

渦度を考慮した非線形波動方程式による表面波及び内部波の数値解析

Numerical Simulation of Surface and Internal Waves using a Set of Nonlinear Equations with Vorticity

柿沼太郎¹・中山恵介²

Taro KAKINUMA and Keisuke NAKAYAMA

A functional for variational problems of multilayer-fluid systems with vorticity was presented, after which a set of nonlinear equations were derived to simulate surface and internal waves considering both strong nonlinearity and strong dispersivity of waves. The linear dispersion relations for surface and internal waves were shown also for deep-wave conditions. Stable results of surface waves propagating over a submerged breakwater, as well as internal waves reciprocating inside a closed tank, were obtained using the numerical model, where two-layer stratification was treated below a fixed horizontal plate. The internal waves resulted by the present model had a different period from that through a Boussinesq-type model. The surface waves over a slope steepened further due to the assumed vorticity effect.

1. 序 論

非線形性を考慮した水面波動の解析において, Boussinesq 型方程式を基礎方程式とする数値モデルが広く用いられるようになった. 鉛直積分された方程式系の取り扱いが比較的容易であるという特徴を活かしながら, 高精度な数値解法の開発, 碎波モデルの導入や, 適用水深の拡張といった様々な工夫が積み重ねられ, 各数値モデルの解の特性や精度の検証が行なわれて, こうした汎用性が獲得されたのである. このうち, Boussinesq 型方程式の適用水域の拡張に関して, 例えば, Madsen ら (1991) では, 補正項を導入することによって, より深い水域に適用範囲が広げられ, また, これを基礎方程式とする NOWT-PARI (平山・平石, 2005) では, 透水層内の運動を考慮することによって任意反射境界を扱うことができるように, そして, 遡上域における波の挙動も解析することができるように, 改良がなされている.

しかしながら, 浅水波を核とする摂動展開が, 導出過程において Boussinesq 型方程式に掛けた足かせは, これを外し去ることが難しく, NOWT-PARI は, 水深波長比 $h/L < 0.6$ 程度の水域がその実用上の適用範囲とされている. また, 波形勾配の大きく成長した波浪場や, 水深の変化や複雑な流況に左右されながら重合及び分裂する波動場を対象とするときのように, 波の非線形性と分散性の均衡を高精度に再現することが要求される場合, そして, 波の伝播において, 高次の非線形相互作用が現れるような場合には, 解析者は, 基礎方程式系に課された弱非線形の仮定に不満を抱くことになる.

こうした, 従来の鉛直積分方程式に伴う適用性の不

備を解消すべく, 灘岡・中川 (1993), 磯部 (1994) 並びに後野 (1994) は, それぞれ, 摂動展開を用いることなく非線形方程式を導出した. これらを基礎方程式とする解析では, 流速, 速度ポテンシャルや変動圧力といった物理量が, 有限個の成分の物理量の重み付き級数で表わされ, それらの重みが, 連成振動問題の解として求められる. 従って, ある核の周りの現象に解析対象を限定することなく, 任意の次数を持つ成分間の干渉を考慮することが可能となる. 水の波の方程式は, 水面と底面における境界条件を考慮して, その間の領域にわたる鉛直積分を行なう結果得られる. そのため, 各成分の物理量は, 鉛直分布形を与えた鉛直分布関数とそれらの重み係数の積の和によって記述しておく. 適切な形の鉛直分布関数を十分な個数用意すれば, 理論上, 完全流体の水面波動が有する任意の非線形性・分散性を考慮できるのである. 今後, 計算機の発達につれ, こうした方程式系の特性及び解法に関する考察が, 重要な意味を持つことになる.

ところで, 水域に密度成層が存在する場合, 物質やエネルギーの輸送に対して, 水面波のみならず内部波が大きな役割を演ずる. そこで, 柿沼 (2000) は, 密度界面における境界条件を考慮した, 内部波解析のための汎関数を提案し, 各層内で鉛直積分を解析的に行なうことにより, 表面波・内部波の非線形方程式を導出した. 高次の効果に関して未解明な点の多い内部波を考慮し, 更に, 境界層や碎波帯の内部で, また, 複雑な地形や流れの作用を受けて生成される渦度についても言及できるよう, 本研究では, ポテンシャル場に対して導かれた柿沼 (2000) の方程式を渦度場にも適用できるよう拡張する. そして, 表面波及び内部波を対象として, それらの高次の効果も考慮した数値解析を行なう.

1 正会員 博(工) 鹿児島大学准教授 工学部海洋土木工学科

2 正会員 博(工) 北見工業大学教授 工学部土木開発工学科

2. 渦度を考慮した非線形内部波方程式系の導出

多層流体を考える．密度 ρ_i が一様かつ一定である第 i 層内の水平流速及び鉛直流速を速度ポテンシャルからのずれの成分を考慮して，それぞれ， $u_i = \nabla\phi_i + \mu_i \nabla v_i$ 及び $w_i = \partial\phi_i/\partial z + \mu_i \partial v_i/\partial z$ と表わす．ここで， $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は，水平方向の微分演算子である．

第 i 層の下面及び上面の位置をそれぞれ $z = \eta_{i,0}$ 及び $z = \eta_{i,1}$ と書く．Luke (1967) の汎関数を柿沼 (2000) と同様に多層流体に拡張することにより，変分問題の汎関数として次式を得る．

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i[\phi_i, \mu_i, v_i, \eta_{i,j}] \\ = \int_{t_0}^{t_1} \iint_A \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} \left\{ \frac{\partial\phi_i}{\partial t} + \mu_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\phi_i + \mu_i \nabla v_i)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial z} + \mu_i \frac{\partial v_i}{\partial z} \right)^2 + gz + \frac{p_{i-j} + P_i}{\rho_i} \right\} dz \, dA \, dt \quad (1) \end{aligned}$$

ここで， g は，重力加速度であり， p_{i-j} は，界面における圧力である．

鉛直分布関数に z のべき乗を選択し， $\phi_i \equiv f_{i,\alpha} z^\alpha$ ， $\mu_i \equiv m_{i,\alpha} z^\alpha$ 及び $v_i \equiv n_{i,\alpha} z^\alpha$ とする．そして，界面変動 $\eta_{i,j}$ のべき乗を含む次式のような関数 Q_i ， R_i 及び $S_{i,j}$ を導入する．

$$Q_i[\alpha] = \frac{1}{\alpha+1} \{ \eta_{i,1}^{\alpha+1} - \eta_{i,0}^{\alpha+1} \} \quad (2)$$

$$R_i[\alpha, \beta, \gamma] = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+\gamma-1} \{ \eta_{i,1}^{\alpha+\beta+\gamma-1} - \eta_{i,0}^{\alpha+\beta+\gamma-1} \} & (\alpha\beta \neq 0) \\ 0 & (\alpha\beta = 0) \end{cases} \quad (3)$$

$$S_{i,j}[\alpha, \beta, \gamma] = \begin{cases} \alpha\beta\eta_{i,1}^{\alpha+\beta+\gamma-2} & (\alpha\beta \neq 0) \\ 0 & (\alpha\beta = 0) \end{cases} \quad (4)$$

すると，Euler-Lagrange 方程式として，渦度を考慮した表面波及び内部波の非線形方程式系が式 (5)～(8) のように得られる．

$$\begin{aligned} \eta_{i,1}^\alpha \frac{\partial\eta_{i,1}}{\partial t} - \eta_{i,0}^\alpha \frac{\partial\eta_{i,0}}{\partial t} + \nabla(Q_i[\alpha+\beta] \nabla f_{i,\beta}) \\ - R_i[\alpha, \beta] + \nabla(Q_i[\alpha+\beta+\gamma] m_{i,\beta} \nabla n_{i,\gamma}) \\ - R_i[\alpha, \gamma, \beta] m_{i,\beta} n_{i,\gamma} = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_i[\alpha+\beta] \frac{\partial m_{i,\beta}}{\partial t} + \eta_{i,1}^{\alpha+\beta} m_{i,\beta} \frac{\partial\eta_{i,1}}{\partial t} \\ + \nabla(Q_i[\alpha+\beta+\gamma] \nabla f_{i,\beta} \cdot m_{i,\gamma}) - R_i[\beta, \gamma, \alpha] f_{i,\beta} m_{i,\gamma} \\ + \nabla(Q_i[\alpha+\beta+\gamma+\delta] m_{i,\beta} \cdot m_{i,\gamma} \nabla n_{i,\delta}) \\ - R_i[\alpha, \delta, \beta+\gamma] m_{i,\beta} m_{i,\gamma} n_{i,\delta} = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_i[\alpha+\beta] \frac{\partial n_{i,\beta}}{\partial t} + Q_i[\alpha+\beta+\gamma] \nabla f_{i,\beta} n_{i,\gamma} \\ + R_i[\beta, \gamma, \alpha] f_{i,\beta} n_{i,\gamma} \\ + Q_i[\alpha+\beta+\gamma+\delta] m_{i,\beta} \nabla n_{i,\gamma} \nabla n_{i,\delta} \\ + R_i[\gamma, \delta, \alpha+\beta] m_{i,\beta} n_{i,\gamma} n_{i,\delta} = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{i,1}^\beta \frac{\partial f_{i,\beta}}{\partial t} + \eta_{i,1}^{\beta+\gamma} m_{i,\beta} \frac{\partial n_{i,\gamma}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta_{i,1}^{\beta+\gamma} \nabla f_{i,\beta} \nabla f_{i,\gamma} \\ + \frac{1}{2} S_{i,j}[\beta, \gamma, 0] f_{i,\beta} f_{i,\gamma} + \eta_{i,1}^{\beta+\gamma+\delta} \nabla f_{i,\beta} \cdot m_{i,\gamma} \nabla n_{i,\delta} \\ + S_{i,j}[\beta, \delta, \gamma] f_{i,\beta} m_{i,\gamma} n_{i,\delta} \\ + \frac{1}{2} \eta_{i,1}^{\beta+\gamma+\delta+\epsilon} m_{i,\beta} m_{i,\gamma} \nabla n_{i,\delta} \nabla n_{i,\epsilon} \\ + \frac{1}{2} S_{i,j}[\delta, \epsilon, \beta+\gamma] m_{i,\beta} m_{i,\gamma} n_{i,\delta} n_{i,\epsilon} + g \eta_{i,j} \\ + (p_{i-j} + P_i)/\rho_i = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

3. 数値解析手法の特徴

固定された水平板に最上面が接する 2 層問題を対象として，差分法を用いた数値モデルを開発した (Nakayama・Kakinuma, 2007)．行列の対角上に 0 値をとらない係数を置く工夫のため，pivot をすることなく安定した計算を進めること可能である．また，行列を格子点毎に解くため，鉛直分布関数の総数を大きく設定しても，計算が比較的経済的になる．

なお，内部波を考慮せず，表面波のみの解析を行なう際には，上層の流体の密度が下層よりも極めて軽いと仮定する．そして，2 層問題の場合と同一の数値解析手法を用いる．本論文での表面波のみを対象とした解析では， $\rho_2/\rho_1=1,000$ とし，上・下層の静水深比を $h_1/h_2=2.0$ とした．

4. 表面波の数値解析

(1) 表面波の線形分散関係

図-1 は，表面波に対して，式 (5) 及び (8) より導かれる線形の分散関係 (Nakayama・Kakinuma, 2007) を描いたものである．ここで，各曲線は，採用する鉛直分布関数の総数 N 毎に描かれており，プロットが線形解析解である．また，縦軸には，表面波の波速と長波の波速との比である c/c_0 が，他方，横軸には，代表波長を L とし，静水深を h として，無次元角周波数を表わす $\omega = (2\pi h/L)(c/c_0)$ がとられている．

図-1 より，本方程式系は，採用する鉛直分布関数の総数を $N=3$ とすると $\omega=1.5$ の深海波に対しても，また， $N=6$ とすると $\omega=4.0$ の深海波に対しても，高精度の線形分散関係を示すことがわかる．

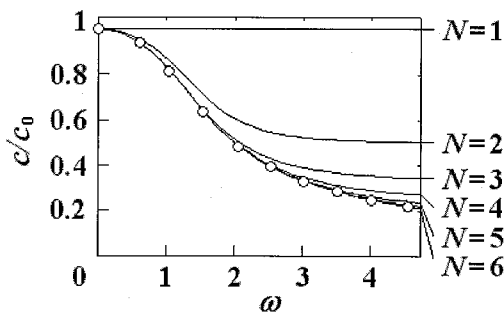


図-1 表面波の線形分散関係 (c/c_0 は、波速と長波の波速との比である。また、 L を代表波長として、 $\omega = (2\pi h/L)(c/c_0)$ は、無次元角周波数を表す。)

(2) 潜堤上を進行する表面波の数値解析

図-2 は、潜堤上を進行する表面波を対象として、Beji ら (1992) によって得られた水面変動 ζ の実験結果と、本研究の数値モデルによる計算結果とを比較したものである。ここで、入射波の周期 T 及び波高 H が、それぞれ、 $T=2.0$ s 及び $H=0.02$ m の場合の、St. 5 及び 7 における結果が示されている。プロットが実験結果を示し、曲線が計算結果を示す。

数値解析において、鉛直分布関数の総数を $N=3$ としたが、安定した解が得られている。特に、St. 5 では、高精度の再現性が確かめられる。

また、図-3 は、同様に潜堤上を進行する表面波を対象として、大山ら (1993) によって得られた水面変動 ζ の実験結果と、本研究の数値モデルによる計算結果とを比較したものである。ここで、潜堤周辺の静水深を h として、入射波の周期 T 及び波高 H が、それぞれ、 $T\sqrt{g/h}=8.91$ 及び $H/h=0.1$ の場合の、St. 3 における結果が示されている。プロット (●) が実験結果を示し、各曲線が、鉛直分布関数の総数を $N=1 \sim 4$ とした場合

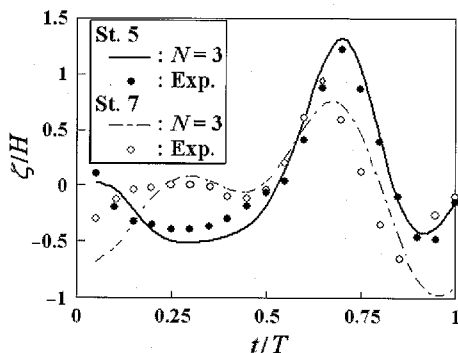


図-2 鉛直分布関数の総数を $N=3$ としたときの水面変動 ζ の計算値と実験値との比較 (実験値は、Beji ら (1992) による。入射波の周期及び波高が、それぞれ、 $T=2.0$ s 及び $H=0.02$ m の場合の、St. 5 及び 7 における結果を示す。)

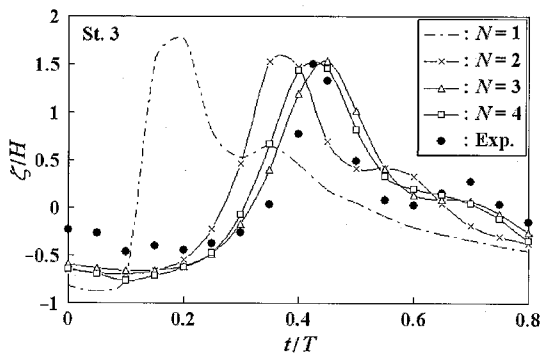


図-3 水面変動 ζ の計算値と実験値との比較 (実験値は、大山ら (1993) による。潜堤周辺の静水深を h として、入射波の周期及び波高がそれぞれ $T\sqrt{g/h}=8.91$ 及び $H/h=0.1$ の場合の St. 3 における結果を示す。)

の計算結果を示す。

本研究の数値モデルによって、安定した高次の解が得られている。また、本モデルは、鉛直分布関数の総数を $N=3$ 、または、4 とした場合、ピークに見られる $\zeta/H \approx 1.50$ の値を大山ら (1993) に示された弱非線形モデルの解 (ピーク値約 1.03)、そして、磯部 (1994) による強非線形モデルの解 (ピーク値約 1.25) よりも正確に再現している。この理由として、本数値解析において、底面の境界条件を水面と同一の精度で扱い、斜面に沿う流速も考慮していることが挙げられる。鉛直分布関数の総数を N とした場合、底面上も含めて鉛直流速 w_i は、水面変動の $(N-2)$ 次の効果まで考慮される。

5. 内部波の数値解析

(1) 内部波の線形分散関係

図-4 は、内部波に対して、式 (5) 及び (8) より導かれる線形の分散関係 (Nakayama・Kakinuma, 2007) を描いたものである。ここで、解析条件として、上・下層の流体の密度比及び静水深比は、それぞれ、 $\rho_1/\rho_2=0.99$ 及び $h_1/h_2=1.0$ としている。上層と下層の両者の流体に対して、等しい総数の鉛直分布関数を用いており、図-4 の各曲線は、採用する鉛直分布関数の、1 層当たりの総数 N 毎に描かれている。また、プロットは、線形解析解を示している。縦軸には、内部波モードの波速と内部波モードの長波の波速との比である c/c_0 がとられ、他方、横軸には、内部波の代表波長を L として、無次元角周波数を表わす $\omega = (2\pi h_2/L)(c/c_0)$ がとられている。

図-4 より、この場合、本方程式系は、図-1 の表面波の場合と同様に、採用する鉛直分布関数の総数を $N=3$ とすると $\omega=1.5$ の深海波に対しても、また、 $N=6$ とすると $\omega=4.0$ の深海波に対しても、高精度の分散関係を示すことがわかる。

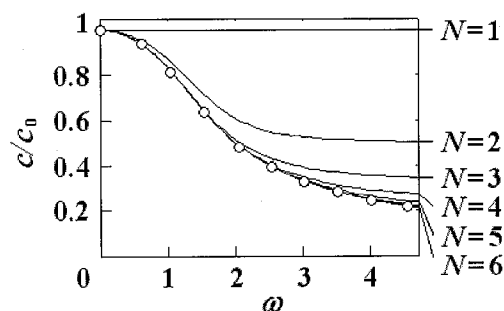


図-4 内部波の線形分散関係(上・下層の流体の密度比及び静水深比は、それぞれ、 $\rho_1/\rho_2=0.99$ 及び $h_1/h_2=1.0$ である。 c/c_0 は、内部波モードの波速と内部波モードの長波の波速との比である。また、 L を内部波の代表波長として、 $\omega=(2\pi h_2/L)(c/c_0)$ は、無次元角周波数を表す。)

(2) 水槽内を往復する内部波の数値解析

ここでは、2層流体で満たされた、閉じた直方体の水槽内を往復する内部波を対象とする。すなわち、傾けられた水槽が、時刻 $t=0$ において速やかに水平に戻されると、水平から角度 θ だけ傾斜した内部界面が作られ、これを初期状態とする内部波が伝播し、前後の壁で反射しながら、水槽内を往復する場合である(Hornら, 2000)。

図-5に、上から順に、Hornら(2000)の地点Cにおける界面変動の実験値、Boussinesq型の内部波方程式(Kakinuma・Nakayama, 2007)による計算値及び本研究の数値モデルによる計算値を示す。両者の計算値は、摩擦及び粘性が考慮されていないため実験値よりも大きな変動を示すが、周期が実験値と調和している。なお、この場合の水深波長比 h_2/L は、約0.06である。

図-6に、図-5の場合よりも相対的に深い条件下で発生する内部波の界面変動を示す。水深波長比 h_2/L は、本研究の数値モデルの結果より、約0.3である。この場合、本研究の数値モデルによる結果は、Boussinesq型方程式に基づく結果と、周期においても大きく異なる。図-7に、時刻 $t=20$ sにおける最大内部波峰下の水平流速の鉛直分布の、本数値モデルによる結果を示す。界面と底面における流速の差は、鉛直分布関数の総数を $N=4$ とした場合、底面流速の約5%に過ぎないが、この差異が、内部波の波形に現れる分散性を正確に表わすために有為である。このような相対的に深い場合についても水理実験を行ない、各モデルの計算値と比較・検討したい。

6. 渦度を考慮した表面波の数値解析

上記の解析で無視した渦度を考慮して、表面波の数値解析を試みる。岡安ら(1989)が一樣斜面上を進行する表面波の水理実験で与えた実験条件を対象とする。

簡単のため、鉛直分布関数の総数は、ポテンシャル成

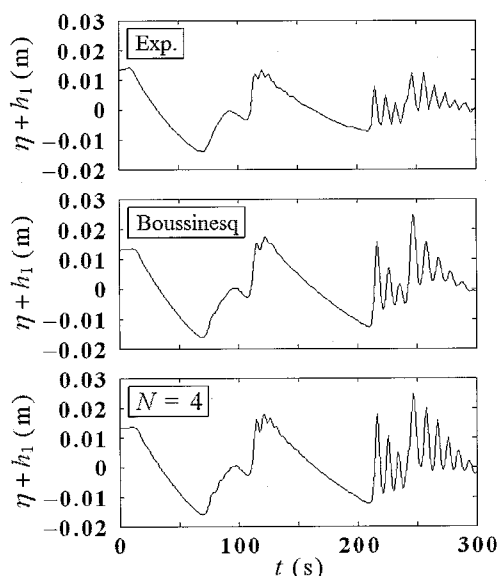


図-5 界面変動の計算結果の実験結果との比較(水槽の長さ及び深さは、それぞれ、 $L=6.0$ m及び $D=0.29$ mである。また、 $\rho_2/\rho_1=1.019$ であり、初期状態において、 $h_1/D=0.8$ 及び $\theta=0.4617^\circ$ である。)

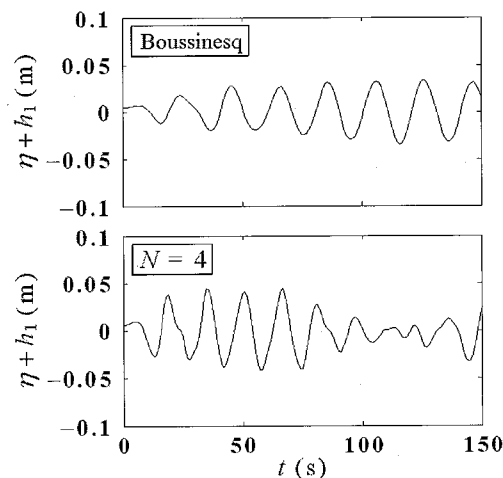


図-6 水槽中央における界面変動の計算結果の比較(水槽の長さ及び深さは、それぞれ、 $L=3.0$ m及び $D=1.5$ mである。また、 $\rho_2/\rho_1=1.02$ であり、初期状態において、 $h_1/D=0.8$ 及び $\theta=5.0^\circ$ である。)

分及び渦度に関する成分の両者に対して、分散効果が考慮される最低数の $N=2$ とする。本論文の解析では、渦度に関する流速成分の水深平均値が各層内で0であると仮定し、 μ_i 及び v_i を次式のように定める。

$$\mu_i = (\eta_{i,0} + \eta_{i,1})/2 \text{ and } v_i = G_i + z \dots \dots \dots (9)$$

すると、解くべき方程式は、式(5)及び(8)のみとなる。

$$G_1=0 \text{ とし、 } G_2=0(0 \leq x < 4 \text{ m}), \quad G_2=(G_s/0.3) \cdot (x-4)$$

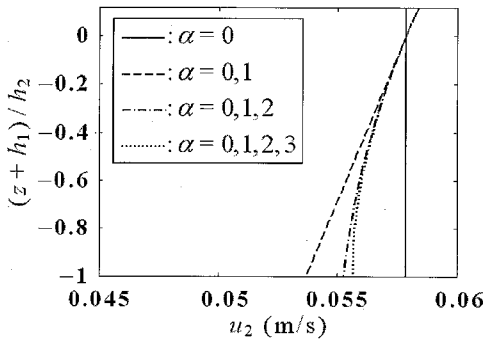


図-7 図-6 の場合の $N=4$ としたときの最大内部波峰下における下層内の水平流速 u_2 の鉛直分布の計算結果 (各線は, $\alpha=0$ の成分から, $\alpha=0, 1, 2$, または, 3 の成分までの流速を足し合わせた値を示す。例えば, $\alpha=0.1$ の線は, 鉛直分布関数の項数を $N=4$ として得られた流速成分のうち, $\alpha=0$ 及び 1 の流速成分のみを加えた値を示す。)

($4\text{m} \leq x < 4.3\text{m}$) 及び $G_2 = G_s$ ($x \geq 4.3\text{m}$) として, 碎波帯内で安定した数値解が得られる最大値 $G_s = 10$ を与えて渦度を生成させた。水面波形の計算結果を図-8 に示す。ここで, 一樣勾配斜面が $3\text{m} \leq x < 6\text{m}$ にあり, 数値解析では, $x \geq 6.5\text{m}$ に一樣静水深領域を設けた。式(9)によって渦度成分を考慮すると, 波の前傾化と成長が促進され, 渦度を考慮しない場合に比べて, 時刻 $t=5.7\text{s}$ におけるように, 波形が尖り, 最大波高が大きくなる。また, 時刻 $t=7.5\text{s}$ では, 渦度を考慮した場合, 渦度を考慮しない場合よりも波の分裂が顕著に見られ, 2次波が成長している。

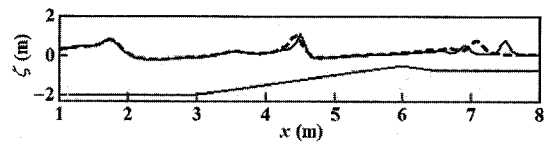
7. 結 論

渦度を考慮した内部波解析のための汎関数を提案し, 非線形波動方程式を導出した。与えた条件に対し, 表面波・内部波共に, 高次の安定した解が算出された。

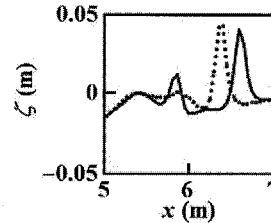
線形分散関係は, 鉛直分布関数の総数を $N > 3$ として, $\omega \sim 1.5$ の深海波に適合した。底面上も含めて鉛直流速を水面変動の $(N-2)$ 次の効果まで考慮するため, 潜堤上で, 既存の計算結果よりも正確な水面変動のピーク値が得られた。相対的に深い水槽内の内部波に対し, Boussinesq 型方程式に基づく結果と異なる周期を有する界面変動が得られた。また, 渦度に関する流速成分の水深平均値を 0 と仮定して渦度を考慮した場合, 斜面上における表面波形の先鋭化及び 2 次波の成長がより顕著に見られた。

今後, 渦度の生成項を考慮して渦度の変遷を解析し, 波・流れ場におけるエネルギーの遷移過程に対して, 渦度成分がどのように関与しているのかを調べたい。

謝辞: 北見工業大学大学院の堀松大志君には, 当初 Matlab で作成していたプログラムを C 言語に翻訳し, 計算時間の短縮に一役かっていた。



(a) 時刻 $t=5.7\text{s}$ における水面変動



(b) 時刻 $t=7.5\text{s}$ における水面変動

図-8 $N=2$ としたときの水面変動 ζ の計算結果 (岡安ら (1989) の, 入射波の周期及び波高が, それぞれ, $T=2.0\text{s}$ 及び $H=0.085\text{m}$ の場合の実験条件に対する水面波形の計算結果を示す。実線が渦度を考慮した場合の, 破線が渦度を考慮しない場合の結果である。)

参 考 文 献

- 磯部雅彦(1994): 非線形緩勾配波動方程式の提案, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 1-5.
- 大山 巧・喜岡 渉・多田彰秀(1993): 非線形分散波動場に対する数値モデルの適用性について, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 11-15.
- 岡安章夫・磯部雅彦・渡辺 晃(1989): 碎波帯におけるエネルギー収支と流れのモデリング, 海岸工学論文集, 第36巻, pp. 31-35.
- 柿沼太郎(2000): 非線形緩勾配方程式の内部波への拡張, 海岸工学論文集, 第47巻, pp. 1-5.
- 灘岡和夫・中川康之(1993): 新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動場解析の試み, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 6-10.
- 後野正雄(1994): 強非線形平面不規則波動場に対する連成振動方程式とその基礎的特性, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 16-20.
- 平山克也・平石哲也(2005): 平面2次元ブシネスクモデルによる碎波・遡上計算法の開発と現地適用, 海岸工学論文集, 第52巻, pp. 11-15.
- Beji, S., T. Ohyama, A. Battjes and K. Nadaoka(1992): Transformation of nonbreaking waves over a bar, Proc. 23rd Int. Conf. on Coastal Eng., pp. 51-61.
- Horn, D. A., L. G. Redekopp, J. Imberger and G. N. Ivey (2000): Internal wave evolution in a space-time varying field, J. Fluid Mech., Vol. 424, pp. 279-301.
- Kakinuma, T. and K. Nakayama (2007): Numerical simulation of internal waves using a set of fully nonlinear internal-wave equations, Annual J. Hydraulic Eng., JSCE, Vol. 51, CD-ROM.
- Luke, J. C.(1967): A variational principle for a fluid with a free surface, J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 395-397.
- Madsen, P. A., R. Murray and O. R. Sorensen(1991): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Coastal Eng., Vol. 15, pp. 371-381.
- Nakayama, K. and T. Kakinuma (2007): Internal waves in a two-layer system using fully nonlinear internal-wave equations, Int. J. Numer. Meth. Fluids.(submitted)