

三次元数値波動水槽のための粒子法と Boussinesq モデルとの ハイブリッド化

五十里洋行¹・後藤仁志²・酒井哲郎³・奥田一弘⁴

低負荷の計算でありながら中領域における波動現象を精度良く再現することができ、かつ構造物周辺で生じる水塊分裂や飛沫を含む複雑な水面変動をも再現できる数値モデルは未だ存在しない。そこで本研究では、両者の要請に応えることができる汎用的な数値波動水槽を構築する方法として、平面 2D-Boussinesq モデルと 3D 粒子法の Euler-Lagrange カップリングを提案する。中領域を Boussinesq モデルで解き、その解を用いて粒子法計算領域の外周に設置された造波壁を強制移動させて小領域（中領域内の閉領域）を解く。水面変動の穏やかな非砕波の水理条件で基礎的な検討を行った結果、両モデルの水面形は良好に一致した。

1. はじめに

波浪変形計算は従来より多くの研究が行われており、数々の解析手法が提案されてきている。それらはいずれもなんらかの仮定の下に導出されたものであるから、解析の対象となる領域や水理現象によって適するものと適さないものがある。したがって、ユーザー側は知りたい情報を整理し、それが得られる手法を適切に選択しなければならない。例えば、Boussinesq 方程式は、屈折・回折、非線形性・分散性等の海岸波動の性質を良好に再現できる優れたモデルであるので、中領域の波浪場解析として広く適用されている。しかし、完全流体の支配方程式に基づくので、エネルギー散逸に関連する現象（海底摩擦、砕波による乱流拡散など）を正確に表現することができず、砕波帯を含む海岸構造物周辺の小領域解析への適用は難しい。一方、粒子法は、砕波とそれに伴う水塊分裂・飛沫が発生する急変流解析に適用性が高い Navier-Stokes 式のソルバーであるが、他の DNS 的手法と同様に計算負荷が高く、中領域計算には適さない。また、水面変動の静穏な中領域では粒子法の利点を生かすことができない。そこで、本研究では、平面 2D-Boussinesq モデルと 3D 粒子法を融合して、汎用的な数値波動水槽を構築するための基礎となる両者の境界接続の方法（Euler-Lagrange カップリング）について提案する。本方法の有効性について基礎的な検討を行うために、一様水深の数値造波水槽を設け、Boussinesq モデルの計算領域の一部に設定した小領域を粒子法で解き、両者の解の対応を確認する。

2. 数値解析の概要

(1) Boussinesq 方程式

本研究で用いた Boussinesq モデルは NOWT-PARI Ver. 4.6c3（平山，2002）である。基礎式は、分散項に補正項を加えることで深海域における分散特性を改良した Madsen・Sørensen (1992) の修正 Boussinesq 方程式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{PQ}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ & - \nu_t \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right) + \varepsilon P + \frac{f}{2D^2} P \sqrt{P^2 + Q^2} \\ & = \left(B + \frac{1}{3} \right) h^2 \left(\frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 Q}{\partial x \partial y \partial t} \right) \\ & + Bgh^3 \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial y^2} \right) \\ & + h \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial t} \right) + h \frac{\partial h}{\partial y} \left(\frac{1}{6} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \right) \\ & + Bgh^2 \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} \left(2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right\} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

である（ y 方向の運動方程式は省略）。ここに、 x, y ：平面座標、 t ：時間、 η ：水位、 P, Q ： x, y 方向の線流量、 g ：重力加速度、 D ：全水深（ $D = h + \eta$ ）、 f ：底面摩擦係数、 ν_t ：渦動粘性係数（砕波による乱れに起因する運動量混合を表現）、 ε ：エネルギー吸収帯の吸収係数、 B ：分散特性に関する補正係数（ $= 1/15$ ）である。基礎式の離散化には、ADI 差分法が適用され、空間差分には staggered 格子を用いた中央差分法、時間差分に対しては前進差分法が適用される。また、エネルギー吸収帯（スポンジ層（Eric ら，1993））が計算対象領域に外接して設置され、無反射境界が実現される。

(2) MPS 法

MPS 法（Koshizuka ら，1995）は、計算格子を用い

1 学生会員 工修 京都大学大学院工学研究科都市環境工学専攻
2 正 会 員 工博 京都大学助教授 工学研究科都市環境工学専攻
3 フェロー 工博 京都大学教授 工学研究科都市環境工学専攻
4 正 会 員 工修 五洋建設（株）

ずに、計算領域に配置した多数の粒子（計算点）の運動を追跡する Lagrange 型の解析手法である。本研究では、次章で述べる理由により非均一粒子径型 MPS 法（池田ら, 1998）を適用する。

支配方程式は、Navier-Stokes 式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (3)$$

である（ここに、 $\mathbf{u}$: 流速ベクトル, p : 圧力, ρ : 流体の密度, $\mathbf{g}$: 重力加速度ベクトル, ν : 動粘性係数）。基礎式の各項は、粒子周囲の影響球内の他の粒子との相互作用を通じて離散化される（越塚, 2005）。非圧縮条件は、粒子数密度を一定値 n_0 に保つことで満足される。

粒子 i の圧力項 (gradient) および粘性項 (Laplacian) は、

$$-\frac{1}{\rho} \langle \nabla p \rangle_i = -\frac{1}{\rho} \frac{D_0}{V_i n_0}$$

$$\sum_{j \neq i} \left\{ \frac{p_j - p_i}{|\mathbf{r}_{ij}|^2} V_j \cdot \mathbf{w}(|\mathbf{r}_{ij}|, r_{ei}) \right\} \quad (4)$$

$$\nu \langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i = \frac{2\nu D_0}{V_i A_i} \sum_{j \neq i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \frac{V_j \mathbf{w}(|\mathbf{r}_{ij}|, r_{ei}) + V_i \mathbf{w}(|\mathbf{r}_{ij}|, r_{ej})}{2} \quad (5)$$

$$A_i = \sum_{j \neq i} \left[\frac{|\mathbf{r}_{ij}|^2 V_j \mathbf{w}(|\mathbf{r}_{ij}|, r_{ei}) + V_i \mathbf{w}(|\mathbf{r}_{ij}|, r_{ej})}{2 V_i} \right] \quad (6)$$

$$V_i = (d_i)^{D_0} \quad (7)$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i \quad (8)$$

のように粒子間相互作用としてモデル化される (D_0 : 次元数, $\mathbf{r}_i$: 粒子 i の位置ベクトル)。移流項は粒子移動の追跡を通じて計算されるため特別なスキームを必要とせず、差分化に起因する数値拡散も生じない。粒子間相互作用の生じる範囲（影響球）は、重み関数

$$w(r, r_{ei}) = \begin{cases} \frac{r_{ei} - r}{r_{ei}} & \text{for } r \leq r_{ei} \\ 0 & \text{for } r > r_{ei} \end{cases} \quad (9)$$

により規定される。パラメータ r_{ei} は粒径の定数倍であり、粒子の持つ粒径によって異なる。また、粒子数密度は重み関数を用いて

$$n_i = \sum_{j \neq i} \left[\frac{V_j \mathbf{w}(|\mathbf{r}_{ij}|, r_{ei}) + V_i \mathbf{w}(|\mathbf{r}_{ij}|, r_{ej})}{2 V_i} \right] \quad (10)$$

と定義される。

3. 平面 2-D Boussinesq モデルと 3-D MPS 法のカップリング

(1) 造波壁の制御

本研究では、平面 2-D Boussinesq モデルと 2-D MPS 法のカップリングモデル（後藤ら, 2006）を基にして、3次元計算に対応したモデルに拡張する。2次元計算の場合は奥行き方向の情報がないため、1つの剛体壁を前

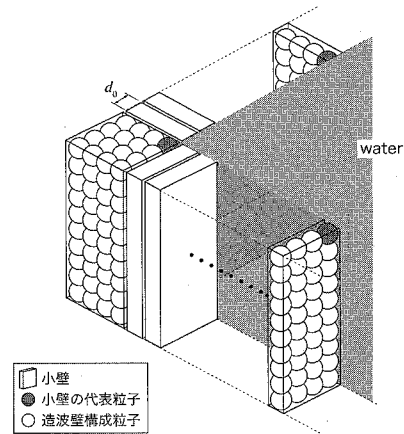


図-1 造波壁の分割

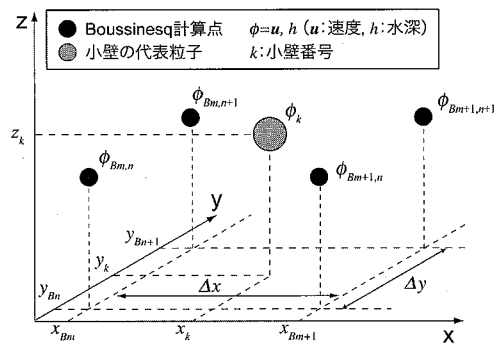


図-2 小壁の代表粒子と Boussinesq 計算点

後に平行移動させるだけで満足な造波が可能であった。しかし、3次元計算の場合、造波壁の奥行き方向に対して垂直に波が入射する場合は2次元計算と同様にその波向と平行に造波壁を一斉に移動させればよいが、斜め入射の場合にはこの方法では対処できない。入射波向に合わせて境界条件を設定すれば良いという考え方もあるが、多方向性を扱う実海浜の条件下の計算においてはやはり対応できない。

そこで本研究では、どのような入射方向にも対応するために、図-1のように造波壁を小壁に分割する。分割の幅は基準粒径 d_0 に等しくする。ただし、造波壁の隅角部においては図のように4粒子×4粒子の断面で1つの小壁とする。小壁の移動については、まず、小壁の上端の最も内側に存在する粒子（図-1中のグレーで示される粒子）を代表粒子とし、図-2に示すように代表粒子 (x_k, y_k, z_k) の周囲に存在する4点の Boussinesq モデルの計算点 $(x_{Bm,n}, y_{Bm,n})$, $(x_{Bm+1,n}, y_{Bm+1,n})$, $(x_{Bm,n+1}, y_{Bm,n+1})$, $(x_{Bm+1,n+1}, y_{Bm+1,n+1})$ での速度・水深の内挿値

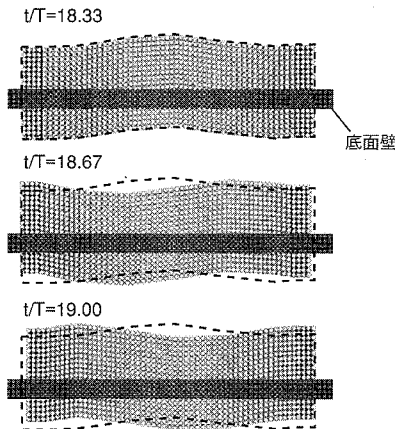
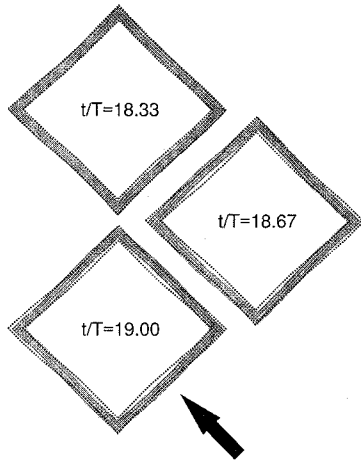


図-3 造波壁の移動 (上：平面図，下：矢印の方向から見た立面図)

$$u_k = \alpha_{Bm,n} u_{Bm,n} + \alpha_{Bm+1,n} u_{Bm+1,n} + \alpha_{Bm,n+1} u_{Bm,n+1} + \alpha_{Bm+1,n+1} u_{Bm+1,n+1} \quad \dots (11)$$

$$h_k = \alpha_{Bm,n} h_{Bm,n} + \alpha_{Bm+1,n} h_{Bm+1,n} + \alpha_{Bm,n+1} h_{Bm,n+1} + \alpha_{Bm+1,n+1} h_{Bm+1,n+1} \quad \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{Bm,n} &= \frac{|y_{Bm+1,n+1} - y_k|}{\Delta y}, \frac{|x_{Bm+1,n} - x_k|}{\Delta x} \\ \alpha_{Bm+1,n} &= \frac{|y_{Bm+1,n+1} - y_k|}{\Delta y}, \frac{|x_k - x_{Bm,n}|}{\Delta x} \\ \alpha_{Bm,n+1} &= \frac{|y_k - y_{Bm+1,n}|}{\Delta y}, \frac{|x_{Bm+1,n+1} - x_k|}{\Delta x} \\ \alpha_{Bm+1,n+1} &= \frac{|y_k - y_{Bm+1,n}|}{\Delta y}, \frac{|x_k - x_{Bm,n+1}|}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad \dots (13)$$

を小壁の移動速度および高さとして与えて平行移動させる (ここに, $\Delta x, \Delta y$: x, y 方向の格子幅). 各小壁は独立して移動させる. 図-3 に造波壁の移動例を示す. 平面図・立面図共に, $t/T=18.33$ における造波壁の位置を破線で示す. 各小壁が独立して移動することにより,

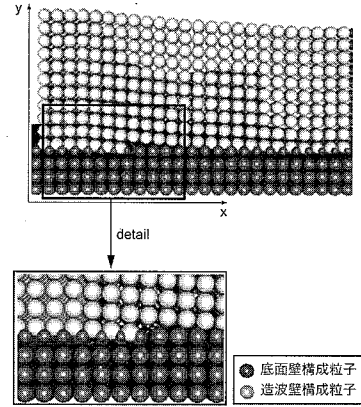


図-4 底面壁粒子

壁をフレキシブルに変形させて造波を行うことができる.

(2) 底面壁粒子の粒径調整

図-3 下図のように造波壁は鉛直方向にも変位するので, 造波壁の高さは初期水深よりも高く設定する必要がある. 底面壁と交差せざるを得ない. この状態で標準型の粒子法を適用すると, 造波壁と底面壁の交差点において粒子が異常に接近して粒子数密度を一定に保持することが困難になり, 過度の圧力擾乱により計算が発散に至る. この問題に対処するため, 図-4 に示すように底面壁粒子の粒径を造波壁構成粒子の近接状態に応じて変化した.

$$d_i = \min(d_0, r_{min}) \quad \dots (14)$$

ここに, r_{min} : 当該底面壁構成粒子と造波壁構成粒子との距離の最小値である. 底面壁上端の壁粒子よりも低い位置にある造波壁構成粒子は, 存在しないものとして計算が行われる. 図-4 にも表示していない. この処理を適用し, 非均一粒子径型粒子法を用いて計算することで粒子数密度を一定に保って, 計算の発散を回避した.

4. 数値シミュレーション

(1) 直入射 (case1) の場合

静水深 10.0 cm の一様水深の数値波動水槽で, 波高 4.0 cm, 周期 0.6 s の規則波を造波した. Boussinesq モデルの計算における格子幅は $\Delta x = \Delta y = 0.1$ m, MPS 法の計算の基準粒径は $d_0 = 0.01$ m とした. 総粒子数は約 75,000 個である. 入射波向は図-5 に示すように, MPS 法の計算領域に対して迎え角 0° で入射するケース (case1) と斜めに入射するケース (case2) の 2 ケースを設定した. 図-6 に case1 の瞬間像を示す. 粒子法計算領域周辺に存在する Boussinesq モデルの計算点における水位を曲面として併示した. 波の峰・谷を見易くするため, 光源の位置を低くして陰影を強調した CG とし

た。陰影から判断すると、両者で同期した波峰線が見られ、境界部の水面形も良好に一致している。図-7に粒子法計算領域中央におけるオイラー観測点での水位変動時系列を Boussinesq モデルの計算結果の内挿値と比較して示す。この図からも両者の解の良好な対応がわかり、本研究で用いた境界接続方法の有効性が確認できる。

(2) 斜め入射 (case2) の場合

実際の波浪場では、特定の解析対象範囲に対して入射

波向が常に一定に保たれることはない。したがって、解析ツールとしての利便性のためには粒子法の解析対象領域に対して任意の波向からの入射に対応可能であることが望ましい。図-8に粒子法計算領域に対して波を斜め入射させた場合の計算結果を示す。この場合も境界部において両モデルの水面形は良好に一致している。図-9に case2 の水位変動時系列を示す。case1 と比較すると、 $t/T=9.0$ 以降において若干振幅が小さくなる。これは、case2 では case1 と比較して、越流する領域が広く流量

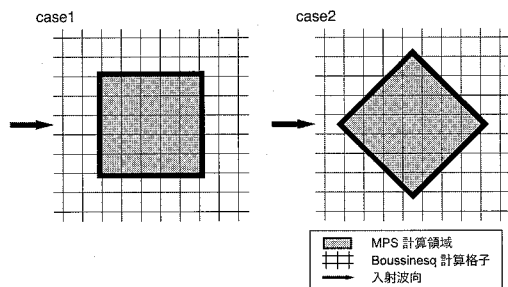


図-5 入射波向

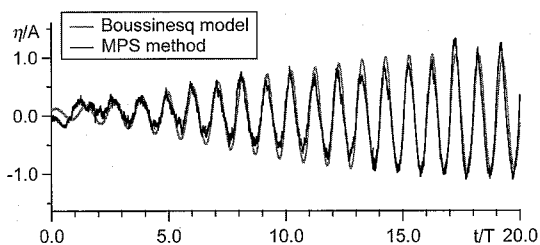


図-7 水位時系列 (case1)

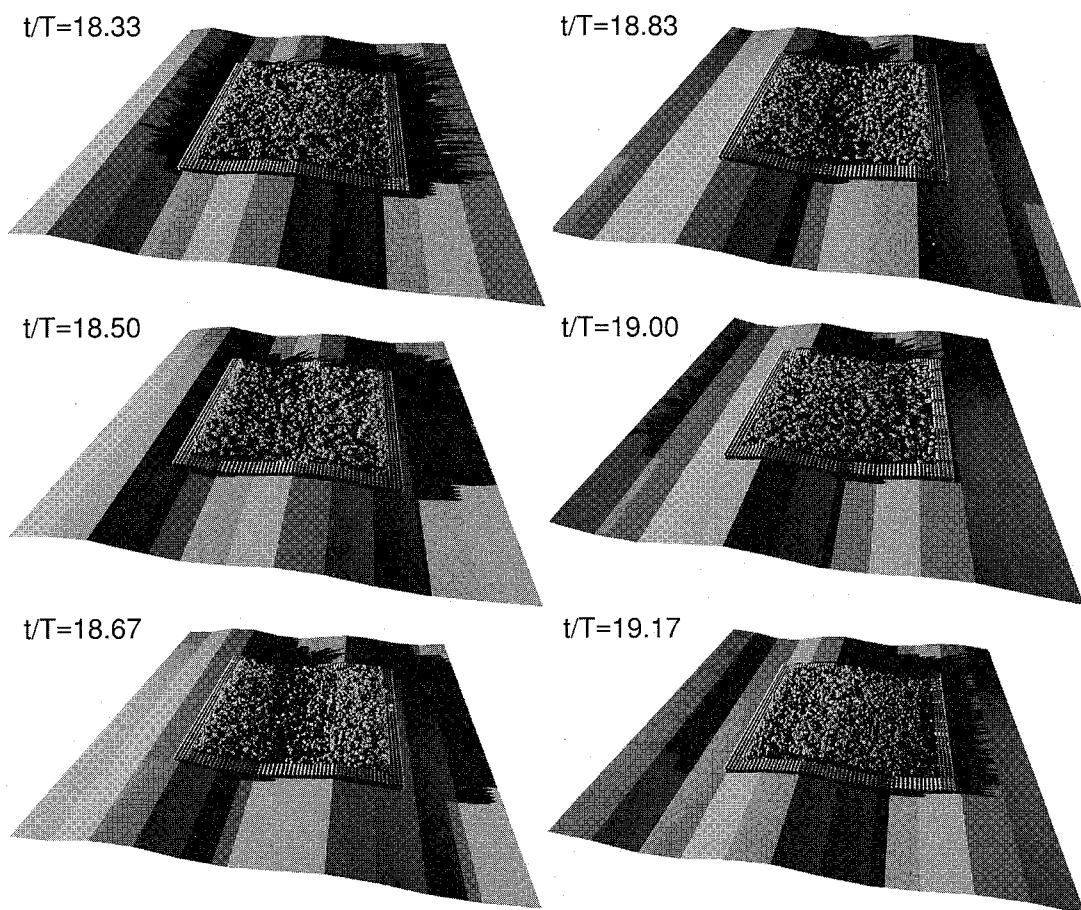


図-6 瞬間像 (case1)

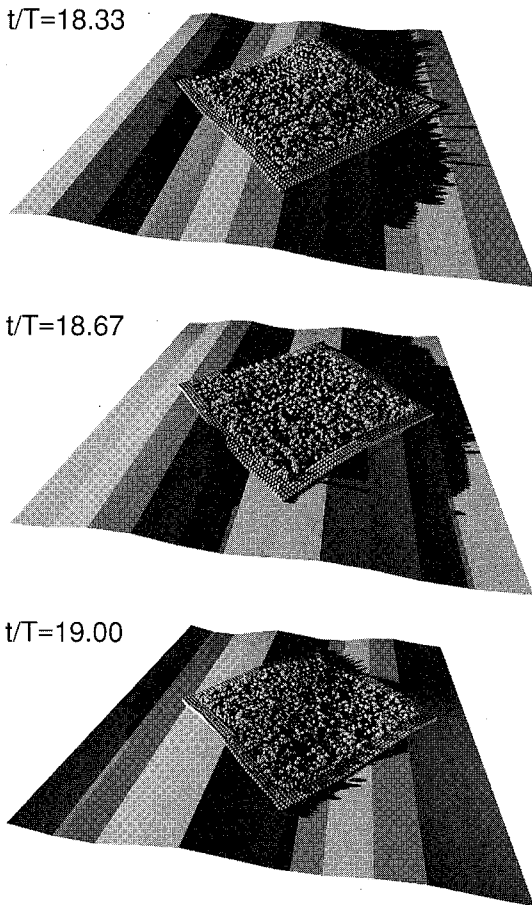


図-8 瞬間像 (case2)

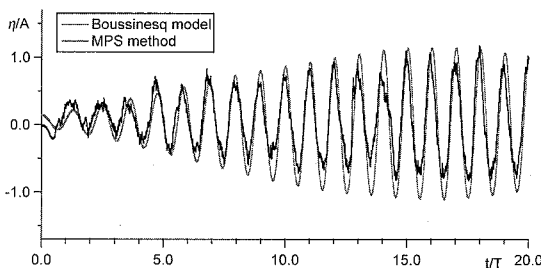


図-8 水位時系列 (case2)

低下が激しいことが原因の一つと考えられる。しかし、二つのモデル間で最大の水位差を記録した $t/T=13.5$ においても、水位差は粒径の 0.8 倍程度であることから、

解像度を粗く設定したことにも関連している可能性がある。今後、高解像度による再計算が不可欠である。また、Boussinesq モデルによる計算の開始時刻は $t/T=-10.0$ であり、 $t/T=0.0$ での水位は 0.0 ではないが、その差は粒径の 0.3 倍程度であり、 $t/T=0.0$ を MPS 法による計算の開始時刻としても影響はないと考えた。

5. おわりに

本研究では、中小領域の波浪場における水理現象を対象とする再現計算に幅広く対応できる汎用的な数値造波水槽を構築するために、平面 2-D Boussinesq モデルと 3-D MPS 法を融合し、両者の境界接続方法を提案した。一様水深の造波水槽で造波に関する基礎的な検討を行った結果、両者の水面形は良好に一致しており、境界接続方法の有効性が示されたといえる。

今後は、砕波を伴う浅海域における本稿のカップリングモデルの有効性を検討したい。さらに、構造物からの反射の影響の無視できない波浪場を解析する場合には、MPS 計算の結果を Boussinesq モデルに反映させる two-way カップリングが必要である。防波堤やケーソン護岸周辺の海域を計算対象とすることも想定し、two-way カップリングについても対応を急ぎたい。

参考文献

- 池田博和・越塚誠一・岡 芳明(1998)：粒子法において局所的に空間分解能を調節するための非均一粒子モデルの開発，第 9 回計算流体シンポジウム講演論文集，pp. 461-462.
- Eric Cruz・横木裕宗・磯部雅彦・渡辺 晃(1993)：非線形波動方程式に対する無反射境界条件について，海岸工学論文集，第 40 巻，pp. 46-50.
- 越塚誠一(2005)：粒子法，丸善，144 p.
- 後藤仁志・五十里洋行・酒井哲郎・奥田一弘(2006)：粒子法と Boussinesq モデルのハイブリッド化に関する基礎的研究，水工学論文集，第 50 巻，pp. 1453-1458.
- 平山克也(2002)：非線形不規則波浪を用いた数値計算の港湾設計への活用に関する研究，港湾空港技術研究所資料，No.1036，162p.
- Gotoh, H., H. Ikari, T. Memita and T. Sakai (2005) : Lagrangian Particle Method for Simulation of Wave Overtopping on a Vertical Seawall, Coastal Eng. J., Vol. 47, Nos. 2-3, pp. 157-181.
- Koshizuka, S., H. Tamako and Y. Oka (1995) : A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation, Comp. Fluid Dyn. J., Vol.4, pp. 29-46.
- Madsen, P. A. and O. R. Sørensen (1992) : A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Part2, A slowly-varying bathymetry, Coastal Eng., Vol. 18, pp. 183-204.