

3 次元乱流場における固体粒子の沈降速度の数値実験

川西 澄¹・塩崎遼平²

乱流が固体粒子の沈降速度に及ぼす影響を明らかにするため, 数値的に発生させた 3 次元乱流場を用いて数値実験を行った。乱流中の浮遊固体粒子の平均沈降速度は, 相対乱流強度と Stokes 数によって規定されることが明らかとなった。数値実験の結果は格子乱流・開水路乱流中における実験結果を再現した。Stokes 数が約 2×10^{-6} 以下の場合, 乱流中では相対乱流強度に関わらず, 平均沈降速度は静水中より大きく, 乱流強度とともに増加した。Stokes 数が大きい場合, 乱流強度とともに平均沈降速度は一旦減少した後増加に転じた。Stokes 数が大きいほど, 平均沈降速度が減少から増加に転じる時の相対乱流強度は大きくなった。

1. はじめに

乱流中における浮遊粒子の平均的な沈降速度や上昇速度が静水中の沈降速度 w_0 と異なることは古くから知られている。場合によっては, 乱流中の平均沈降速度は w_0 から大きく異なり, 例えば, Murray (1970) は $0.4 \sim 4.5 w_0$ の結果を得ている。また, Jobson ら (1970) は開水路において流れの水面から粒子を投入し, 粒子の到達距離を測定した。その結果, 粒径が 0.123 mm と 0.39 mm の粒子において, それぞれ $40 \sim 65\%$ と $3 \sim 6\%$ 沈降速度が増加する結果を得ている。

しかし, 実験条件の違いや測定精度の問題などにより得られているデータにはかなり差がある上に, データ量も限られている。浮遊粒子状物質の輸送は広範な科学・工学上の問題に関連して重要であるが, 平均沈降速度に関する正確な知識がなくては, 流体内の粒子状物質の輸送量評価の精度を上げることは出来ない。従来の研究により, 浮遊粒子の沈降速度を変化させるメカニズムには平均沈降速度を増加させるものと減少させるものがあることがわかっている。

減速させる主なメカニズムは Tooby ら (1977) によって示された vortex trapping である。彼らは水平回転軸を持つ強制渦が, 気泡と比重が 1 より大きな重い粒子をトラップすることを実験的に示した。図-1(a)に示すように, 沈降速度 w_0 を持つ粒子は強制渦の中で $(-w_0/\omega, 0)$ 中心とした円軌道を描く。このメカニズムは強制渦に限らず Rankin 渦や非回転渦でも起こる (Nielsen, 1992)。粒子に働く非線形な抵抗も平均沈降速度を減少させるが, その効果は小さいことが示されている (Nielsen, 1993)。

一方, 沈降速度を増加させるメカニズムとして考えられているのは, Trajectory biasing (preferential sweep-

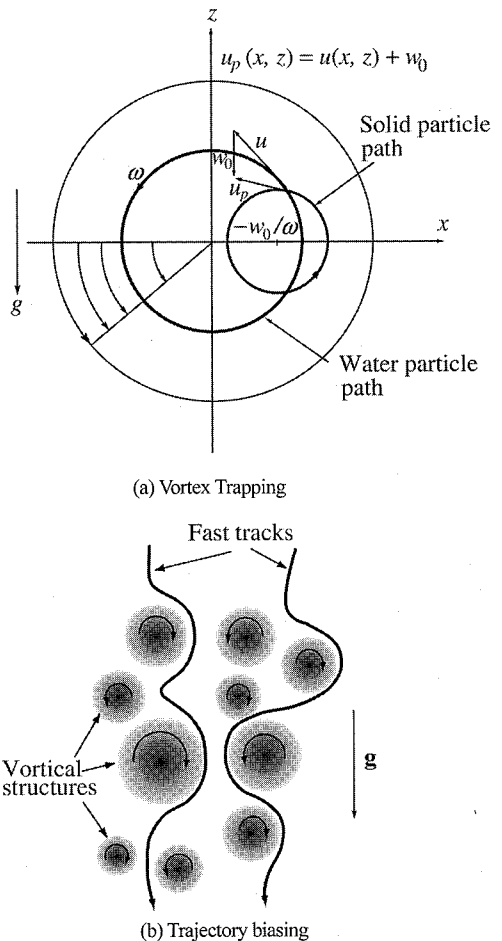


図-1 平均沈降速度を変化させるメカニズム

ing, fast tracking)と呼ばれるものである。粒子の密度が流体の密度より大きい場合, 流体の圧力勾配より粒子に働く遠心力が勝るため, 図-1(b)に示すように, 粒子が渦構造によって作られる下降流領域の渦構造縁部に集まり, 平均沈降速度が増加する。Friedman and Katz (2002) は比重が 1 よりわずかに小さなディーゼル油の

液滴でさえ、このメカニズムによって液滴の上昇速度が大きくなると述べている。

浮遊粒子が下降流領域の渦構造縁辺部に集まることは、Wang and Maxey (1993) による数値実験や川西ら (2005) による開水路実験でも確認されている。

本研究では Reynolds 数の制限を受けない Kraichnan (1970) の Kinematic Simulation を使って発生させた乱流場で粒子の運動を調べ、平均沈降速度に対する乱流の効果を考察する。

2. 方 法

(1) 浮遊粒子の運動

本研究では粒子間の相互作用と Basset 項、粒子の回転の効果を無視した。球形固体粒子の運動方程式として次式を用いた。

$$\left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = (s-1)\mathbf{g} + \frac{3}{2} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}) \times \boldsymbol{\Omega} - \frac{3}{2} \frac{C_D}{d_p} |\mathbf{u}_p - \mathbf{u}| (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{u}_p(t)$ と $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)$ は粒子と流体の速度ベクトル、 $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}(t), t)$ は粒子の中心位置での渦度ベクトル、 s と d_p は粒子の比重と粒径、 C_D は抗力係数である。球形固体粒子の抗力係数には次式の近似式を用いた (White, 1991)。

$$C_D = 0.4 + \frac{24}{\text{Re}_p} + \frac{6}{1 + \sqrt{\text{Re}_p}} \quad (2)$$

$$\text{Re}_p = \frac{|\mathbf{u}_p| d_p}{\nu} \quad (3)$$

粒子の運動を特徴づける無次元量を求めるために、粒子と流体の無次元化速度を静水中の沈降速度 w_0 と流体の乱れ速度 σ_f を使って、 $\mathbf{u}^*_p = \mathbf{u}_p/w_0$ と $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}/\sigma_f$ と定義し、粒子の時間スケールとして Stokes の応答時間 τ_p 、流体の時間スケールとして乱流渦の長さスケール l_e と σ_f から求める特性時間 l_e/σ_f を用いて (1) 式の運動方程式を無次元化すると、

$$\mathbf{u}^*_p = f\left(\frac{\sigma_f}{w_0}, \text{St}, \frac{d_p}{l_e}, \text{Re}_p\right) \quad (4)$$

となる。ここで、St は Stokes 数で、 $\text{St} = \tau_p/(l_e/\sigma_f)$ である。Stokes の応答時間 τ_p は自由落下粒子が終末速度 w_0 に達するまでに要する時間スケールで

$$\tau_p = \frac{\rho_p}{\rho_p - \rho_f} \frac{w_0}{g} \quad (5)$$

と定義される。Stokes 則から求める w_0 を代入すると、

$$\tau_p = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu} = \frac{s d_p^2}{18\nu} \quad (6)$$

となる。ここで、 s は粒子の比重である。本研究では $d \ll l_e$ の粒子を考えているので粒子の運動に対する d/l_e

の依存性は無視でき、3つの無次元数 (σ_f/w_0 , St, Re_p) が $\mathbf{u}^*_p$ に対する支配パラメータであると考えられる。

(2) 数値シミュレーションの概要

Kraichnan (1970) の Kinematic Simulation (KS) を使って発生させた一様等方性乱流場の中で式 (1) の運動方程式を積分して粒子の速度を求め、粒子の平均沈降速度に対する乱流の効果を調べた。KS に従い一様等方性乱流場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ は以下のように生成した。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N [\tilde{\mathbf{a}}_n \cos(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} + \omega_n \cdot t) + \tilde{\mathbf{b}}_n \sin(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} + \omega_n \cdot t)] \quad (7)$$

ここで $\tilde{\mathbf{a}}_n$ と $\tilde{\mathbf{b}}_n$ は、連続条件 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ を満足するよう

$$\tilde{\mathbf{a}}_n = \mathbf{a}_n \times \frac{\mathbf{k}_n}{|\mathbf{k}_n|}, \quad \tilde{\mathbf{b}}_n = \mathbf{b}_n \times \frac{\mathbf{k}_n}{|\mathbf{k}_n|} \quad (8)$$

で求めた。モード数 N は 200 程度とした。ランダム波数ベクトル $\mathbf{k}_n$ は Fung ら (1992) による方法を使って選んだ。各波数ベクトルの方向は一様乱数であり、単位長さのランダムベクトル (x, y, z) は次のようにして生成した。座標 z と角度 θ を範囲 $[-1, 1]$ と $[0, 2\pi]$ の一様乱数から選び、座標 x と y は $x = \sqrt{1-z^2} \cos \theta$, $y = \sqrt{1-z^2} \sin \theta$ から求めた。各ベクトル長 $\mathbf{k}_n = |\mathbf{k}|_n$ は次式を使ってエネルギースペクトル $E(k)$ から求める。

$$\int_0^{k_n} E(k) dk = \frac{3}{2} \left(n - \frac{1}{2}\right) u_0^2 / N \quad (9)$$

N が十分大きければ、

$$\frac{3}{2} u_0^2 = \int_0^\infty E(k) dk \quad (10)$$

の関係を満足する。

互いに独立なランダムベクトル係数 $\mathbf{a}_n$ と $\mathbf{b}_n$ はその方向を一様乱数から、長さを標準偏差

$$|\mathbf{a}_n| = \sqrt{\frac{9}{2} \frac{u_0^2}{N}} \quad (11)$$

のガウス乱数から選んだ。また、周波数 ω_n は標準偏差

$$\sqrt{\omega_n^2} = a_* u_0 k_n \quad (12)$$

のガウス乱数である。

Hunt ら (1987) の結果から $a_* \approx 0.40$ for $kL_{11} \leq 10$, $a_* \approx 0.51$ for $kL_{11} \geq 15$ が知られている。ここで L_{11} は縦方向の積分スケールである。以上のように、KS では空間エネルギースペクトル関数 $E(k)$ のみで乱流場が決定される。本研究では、エネルギースペクトル関数として以下の von Karman-Pao スペクトル関数 (Helland ら, 1977) を用いた。

$$E(k) = \alpha \frac{v^2}{\eta} \left(\frac{L}{\eta}\right)^{\frac{5}{3}} \frac{(kL)^4}{[1 + (kL)^2]^{\frac{17}{6}}} \exp\left[-\frac{3}{2}\beta(k\eta)^{\frac{4}{3}}\right]$$

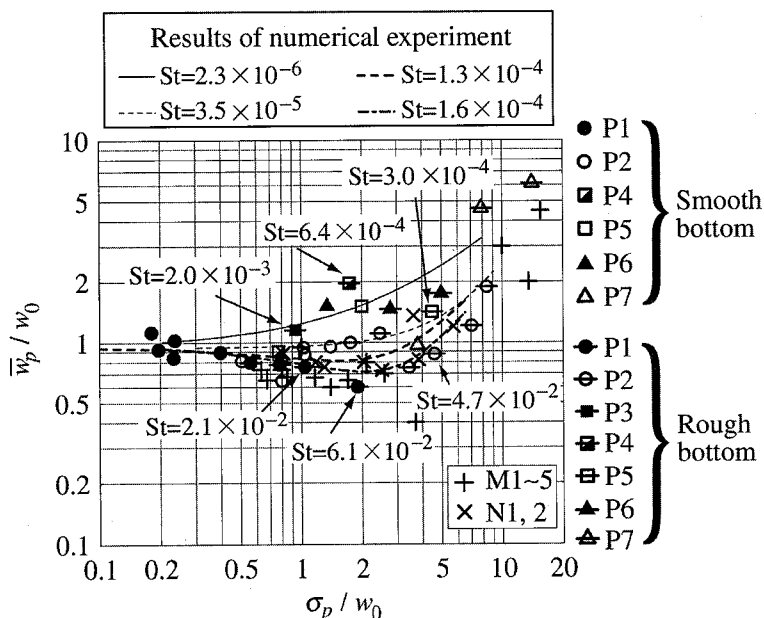


図-2 相対沈降速度と相対乱流強度の関係

表-1 粒子の特性量

	Particle diameter d_p (mm)	Specific density s	Terminal velocity w_0 (mm/s)	Stokes response time τ_p (ms)
P1	0.21	2.65	22.4	6.5
P2	0.5	1.06	5.08	14.7
P3	0.09	3.13	12.7	1.4
P4	0.051	3.13	6.85	0.45
P5	0.035	3.13	2.65	0.21
P6	0.07	2.63	3.93	0.72
P7	0.038	2.63	1.39	0.21
M1	2.0	1.0013	2.0	222
M2	2.0	1.0103	10.0	225
M3	2.0	1.0278	20.0	228
M4	2.0	1.0512	30.0	234
M5	2.0	1.0798	40.0	240
N1	2.0	1.1948	70.0	265
N2	6.1	1.0211	45.0	2111

.....(13)

ここで、 L はエネルギースケール、 η は Kolmogorov の長さスケールである。Reynolds 数が大きいとき α は β と等しくなり、式 (11) を満足するように決めた。エネルギースケール L は $1.2L_{II}$ 、Kolmogorov の長さスケールは次の経験式を用いた (Screenivasan, 1984)。

$$\frac{\eta}{L} \approx 1.0 \left(\frac{u_0 L_{II}}{\nu} \right)^{-\frac{4}{3}} \quad \text{.....(14)}$$

KS で生成された乱流場で式 (1) を数値積分して求められた多数の粒子速度を平均すれば、対象とする粒子の平均沈降速度を求めることが出来る。数値積分には、適応刻み幅制御アルゴリズムを持つ Bulirsch-Stoer 法 (Stoer, J.・Bulirsch, R, 1980) を用い、乱数の生成には L'Ecuyer (1988) の方法を用いた。

3. 結果と考察

(1) 開水路流と格子乱流における実験結果

表-1 に、開水路実験 (川西ら, 2005), Murray (1970) 及び Nielsen (1993) の実験粒子のデータ (以下、それぞれ P1-P7, M1-5, N1-2 と呼ぶ) を示す。P1-P7 を用いた開水路実験は前報で述べた通りであるが、以下にその概要を述べる。実験は長さ 30 m, 幅 0.8 m, 深さ 0.4 m の可変勾配開水路を使用して行い、浮遊粒子の瞬時的な速度の測定には、10 MHz の超音波ドップラー流速計 (以下 ADV) を使用した。ADV のサンプリング領域は長さ 9 mm, 直径 6 mm の円柱であ

る。データのサンプリング間隔は 0.05 s に設定し、水路床 上 60 mm, 水路上流端から 18 m 下流の水路中央部を測定位置とした。粒子の注入には内径 9 mm のビニールチューブを用い、粒子の放出口は ADV のサンプリング領域の 1 m 上流に設置した。水の流速はシーディング粒子 (密度 1.1 g/cm^3 , 粒径 $10 \mu\text{m}$) を沈降実験粒子と同様に注入して測定した。各測定時間は 20 分、サンプリング数は 24,000 である。

M1-5, N1-2 粒子の比重は論文に記載がないので、静水中の沈降速度と粒径から推算したものであり、これ

らの比重を使って算出した Stokes の応答時間を示してある。

図-2 に相対乱流強度 σ_p/w_0 に対する相対沈降速度 $\bar{w}_p/w_0$ の変化を示す。超音波ドップラー流速計 (ADV) で測定した開水路中の沈降速度データ (川西ら, 2005) とともに Murray (1970), Nielsen (1993) らが粒子画像を処理して求めた格子乱流中の測定データが示してある。ただし, Nielsen (1993) の乱流強度は格子速度の振幅である。比較的小さな相対乱流強度域 ($\sigma_p/w_0 < 1$) では粒子の沈降速度は, 静水中と比べ約 20–40% 程度減少する傾向があることがわかる。一方, 相対乱流強度が大きくなる ($5 < \sigma_p/w_0$) と沈降速度は急激に増加する。著者らによる開水路実験では, $\sigma_p/w_0 \approx 15$ で静水中の約 6 倍の沈降速度に達している。中間的な相対乱流強度の領域では, 上記の領域と比べると相対沈降速度は静水中より増加するものと減少するものにわかれている。

Friedman ら (2002) は等方乱流中の油滴 (比重 0.85) の運動を観察し, 中間的な相対乱流強度の領域では, Stokes 数が大きな場合, 油滴の平均上昇速度は静水中より減少するが, Stokes 数が小さな場合は逆に大きくなることを示している。

また, 相対乱流強度が 5 を越えと Stokes 数にかかわらず平均上昇速度は静水中の上昇速度を上回り, 相対乱流強度が十分大きい領域では $\bar{w}_p = 0.25\sigma_f$ の関係を得ている。

図-2 には, 相対乱流強度が同程度で Stokes 数が異なるデータについて Stokes 数 St の値を記入してある。ただし, Stokes 数は乱れの時間スケールとして Taylor の時間スケール $\tau_\lambda = (15\nu\varepsilon)^{1/2}$ を使って $St = \tau_p/\tau_\lambda$ で評価したものである。 ε はエネルギー散逸率である。相対乱流強度が同程度のデータでは, Stokes 数が小さい方が相対沈降速度が増加する傾向にあることが確認できる。Nielsen (1993) による測定データの中で $\sigma_f/w_0 \approx 4$ にある $\bar{w}_p/w_0 < 1$ のデータは N2 粒子 ($\tau_p = 2111$ ms), $\bar{w}_p/w_0 > 1$ のデータは N1 粒子 ($\tau_p = 265$ ms) のものである。乱れの時間スケールは測定されていないが, N2 粒子の方が τ_p が一桁大きいことから, Stokes 数は N2 粒子の方が大きいと考えられる。従って, 開水路データ (川西ら, 2005) や Friedman and Katz (2002) のデータと同様な Stokes 数に対する依存性を示していると考えられる。

(2) 一様等方性乱流における数値実験結果

過去の実験データは乱流場の特性量が不明であるので, 2. (2) で述べた方法により数値シミュレーションを行い, 相対乱流強度とともに Stokes 数の平均沈降速度への影響を調べた。

図-2 に 4 種類の Stokes 数に対して, 相対乱れ強度に対する相対沈降速度の変化を示す。数値実験における

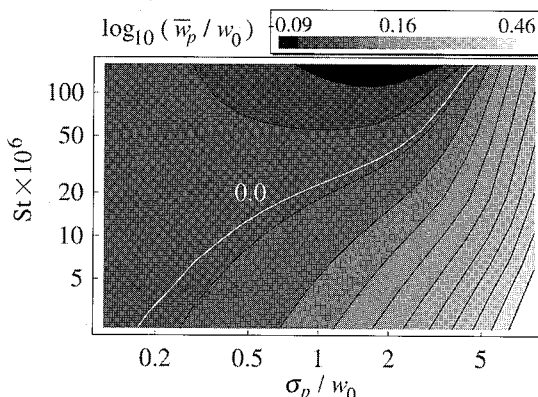


図-3 相対沈降速度と相対乱流強度, St 数の関係

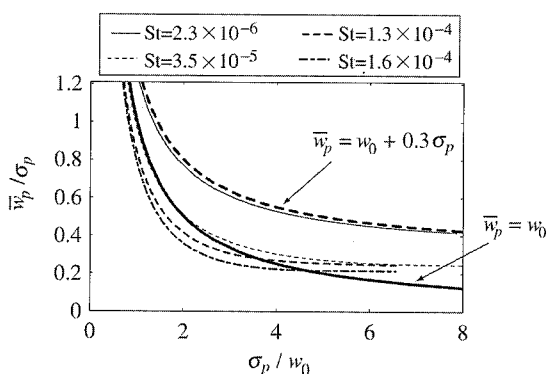


図-4 $\bar{w}_p/\sigma_p$ と σ_p/w_0 の関係

Stokes 数は, 以下の式で求めた。

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_f} = \frac{\tau_p \sqrt{3/2} u_0}{L_{11}} \dots \dots \dots (15)$$

ここで, τ_f は乱れの時間スケールである。開水路実験では前述の通り, Stokes 数は $St = \tau_p/\tau_\lambda$ で求めており, 数値実験とは異なっている。

数値実験の結果は, 開水路および格子乱流における実験結果とよく一致している。最も小さい Stokes 数のケース ($St = 2.3 \times 10^{-6}$) においては相対沈降速度の減少がほとんど見られないが, Stokes 数が増加するにしたがって相対沈降速度は減少する領域ができる傾向が確認できる。

図-3 は数値実験結果をもとに作成した相対乱れ強度と Stokes 数に対する相対沈降速度のコンター図である。白色の等値線は $\bar{w}_p/w_0 = 1$ に対応している。この結果から, 大きな Stokes 数において, 中間的な相対乱流強度では沈降速度は減少することがわかる。数値実験の結果では Stokes 数が 5.0×10^{-5} 以上, σ_p/w_0 が 0.2~5 の範囲で大きな減少が確認できる。 $\sigma_p/w_0 > 5$ のような大き

な相対乱流強度の領域では、平均沈降速度は Stokes 数には依存せず一定の割合で変化する。図-3 から、平均沈降速度が減少から増加に転じる相対乱れ強度は Stokes 数とともに増加し、その変化は $St=2 \times 10^{-5} \sim 5 \times 10^{-5}$ 付近で大きいことが分かる。

図-4 に $\bar{w}_p/\sigma_p$ と σ_p/w_0 の関係を示す。相対乱流強度が小さな領域においては、 $\bar{w}_p/\sigma_p$ は $\bar{w}_p=w_0$ に漸近しており、静水中の沈降速度に近づくことがわかる。また相対乱流強度が大きな領域では、どのケースにおいても $\bar{w}_p/\sigma_p$ は一定値に漸近している。特に、 $St=2.3 \times 10^{-6}$ 以外のケースでは、 $\bar{w}_p/\sigma_p \approx 0.3$ に漸近することがわかる。これより、大きな Stokes 数においては、平均沈降速度は w_0 に関わらず乱流強度の 30% 程度になるといえる。

4. 結 論

浮遊固体粒子の平均沈降速度に及ぼす乱流の効果を、実験データと数値シミュレーションの結果から考察した。得られた主要な結果は以下の通りである。

格子乱流中、開水路乱流中ともに平均沈降速度は同様な変化を示し、相対乱流強度 σ_p/w_0 と Stokes 数によって規定される。 $\sigma_p/w_0 > 5$ では Stokes 数に関わらず、平均沈降速度は乱流強度とともに増加し、 $\bar{w}_p/w_0 \approx 15$ で静水中の 6 倍に達する。 $\sigma_p/w_0 < 5$ では、 $\bar{w}_p$ が w_0 より増加する場合と減少する場合があるが、この違いは Stokes 数の大小による。Stokes 数が大きい場合、平均沈降速度は相対乱流強度が増加するにしたがって静水中の沈降速度より一旦減少した後、増加する。

Kraichnan (1970) の Kinematic Simulation で生成した 3 次元乱流場における数値シミュレーションの結果は、格子乱流・開水路乱流中における平均沈降速度の実験結果を再現した。Stokes 数が約 2×10^{-6} 以下の場合、乱流中では相対乱流強度に関わらず、平均沈降速度は静水中より大きく、乱れ強度とともに増加した。Stokes 数が大きい場合、乱れ強度とともに平均沈降速度は一旦減少した後、増加に転じた。Stokes 数が大きいほど、平均沈降速度が減少から増加に転じる時の相対乱れ強度は大

きくなった。

参 考 文 献

- 川西澄・塩崎遼平(2005)：乱流境界層における固体粒子の沈降速度，海岸工学論文集，第 52 巻(1)，pp. 371-375.
- Friedman, P. D. and Katz, J.(2002)：Mean rise rate of droplets in isotropic turbulence, *Phys. Fluids*, Vol. 14(9), pp. 3059-3073.
- Fung, J. C. H., Hunt, J. C. R., Malik, N. A. and Perkins, R. J.(1992)：Kinematic simulation of homogeneous turbulence by unsteady random Fourier modes, *J.Fluid Mech.*, Vol. 236 (10), pp. 281-318.
- Jobson, H. E. and Sayre, W. W.(1970)：Vertical transfer in open channel flow, *J. Hydraulics Div.*, ASCE, 96(HY3), pp. 703-724.
- Helland, K. N., Van Atta, C. W. and Stegen, G. R.(1977)：Spectral energy transfer in high Reynolds number turbulence, *Fluid Mech.*, Vol. 79, pp. 337-359.
- Hunt, J. C. R., Buell, J. C. and Wray, A. A.(1987)：Big whorls carry little whorls, *Proc. of Summer Program, CTR*.
- Kawanisi, K., Nielsen, P. and Zeng, Q.-C. (1999)：Settling and rising velocity of a spherical particle on homogeneous turbulence, *Ann. J. Hydraul. Engrg.*, Vol. 43, pp. 779-784.
- Kraichnan, R. H. (1970)：Diffusion by a random velocity field, *Phys. Fluids*, Vol. 13(1), pp. 22-31
- L'Ecuier, P. (1988)：Efficient and portable combined random number generators, *Communications of the ACM*, Vol. 31, pp. 742-774.
- Murray, S. P. (1970)：Settling velocities and vertical diffusion of particles in turbulent water, *J. Geophys. Res.*, Vol. 75 (3), pp. 1647-1654.
- Nielsen, P.(1992)：Coastal Bottom Boundary Layers and sediment transport, *World Scientific*.
- Nielsen, P.(1993)：Turbulence effects on the settling of suspended particles, *Journal of Sedimentary Petrology*, Vol. 63 (5), pp. 835-838.
- Screenivasan, K.R.(1984)：On the scaling of the turbulence energy dissipation rate, *Phys. Fluids*, 27, pp. 1048-1051.
- Stoer, J. and Bulirsch, R. (1980)：Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, New York.
- Tooby, P. F., Wick, G. L. and Isaacs, J. D.(1977)：The motion of a small sphere in a rotating velocity field: a possible mechanism for suspending particles in turbulence, *J. Geophys. Res.*, Vol. 82 (15), pp. 2096-2100.
- Wang, L. and Maxey, M.R.(1993)：Settling velocity and concentration distribution of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence, *J. Fluid Mech.*, Vol. 256, pp. 27-68.
- White, F. M.(1991)：Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill.