

異常波浪の予測とその推定精度について

森 信人¹・Miguel Onorato²・Peter A.E.M. Janssen³

非線形準共鳴 4 波相互作用を考慮し, 方向スペクトルから水面変位の高次モーメントを推定する方法とその推定精度について検討した。ついで, 弱非線形・挟帯スペクトル仮定の下で, 高次モーメントと最大波高分布の関係を導出し, 方向スペクトルから最大波高を推定するフレームワークを構築した。得られた理論を水槽実験および現地観測データと比較し, 最大波高の推定精度について検討を行った。その結果, 最大波高の分布に対する水面変位の 4 次モーメント依存性を明らかにした。

1. 緒 言

波浪推算では, 一般的に Hasselmann (1962) が導出したスペクトル $E(\vec{k})$ に対する Kinetic 方程式

$$\frac{\partial E(\vec{k}, t)}{\partial t} = S_{nl} = \omega(\vec{k}) \iiint d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 |T_{0123}|^2 \delta(\vec{k}_0 + \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \delta(\omega_0 + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \{N_2 N_3 (N_0 + N_1) - N_0 N_1 (N_2 + N_3)\} \dots (1)$$

の S_{nl} を用いて非線形干渉による波浪スペクトルの変形が計算される。ここで, $\vec{k}$ は波数, ω は角振動数, N はアクション密度, T_{0123} は Krasitskii (1994) による 4 波相互作用項である。Hasselmann 方程式の導出過程では, 非線形エネルギー輸送関数 $G(\Delta\omega, t)$

$$G(\Delta\omega, t) = i \int_0^t e^{i\Delta\omega(\tau-t)} d\tau = R_r(\Delta\omega, t) + iR_i(\Delta\omega, t) \dots (2)$$

の内, 虚数項が $R_i \rightarrow \pi\delta(t)$ と漸近近似される。しかし Janssen (2003) は, 共鳴 4 波相互作用が確立するまで ($R_i \rightarrow \pi\delta(\Delta t)$) の時間スケールが $O(1/\varepsilon^4)$ と非常に長いので, 共鳴 4 波相互作用よりも非共鳴 4 波相互作用が重要であるとし, 水面変位の 4 次キウムラントのスペクトル形状依存性を指摘している。さらに, 森・Janssen (2005, 2006) は, 4 次キウムラントと波高分布の関係を定式化し, 4 波相互作用と異常波浪の出現特性の関係を明らかにしている。このように異常波浪予測の理論的体系は整ってきたものの, 推定精度など工学的に重要な議論は不十分である。

本研究では, Freak wave を有義波高の 2 倍を超える最大波として定義し, 4 波相互作用と異常波浪の出現特性の関係について明らかにする。まず始めに方向スペクトル, 水面変位の高次モーメントおよび最大波高分布の関係を示し, ついで一方不規則波列の長時間伝播水

槽実験結果と比較することにより理論の妥当性を検討する。これらの結果をもとに, 方向スペクトルから最大波高を予測する手法の提案とその予測精度について検証を行う。

2. 異常波浪の予測方法

(1) 準共鳴 4 波干渉と高次モーメントの関係

前節で述べたように, Hasselmann 方程式のような波浪のエネルギー伝播を解く方程式では, 長時間伝播により共鳴 4 波相互作用を満たすことを仮定している。しかしながら, 共鳴 4 波相互作用条件を厳密に満たすには時間がかかり, 水面変位の kurtosis のような高次モーメントについては厳密には共鳴条件を満たさない準共鳴 (式 (3) および (4)) の状態が重要であると指摘されている (Janssen, 2003)。連続スペクトルを持つ波列で生じる準共鳴 4 波相互作用の条件は波数 $\vec{k}$ と角振動数 ω を用いて以下のように表せる。

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4 = 0 \dots (3)$$

$$\omega(\vec{k}_1) + \omega(\vec{k}_2) - \omega(\vec{k}_3) - \omega(\vec{k}_4) \leq \varepsilon^2 \dots (4)$$

ここで ε は波形勾配に相当する非線形指標であり, Benjamin-Feir 不安定は $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ かつ $\vec{k}_3$ および $\vec{k}_4$ は式 (3) および (4) の共鳴条件を満たす 1 対の側帯波に位置する場合に相当する。

ついで, 水面変位 η の 6 次キウムラントが 0 で, 4 次キウムラントが有限であると仮定すると, アクション密度, 4 波相互作用項および水面変位の 4 次モーメントの関係は以下のように導出される。

$$\begin{aligned} \kappa_{40} &= \frac{\langle \eta^4 \rangle}{m_0^2} - 3 \dots (5) \\ &= \frac{12}{g^2 m_0^2} \int d\vec{k}_{1,2,3,4} T_{1,2,3,4} \sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} \delta_{1+2-3-4} \\ &\quad \times R_r(\Delta\omega, t) N_1 N_2 N_3 \dots (6) \end{aligned}$$

ここで m_0 は水面変位の分散, κ_{40} は水面変位の 4 次キウムラント, g は重力加速度, $\delta_{1+2-3-4} = \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4)$, $d\vec{k}_{1,2,3,4} = d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4$, $\Delta\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4$, $R_r = (1 - \cos(\Delta\omega t))/\Delta\omega$ である。有限時間長では, 式

1 正会員 博(工) 大阪市立大学講師大学院工学研究科
2 Ph.D Università di Torino, Dip. di Fisica Generale
3 Ph.D European Centre for Medium-Range Weather Forecasts

(2) の非線形エネルギー輸送関数は $R_{\rightarrow} P / \Delta \omega$ と近似される。ここで P は積分の特異点を回避するための主値である。

さらに式 (6) は、周波数スペクトル $E(\omega)$ が以下のようにガウス分布を持つと仮定することにより、簡略化することが出来る。

$$E(\omega) = \frac{m_0}{\sigma_\omega \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} v^2} \quad (7)$$

ここで、 $v = (\omega - \omega_0) / \sigma_\omega$ であり、 σ_ω はスペクトル幅パラメータである。このとき式 (6) は解析的に積分可能であり、以下のように書き換えられる。

$$\kappa_{40} = \frac{24\varepsilon^2}{\Delta^2} P \int \frac{dv_{1,2,3}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-\frac{1}{2}(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}}{(v_1+v_2-v_3)^2 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (8)$$

ここで、 $\varepsilon = k_0 \sqrt{m_0}$ は波形勾配であり、 $\Delta = \sigma_\omega / \omega_0$ はスペクトル幅パラメータである。式 (8) をさらに積分すると、Benjamin-Feir Index : BFI (Janssen, 2003) と次の関係を持つ。

$$\kappa_{40} = \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varepsilon^2}{\Delta^2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} BFI^2 \quad (9)$$

式 (9) より、一方向に伝播する挟帯スペクトルを持つ不規則波では、 κ_{40} の値は波形勾配 ε およびスペクトル幅 Δ の両者に依存する。このため、4 次モーメントの値は、非線形性が強くなると増加し、スペクトル幅が広くなると減少する。この結果は、Alber・Saffman (1978) が示した重力波の伝播には非線形干渉によるエネルギー集中 (ε) と線形分散 (Δ) が重要な役割を果たすという結果と定性的に同じ結果である。挟帯スペクトルを持つ弱非線形波では、 $BFI = O(1)$ であり、4 次モーメントに及ぼす自由波による非線形干渉の影響は、拘束波より大きくなる (Mori・Janssen, 2006)。さらに式 (9) は、合田のスペクトル幅パラメータ Q_p を用いると次式のように書き換えられ、

$$\kappa_{40} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{3}} k_p^2 m_0 Q_p^2 \propto \frac{H_{1/3}^2 Q_p^2}{T_{1/3}^2} \quad (10)$$

これに鳥羽の 3/2 乗則を適用すると $\kappa_{40} \propto Q_p^2 / H_{1/3}^2$ の関係が得られる。これらの関係より、風波における κ_{40} は、 u_* で無次元化した波高 H_* が大きくなると減少し、スペクトル幅が先鋭化すると逆に増大することがわかる。言い換えると κ_{40} は波齢に依存することが予想される。

(2) 高次モーメントを考慮した短期波浪統計理論

kurtosis あるいは κ_{40} を考慮した弱非線形波高分布は水面変位を Edgeworth 展開で近似した理論がある (Mori, 2004)。しかしながら、この理論では水面変位 η と包絡波形 ζ の 2 次相関を無視しており、弱非線形の仮定の下でも綻びが見られる。Mori・Janssen (2006) では水面変位 η と包絡波形 ζ の 2 次相関を考慮し、2 次

の結合キュムラント κ_{22} は κ_{40} と次の関係を持つことを明らかにし、

$$\kappa_{22} = \frac{\langle \eta^2 \zeta^2 \rangle}{m_0^2} - 1 = \frac{1}{3} \kappa_{40} \quad (11)$$

これを考慮した修正 Edgeworth-Rayleigh 分布 (MER) が提案されている。

$$p(H) = \frac{1}{4} H e^{-\frac{1}{8} H^2} [1 + \kappa_{40} A_H(H)] \quad (12)$$

$$P_H(H) = e^{-\frac{1}{8} H^2} [1 + \kappa_{40} B_H(H)] \quad (13)$$

ここで H は rms 値で無次元化した波高であり、 $p(H)$ および $P(H)$ は波高分布および波高の超過確率である。また式中の $A_H(H)$ および $B_H(H)$ は H についての多項式である。

$$A_H(H) = \frac{1}{384} (H^4 - 32H^2 + 128) \quad (14)$$

$$B_H(H) = \frac{1}{384} H^2 (H^2 - 16) \quad (15)$$

式 (12) および (13) は狭帯スペクトルと一方向波列を仮定しており、波高に及ぼす非線形性の影響の最低次の非線形性を考慮したものとなっている。また線形不規則波 ($\kappa_{40} = 0$) で両式は Rayleigh 分布と一致する。一方、波峰については skewness が最低次の非線形補正となり、異なるアプローチが必要となるが、紙面の関係上ここでは議論を省く。

上記の議論を下に、 κ_{40} の影響を考慮した最大波高分布 p_m および最大波高の超過確率分布 P_m は、波列中の波の数 N を含み次式のように導出できる。

$$p_m(H_{max}) = \frac{N}{4} H_{max} e^{-\frac{H_{max}^2}{8}} [1 + \kappa_{40} A_H(H_{max})] \times \exp\left[-N e^{-\frac{H_{max}^2}{8}} [1 + \kappa_{40} B_H(H_{max})]\right] \quad (16)$$

$$P_m(H_{max}) = 1 - \exp\left[-N e^{-\frac{H_{max}^2}{8}} [1 + \kappa_{40} B_H(H_{max})]\right] \quad (17)$$

線形不規則波 ($\kappa_{40} = 0$) で両式は Rayleigh 分布を元に導出される最大波高分布と一致する。

ここで、Freak wave を有義波高の 2 倍を超える波高を持つ波と定義すると、 $H_{freak} \geq 8m^{1/2}$ と換算でき、式 (17) より、その出現確率分布が κ_{40} および N の関数として導かれる。

$$P_{freak} = 1 - \exp[-\beta N (1 + 8\kappa_{40})] \quad (18)$$

ここで $\beta = e^{-8}$ なる定数である。

上記の議論をまとめると、準共鳴 4 波相互作用により不規則波の統計量は正規分布からずれる場合があり、その大きさはスペクトル形状に依存することになる。さらに、弱非線形・狭帯スペクトル仮定の下における不規則波列では、式 (16) により最大波高分布が推定可能である。このような条件下では、最大波高分布は波の数 N

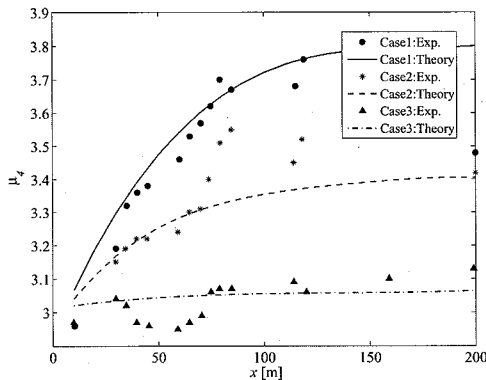


図-1 水槽実験における μ_4 の空間変化 (●: Case1, * : Case2, ◇: Case3, 線: 数値計算結果)

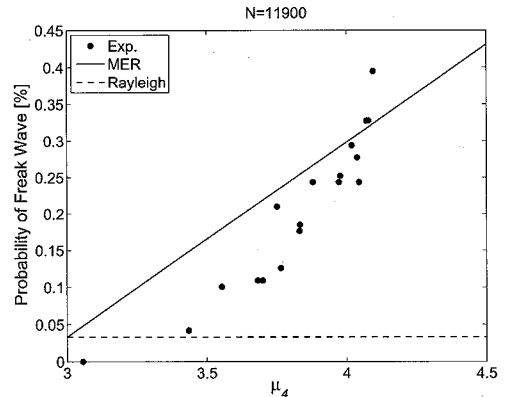


図-2 Freak wave の出現確率と μ_4 の関係: 波の数 $N=11,900$ (●: 実験結果, 実線: 式(18), 点線: Rayleigh分布)

だけでなく, kurtosis/BFI の値に応じて変化し, 例えば $\kappa_{40}=1/8$ ($\mu_4=3.125$) の場合, 非線形効果は線形理論と同じオーダーとなる. 以上のフレームワークを利用すると, スペクトルから非線形 4 波相互作用の影響を考慮した最大波高の推定が可能となる.

3. 水槽実験と観測データの概要

前節の枠組みを用いた方向スペクトルから最大波高を推定するフレームワークの妥当性と精度を検証するため, 大規模水路 (MARINTEK, 長さ 270 m × 幅 10.6 m × 最大水深 10 m) において不規則波を造波し, 水槽内の波形の変化を計測した (以下, 実験結果と略記). 実験は入射波周期を 1.5 秒に固定して 3 ケース行い, JONSWAP スペクトルの γ と波形勾配を 6, 3.3, 1 および 0.16, 0.14, 0.11 と変化させて行った. このとき, ケース 1~3 で初期の波形勾配 ($\varepsilon = k_p H_{1/3}/2$ と定義) は 0.15, 0.13, 0.10 である. 理論と比較する際の統計的変動性を押さえるため, 各ケース 10,000 波以上造波し, サンプリング周波数 40 Hz で 20 地点の水面変位を計測した (詳しくは Onorato ら, 2006; Mori ら, 2006 を参照).

多方向性の影響を見るために, 太平洋側水深 30 m の地点におけるブイ観測結果 (以下, 観測データと略記) を使用し, 合わせて比較を行った (詳しくは Mori・Janssen (2006) を参照). 実験結果および観測データ両者の μ_4 と N について条件付きサンプリングを行い, 波数および非線形性の両者が区分された最大波高の標本データを作成した.

4. 結果と考察

図-1 に示すのは, 水槽内で空間変化するの実測した μ_4 と式 (6) 中の $R_r(\Delta\omega, t)$ を $1 - \cos(\Delta kx)/\Delta k$ として周波数スペクトルから kurtosis (μ_4) を計算した結果で

ある. 図中の横軸は造波機からの距離を示す. 周波数スペクトルそのものの空間発展は, Dysthe 方程式をスペクトル発展型に置き換えたものを数値的に解いた. 図よりわかるように, 挟帯スペクトル ($\gamma=6.6$) かつ波形勾配 $\varepsilon=0.16$ のケース 1 における μ_4 は, 初期位置 ($x=0$ m) で 3, 造波機から遠ざかるに従い 3.7 まで増大し, $x=120$ m までは実験結果, 数値計算結果ともにほぼ一致している. $x=120$ m 以降の差異は, 砕波によるエネルギー変化が大きいと思われる. 一方, 初期のスペクトルバンド幅が広いケース 3 ($\gamma=1.0$) では, μ_4 は殆ど増加せず, 3.1 程度に留まっている. 上記の結果より, 式 (6) を用いた周波数スペクトルから kurtosis の推定は妥当であり, 少なくとも断面 2 次元場における 4 波相互作用の評価とこれに付随する水面変位の高次統計量変化の予測が可能であることがわかる.

図-2 は, 定常条件を満たしかつ最大波高の分布の比較を容易にするため, 全測点の波列中の波の数を 11,900 波と固定し, 各測点における μ_4 の値と Freak wave の出現頻度を示したものである. 図中の実線と破線は, 式 (18) による μ_4 の変化を考慮した頻度 (以下, 非線形理論と略記) と Rayleigh 分布に基づく最大波高理論 (以下, 線形理論と略記) より得られる Freak wave の出現頻度である. 非線形理論は $\mu_4=3$ で線形理論と一致し, Freak wave の出現頻度は μ_4 の値が大きくなるに従い線形に増加する. 実験結果と比較すると, μ_4 の値が大きくなると Freak wave の出現頻度が増加するという傾向は式 (18) の非線形理論で説明できるものの, 非線形理論は $\mu_4 < 3.75$ の領域では過大であることがわかる. 非線形理論が水槽実験結果と比較してやや過大評価である理由は幾つか考えられるが, 最も大きな理由としては定式化の過程で挟帯スペクトルを仮定している点

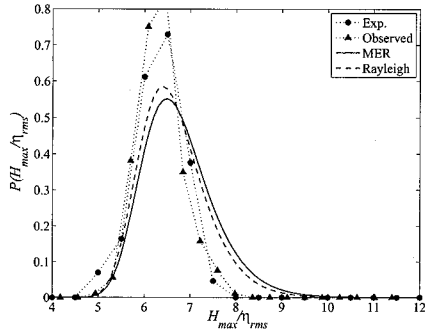
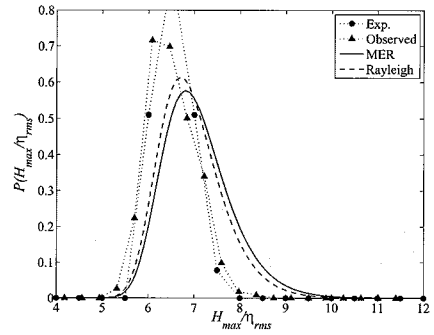
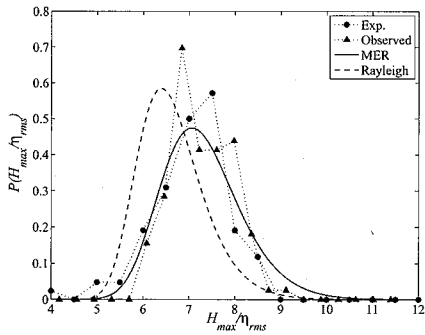
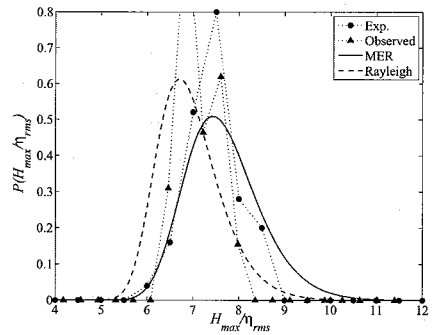
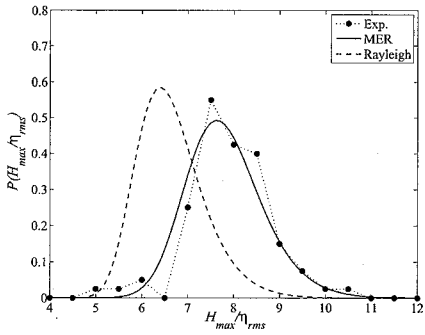
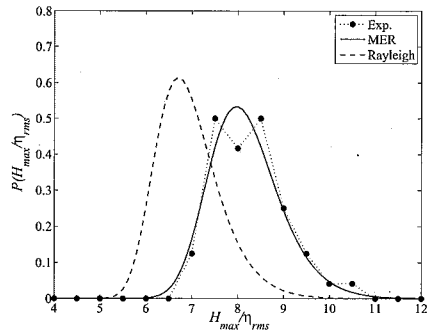
(a) $\mu_4 = 3.1$ (a) $\mu_4 = 3.1$ (b) $\mu_4 = 3.4$ (b) $\mu_4 = 3.4$ (c) $\mu_4 = 4.1$ (c) $\mu_4 = 4.1$

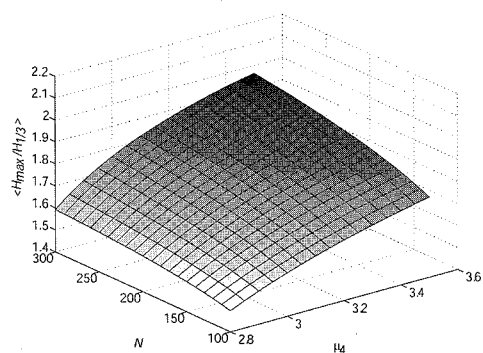
図-3 最大波高分布における μ_4 の影響：波列当たりの波の数 $N=150$ の場合 (●：実験結果，▲：観測データ，実線：式(16)，点線：Rayleigh 最大波高分布)

図-4 最大波高分布における μ_4 の影響：波列当たりの波の数 $N=250$ の場合 (●：実験結果，▲：観測データ，実線：式(16)，点線：Rayleigh 最大波高分布)

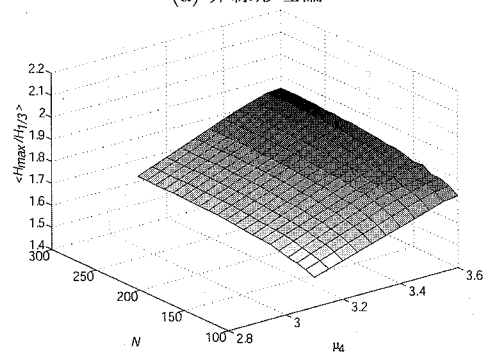
が挙げられる。

一般に Freak wave の出現頻度の推定は、最大波高分布の裾の積分値の推定を行っていることになる。つまり異常波浪の予測の本質は、最大波高分布形状そのものを推定することであり、そこで以下では最大波高分布形状および期待値について検証を行うことにする。図-3 および 4 に示すのは、波列中の波の数 N を 150 および 250 と固定したときの H_{max} の分布を実験結果、観測デ

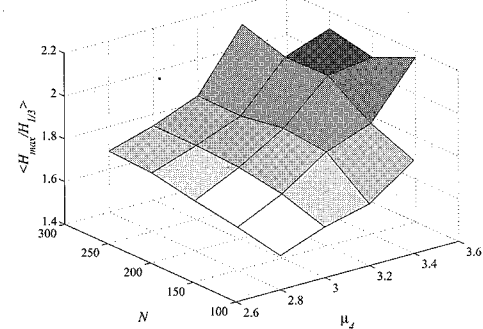
ータ、非線形理論 (式 (16)) および線形理論と比較したものである。なお、観測データでは $\mu_4 > 3.5$ となるデータ数が非常に少ないため、図-3(c) および 4(c) では実験結果のみプロットしてある。ガウス過程 ($\mu_4=3$) に近い条件の図-3(a) および図-4(a) では、実験結果、観測データおよび両理論ともほぼ同ような分布形状となっている。これに対し、 μ_4 が大きくなると (図-3 および図-4 において (a) → (c)), 線形理論に比べて、実験結



(a) 非線形理論



(b) 実験結果



(c) 観測データ

図-5 H_{max} の期待値 $H_{max}/H_{1/3}$ と μ_4 および N の関係

果および現地データの分布のピークは高波高側に移動し、非線形理論はこの変化を良く表していることがわかる。また、波列中の波の数の影響について見ると、 $N=150 \rightarrow 250$ で分布のピークは $0.5 \eta_{rms}$ 以上増加しており、これは μ_4 が 0.3 程度増大する変化に等しい。

最後に最大波高分布に及ぼす μ_4 の影響を俯瞰的に見るため、 H_{max} の期待値 $\langle H_{max}/H_{1/3} \rangle$ と N および μ_4 の関係を比較した。図-5 に示すのはその結果である。なお、実験結果および現地観測データにおいてサンプル数が不足する点については欠測値として取り扱っている。図より、非線形理論は実験結果に比べてやや過大評価と

なり、現地観測結果と比較すると過小評価となっている。しかしながら、最大波高の分布が波列中の波の数 N と kurtosis に依存している傾向は明瞭であり、非線形 4 波相互作用を考慮した最大波高分布推定理論によりこの特性は予測可能であることがわかる。

5. 結 語

本研究では、4 波相互作用を考慮した最大波高の分布を導出し、方向スペクトルから最大波高を推定するフレームワークを構築した。得られた理論を水槽実験結果および現地観測データと比較し、以下の結論が得られた。

- Zakharov 方程式の非線形 4 波相互作用項 T_{1234} を利用することにより、周波数スペクトルから水面変位の 4 次モーメント kurtosis の推定が可能である。
- 最大波高および Freak wave の発生頻度の kurtosis 依存性は明瞭であり、非線形統計理論はこれを予測可能である。

上記の成果を波浪予測・推算モデルに応用することにより、有義波高だけでなく最大波高の予測・推算が可能となる。しかし、定量的な比較や平面波動場における理論の妥当性の検証は不十分であり、今後の発展が必要である。

参 考 文 献

- Alber, I. and P. Saffman (1978) : Stability of random nonlinear deepwater waves with finite bandwidth spectra, Technical Report 31326-6035-RU-00, TRW Defense and Space System Group.
- Hasselmann, K. (1962) : On the nonlinear energy transfer in gravity-wave spectrum. I. General theory, JFM, pp. 481-500.
- Janssen, P. A. E. M. (2003) : Nonlinear four-wave interactions and freak waves, Journal of Physical Oceanography, Vol.33, pp. 863-884.
- Krasitskii, V. (1994) : On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves, JFM, Vol.272, pp. 1-20.
- Mori, N. (2004) : Occurrence probability of freak wave in nonlinear wave field, Ocean Engineering, Vol.31, pp. 165-175.
- Mori, N. and P.A.E.M. Janssen (2006) : On kurtosis and occurrence probability of freak waves, Journal of Physical Oceanography, Vol. 36, No. 7, pp. 1471-1483.
- Mori, N., M. Onorato, P.A. E. M. Janssen, A. R. Osborne, and M. Serio (2006) : Exceedance probability for strongly nonlinear long crested waves, JFM, 投稿中。
- Onorato, M., A. Osborne, M. Serio, L. Cavaleri, C. Brandini, and C. Stansberg (2006) : Extreme waves, modulational instability and second order theory: wave flume experiments on irregular waves, European Journal of Mechanics B/Fluids, 印刷中。
- 森 信人・P. A. E. M. Janssen (2005) : 異常波浪の出現と非線形干渉の関係について, 海岸工学論文集, 第 52 巻, pp. 131-135.