\Omega}$ の状態が生じたこととなる。 $\nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega}$ とするには, カーネルの勾配が条件

$$\sum_j V_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \otimes \nabla_i W_{ij} = \mathbf{I} \dots \dots \dots (21)$$

を満足する必要がある ($\mathbf{I}$: 単位行列). そこで修正行列 $\mathbf{L}_i$ を導入し, カーネルの勾配を

$$\nabla \mathbf{u}_i = \sum_j V_j(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \otimes \mathbf{L}_i \nabla_i W_{ij} \dots \dots \dots (22)$$

と書くと,

$$\begin{aligned} \sum_j V_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \otimes \mathbf{L}_i \nabla_i W_{ij} \\ = (\sum_j V_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \otimes \nabla_i W_{ij}) \mathbf{L}_i^T = \mathbf{I} \end{aligned} \dots \dots \dots (23)$$

となり, 修正行列の表式

$$\mathbf{L}_i = (\sum_j V_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \otimes \nabla_i W_{ij})^{-1} \dots \dots \dots (24)$$

を得る. 本稿ではカーネルとして B-spline 関数

$$W(r, h) = \begin{cases} \frac{10}{7\pi h^2} \left(1 - \frac{3}{2}Q^2 + \frac{3}{4}Q^3\right) & Q < 1 \\ \frac{10}{28\pi h^2} (2-Q)^3 & 1 \leq Q \leq 2 \\ 0 & Q > 2 \end{cases} \quad (25)$$

を用いた. 式中の変数 Q の定義は $Q = |\mathbf{r}|/h$ であり, h : smoothing length (カーネルの大きさを規定するパラメータ) で, 本稿の計算では粒子の初期配列間隔の 1.2 倍 (Shao・Lo, 2003) に設定した. 鉛直 2 次元場における粒子 i まわりの速度勾配修正行列 $\mathbf{L}_i$ は

$$\mathbf{L}_i = \left[\frac{\sum_j V_j \frac{DW_{ij}}{DQ} \frac{x_{ij}}{r_{ij}h} x_{ji}}{\sum_j V_j \frac{DW_{ij}}{DQ} \frac{y_{ij}}{r_{ij}h} x_{ji}}, \frac{\sum_j V_j \frac{DW_{ij}}{DQ} \frac{x_{ij}}{r_{ij}h} y_{ji}}{\sum_j V_j \frac{DW_{ij}}{DQ} \frac{y_{ij}}{r_{ij}h} y_{ji}} \right]^{-1} \quad (26)$$

となる. ISPH 法に行列 $\mathbf{L}_i$ を用いた速度勾配の修正過程を追加したコードを CISPCH 法と呼ぶ. CISPCH 法では, 流体応力の非等方性と運動量および角運動量の離散化に伴う保存性の両者が実現されることとなり, 大曲率・薄層の水脈の再現性の向上が期待できる.

4. 巻き波形砕波の再現性

ISPH 法および CISPCH 法の水面追跡の精度を比較するため, 非砕波状態 (砕波の 0.1 s 前) の波峰付近の粒子分布について, 水面粒子と水粒子を区別してプロットしたのが, 図-1 である. CISPCH 法では, 波峰近傍の領域を除くと水面がほぼ 1 粒径程度の厚さとなっており, 他方 ISPH 法では, 水面は 3 ないし 4 粒径の厚みを有している他, 波峰直下では, 少数ではあるが水中に水面粒子と判定される粒子が存在している. ISPH に見られる水面判定の特性は, 粒子法に共通した特性であり, 粒子数密度の揺らぎに基づいて粒子座標を制御するフレームワークを採る限り不可避の特性である. したがって CISPCH 法でも, 完全に粒子数密度の揺らぎを無くすることはできないが, 従来の粒子法と比較して格段に高い水面判定が可能となっていることが分かる.

図-2 は, 巻き波形砕波とそれに続く splash-up プロセスの計算結果である. ISPH 法および CISPCH 法のシミュレーションを Li (2000) および Li・Raichlen (2003) による実験と同一の水理条件で実施し, 彼らの実験で撮影された写真データと比較した. 砕波後の plunging jet の発達, jet の着水, それに続く splash-up の全過程が CISPCH 法により良好に再現されているが, ISPH 法は plunging jet の発達についてはほぼ適切に再現できるものの, 大曲率・薄層の水脈の存在を特徴とする splash-up 過程に関しては, CISPCH 法と比較して再現性の低下は明白である. 前章でも述べたように, ISPH 法は, 頻用される WCSPH 法 (例えば, Dalrymple・Rogers, 2005) で導入されていた人工粘性を導入せず, 粘性項を歪み速度テンソルを計算して評価することにより流体応力の非等方性を考慮しており, 薄層の水脈が急激に伸長する過程では現象の再現性に有利なモデルの構成をとっている. しかし他方では, ISPH 法には離散化に伴う角運動量の保存に欠陥があり, jet が巻くように落下着水する角運動量の大きい領域では, 離散化に伴うエラーが大きくなって水脈の分裂 (粒子の飛散) を過度に促進する結果となったと推定される. これに対して CISPCH 法では, ISPH 法の非等方流体応力の記述はそのままに, 角運動量の保存を実現する補正を導入したので, 大曲率・薄層の水脈の挙動を良好に再現することが可能となったと言える.

特に splash-up について CISPCH 法の再現性を詳細に検討するために, 先の水理実験写真と CISPCH 法のシミュレーション結果を重ねたのが図-3 である. jet 着水時の空気室の形状と大きさ (図中の (a)), 2 次 jet の上昇過程の終盤の jet の弧を描く形状 (図中の (b)) に関しては, CISPCH 法は極めて良好な再現性を示している. 一方, splash-up の最終段階 (図中の (c)) では, jet が着水点付近から真上に上昇する様子が実験写真に見られるが, CISPCH 法の粒子分布は岸側に傾いた上昇 jet の存在を示しており, この点の実験再現には不十分さが残る

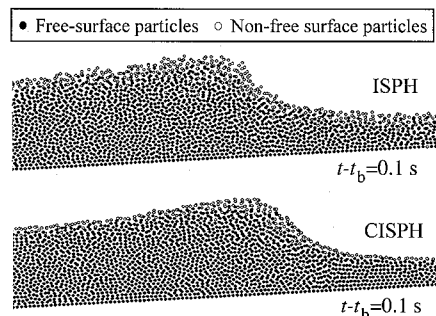


図-1 水面追跡精度

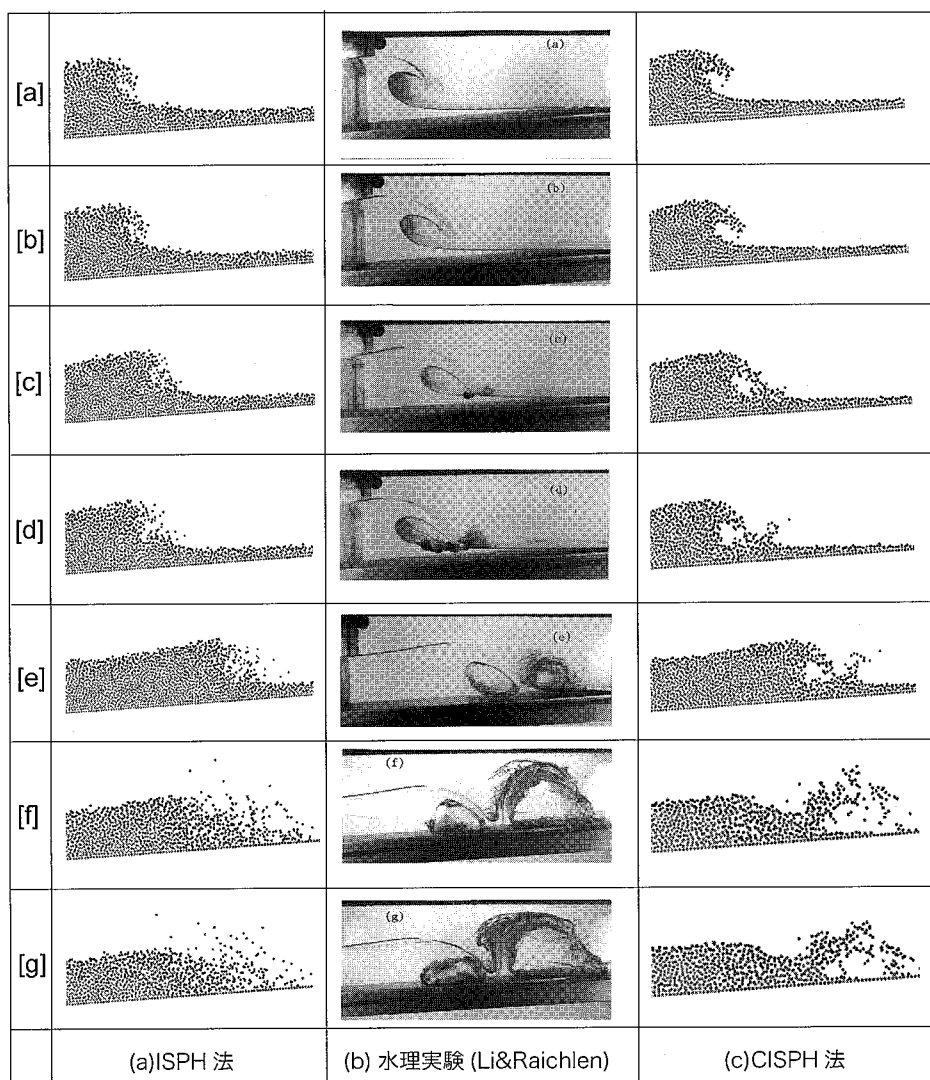


図-2 巻き波型砕波と壱上過程の比較

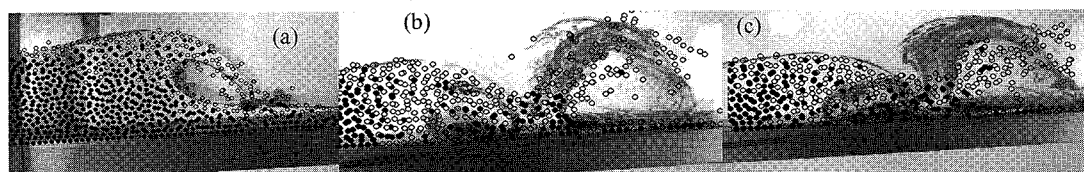


図-3 splash-up jet の再現性

と云わざるを得ない。このことは、CISP法では、jetの着水・再上昇の過程で、岸側への運動量が過剰に発生するエラーが生じている可能性を示唆しているが、SPHにおけるカーネル補間の不完全性（何れの手法においても離散化に伴う補間の不完全性は存在し、このことは粒子法固有の問題ではない）が、この領域での過剰運動量

の発生にどのように関連しているのか検討が必要である。

2次jetの上昇過程での空気室の大きさにも再現性の不十分さは残されている。jet着水時点では、空気室の形状と大きさはともに良好に再現されていたが（図-3の(a)）、2次jetの上昇過程（図-3の(b)）では、実験で空気室のある領域に多くの水面粒子が存在するものの、

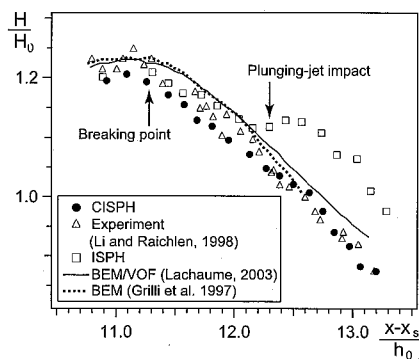


図-4 波高の変化

空気室は押し潰されており、空気室の消滅が実験より加速されている。このことの原因の一つは、今回の CISP 法が単相流を対象としたモデルであり、水塊に包囲された空気塊から水塊への反力を考慮していないことにある。2 相流を扱う CIP 法 (Yabe ら, 1991) を導入したシミュレーション (例えば、渡部・佐伯, 1996) では、2 次 jet の上昇過程でも空気室の存在が再現されている。

図-4 は、波高 H の変化に関する計算手法間の比較を示している。図中には、CISP 法、ISPH 法とともに、BEM (Grilli ら, 1997)、VOF/BEM の融合法 (Lachaume ら, 2003) を実験データ (Li (2000) および Li・Raichlen (2003)) と比較して示した。図中の h_0 は沖波波高、 h_0 は静水深、 x_s は平坦床と斜面の接点の座標である。はじめに非砕波の状態に関しては、BEM、VOF/BEM の融合法については、波高の若干の過大評価が見られるものの、全ての方法が実験とほぼ良好な対応を示している。BEM に関しては、非回転流の仮定が不成立となる砕波点より岸側の遡上過程に関しては、モデルの適用範囲外となり計算が破綻する。ISPH 法は、jet の着水点以深は極めて良好な実験との一致を示すが、それより岸側では、突然の波高上昇が検出されている。ここでは、水粒子の最高到達点を波高と定義しているため、splash-up 過程で粒子の分散が過剰に活発化する ISPH 法では波高は過大評価されてしまう。これに対して、水塊の伸長運動の追跡精度が高い CISP 法では、水塊分裂が過剰に活発化することがなく、波高の予測結果も全領域で実験と良好に一致する。

5. おわりに

本稿では、流体応力の非等方性の記述と離散化に伴う運動量の保存性の 2 つの点から、ISPH 法における粒子間相互作用モデルに内包される問題点をできる限り簡便に修正するためのモデルの改良について考察し、

CISP 法を提案し、巻き波型砕波における splash-up に適用した。CISP 法は大曲率・薄層の jet の伸長過程を良好に再現し、従来の粒子法に見られた水塊分裂の早期活発化を抑制して、水塊の巻き込み過程に対しても安定して機能した。

参考文献

- 渡部靖憲・佐伯 浩 (1996) : 砕波帯内の流速場のダイレクトシミュレーション, 海岸工学論文集, 第 43 巻, pp. 71-75.
- Bonet, J. and Lok, T. S. (1999) : Variational and momentum preservation aspects of smooth particle hydrodynamic formulation, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* Vol. 180, pp. 97-115.
- Dalrymple, R.A. and Rogers, B.D. (2005) : Numerical modeling of water waves with the SPH method, *Coastal Engineering*, Vol. 53, pp. 141-147.
- Gotoh, H. and Sakai, T. (1999) : Lagrangian simulation of breaking waves using particle method, *Coastal Eng. Jour.*, Vol. 41, Nos. 3 & 4, pp. 303-326.
- Grilli, S.T., Svendsen, I.A. and Subramanya, R. (1997) : Breaking criterion and characteristics for solitary waves on slopes, *J. Waterway Port Coastal and Ocean Engineering*, Vol. 123, No. 3, pp. 102-112.
- Koshizuka, S. and Oka, Y. (1996) : Moving particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 123, pp. 421-434.
- Lachaume, C., Biaisser, B., Grilli, S. T., Fraunie, P. and Guignard, S. (2003) : Modeling of breaking and post-breaking waves on slopes by coupling of BEM and VOF methods, *Proc. 13th Offshore and Polar Engineering Conf., ISOPE03, Honolulu, HI, USA*, pp. 353-359.
- Li, Y. (2000) : Tsunamis: Non-breaking and breaking solitary wave run-up, Rep. KH-R-60, W. M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology.
- Li, Y. and Raichlen, F. (2003) : Energy balance model for breaking solitary wave runup, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, Vol. 129, No. 2, pp. 47-59.
- Lucy, L. B. (1977) : A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *Astron. J.*, Vol. 82, pp. 1013-1024.
- Monaghan, J. J. (1994) : Simulating free surface flows with SPH, *J. Comput. Phys.* Vol. 110, pp. 399-406.
- Monaghan, J. J. and Kos, A. (1999) : Solitary waves on a Cretan beach, *J. Waterways Port Coastal Ocean Eng.* Vol. 125, No. 3, pp. 145-154.
- Shao, S. D. and Lo, E. Y. M. (2003) : Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface, *Advanced Water Resources*, Vol. 26, No. 7, pp. 787-800.
- Shao, S. D. and Gotoh, H. (2004) : Simulation coupled motion of progressive wave and floating curtain wall by SPH-LES model, *Coastal Eng. Jour., JSCE*, Vol. 46, No. 2, pp. 171-202.
- Shao, S.D. (2006) : Simulation of breaking wave by SPH method coupled with $k-\epsilon$ model, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 44, No. 3, pp. 338-349.
- Yabe, T., Ishikawa, T., Wang, P. Y., Aoki, T., Kadota, Y. and Ikeda, F. (1991) : A Universal Solver for Hyperbolic Equations by Cubic-Polynomial Interpolation - II. Two- and Three- Dimensional Solvers, 66, pp. 233-242.