

拡張ベイズ法の非線形化による CT 型濁度計逆解析の高精度化

小林智尚*・橋本 潤**

対象断面内の濁度分布をほぼ瞬時にかつ時系列的に連続計測可能な CT 型濁度計では, 計測される透過光減衰量から空間濁度分布を推定する逆解析手法も計測・解析精度上重要となる。ここでは逆解析手法に拡張ベイズ法を適用し, さらに指数関数で濁度を表現した。これによりこの逆解析手法は非線形となるが, 濁度の解析値としてあり得ない負値の発生を回避できる, 特に局所的な高濃度領域の再現性が向上, などにより解析再現精度の向上が図れた。さらにこの手法を用いて疑似的な濁度分布から生成した計測データ, および実際の室内実験データを逆解析した結果, 高精度の解析値を得ることができ, この解析手法の有効性が確認できた。

1. はじめに

浮遊砂など, 流体中の浮遊物質の濃度分布などの計測に濁度計は必要不可欠な計測器である。しかし従来の光学式濁度計は点計測であるため, 一般に空間的な広がりを持って移流する浮遊砂などの移動形態を捉えるには不十分であった。これに対して佐藤ら (1997) は任意の断面内の濁度分布をほぼ瞬時に計測できる新しいタイプの濁度計, CT 型濁度計を考案した。宇野ら (2002) はこの CT 型濁度計を用いて碎波帯内で巻き上げられる底質の空間分布を時系列的に計測し, この運動特性を把握すると共に, この濁度計の有用性を示した。CT 型濁度計による測定では, 計測生データから計測対象断面内の濁度分布を逆解析により推定する必要がある。そしてこの濁度計の計測精度はハードウェアのみならず, この逆解析手法にも大きく依存する (小林・松下, 2002)。これまでこの濁度計の逆解析手法として, グリーン関数法の一つである仮想荷重法 (日野, 1998) や拡張ベイズ法 (小林・松下, 2002) が適用されている。しかしながら, これらの逆解析手法は線形モデルであるために濁度分布の値に負値を導出することがある, など, 濁度分布の再現性は必ずしも十分ではなかった。そこで本研究では, この CT 型濁度計の逆解析手法として, 拡張ベイズ法に非線形モデルを組み込み, 計測対象断面内の濁度分布推定精度の向上を試みる。

2. CT 型濁度計

CT 型濁度計の構成を図-1 に示す。この図に示すように, 濁度計は複数の発光素子 (レーザダイオード) が一列に配置されている発光部と, 同様に複数の受光素子 (フォトダイオード) が一列に配置されている受光部が

相対して並んでいる。濁度分布の計測対象断面はこの発光部と受光部を両辺とする長方形の断面である。発光部の各発光素子から発せられた光は計測対象断面内を通過する過程でその濁度によって減衰し, 受光部の各受光素子に取得される。この様に受光素子では対象断面内の濁度による透過光の減衰量である。そこで次にこの透過光減衰量の情報から逆推定手法を用いて計測対象断面内の濁度分布を推定する。現在, 発光素子・受光素子とも 32 素子を配置しており, 対象断面内で 15 mm 間隔, 32×32 の格子での濁度分布が計測・推定可能となっている。また断面内濁度分布の計測時間間隔は約 1/10 秒である。

3. 逆解析法

(1) 基礎方程式

輝度 I の光が濁度 C の領域を距離 L の経路を進む場合, 光の減衰量 dI/dL は

$$\frac{dI}{dL} = -\kappa CI \dots \dots \dots (1)$$

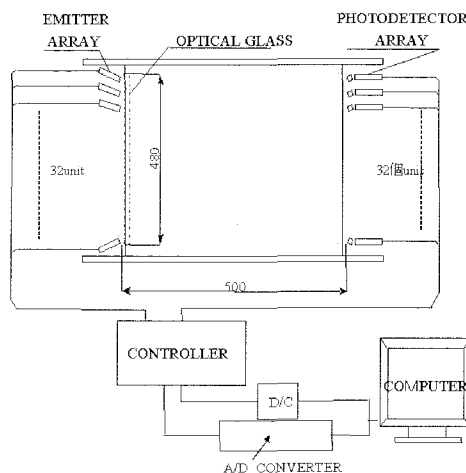


図-1 CT 型濁度計の構成

* 正 会 員 博 (工) 岐阜大学助教授 大学院工学研究科環境エネルギーシステム専攻

** 修 (工) NPO 法人 FC10 ミニッツ

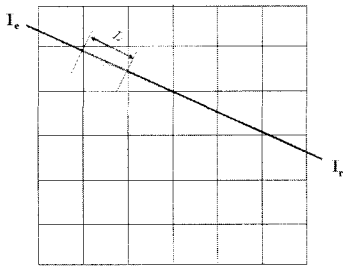


図-2 光学経路と濁度分布解析のための空間格子
(図の格子数は6×6)

と表すことができる。ここで κ は懸濁物質の光学的物理定数である。この式より CT 型濁度計では、

$$-\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{I_r}{I_e} \right) = \int_{x_e}^{x_r} C(x, y) ds \quad (2)$$

となる。ここで、 I_e 、 I_r はそれぞれ発光素子の発光輝度、受光素子での受光輝度である。また x_e 、 x_r は発光素子と受光素子の空間位置ベクトルを、 $C(x, y)$ は濁度の空間分布を、 $\int ds$ は光学経路に沿った積分を表す。

ここで図-2 の様に、計測空間を格子状に離散化し、各格子内での濁度 $C(x, y)$ は一定とする。すると式 (2) は

$$R_{i_e, i_r} = \sum_{i_x, i_y} L_{i_e, i_r; i_x, i_y} C_{i_x, i_y} \quad (3)$$

と表すことができる。ここで R_{i_e, i_r} は

$$R_{i_e, i_r} = -\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{I_r}{I_e} \right) \quad (4)$$

であり、 i_e 番目の発光素子と i_r 番目の受光素子で作られる光学経路上での光の減衰特性をあらわす。また C_{i_x, i_y} は格子番号 (i_x, i_y) での濁度を表す。そして $L_{i_e, i_r; i_x, i_y}$ は発光素子 i_e と受光素子 i_r で作られる光学経路が格子 (i_x, i_y) を横切る長さを表す。

すべての光学経路に関する式 (3) は次のように表される。

$$(R_{i_e, i_r}) = (L_{i_e, i_r; i_x, i_y}) (C_{i_x, i_y})$$

$$R = LC \quad (5)$$

ここで、光学経路の数を m 、全格子数を n とすると、 R は m 次元の各光学経路の光の減衰特性ベクトル、 L は m 行 n 列の格子内を横切る光学経路長係数行列、 C は n 次元の格子濁度分布ベクトルである。

CT 型濁度計ではこの式 (5) を解き、計測値 R から濁度分布 C を逆解析により求める。

(2) 拡張ベイズ法

本節で述べる拡張ベイズ法は式 (5) を直接解いて濁度分布 C を求めていることから、後に述べる非線形モ

デルと区別するため、ここでは線形モデルと呼ぶ。

ベイズ法では基礎方程式となる観測モデルと先験情報による先験情報モデルとで構成される。

観測モデルは誤差を考慮した基礎方程式で、CT 型濁度計の解析の場合には式 (5) に誤差を考慮して、

$$R = LC + \varepsilon \quad (6)$$

と表される。ここで ε は観測モデルの誤差ベクトルで、平均 0 、共分散 $\sigma_\varepsilon^2 V_\varepsilon$ の正規分布に従うとする。

一方、先験情報モデルには Honjo・Kashiwagi (1991) により提案されたスミージングフィルタを適用した。このフィルタではある格子の濁度 C_{i_x, i_y} を隣接する 4 つの格子の濁度の平均値と誤差 δ で以下のように表す。

$$C_{i_x, i_y} = \frac{1}{4} (C_{i_x, i_y-1} + C_{i_x-1, i_y} + C_{i_x+1, i_y} + C_{i_x, i_y+1}) + \delta \quad (7)$$

これより先験情報モデルでもある、全格子に関するスミージングフィルタは次のように表わされる。

$$TC = \delta \quad (8)$$

ここで、 T は式 (7) の濁度 C の係数による係数行列である。また誤差ベクトル δ は先験情報の不確実性を表す確率変数で、その平均は 0 、共分散は $\sigma_\delta^2 V_\delta$ とする。

観測モデル式 (6) および先験情報モデル式 (8) から、拡張ベイズ法に従い (たとえば、応用力学委員会逆問題小委員会, 2000) 式を整理すると、ベイズ推定量 $\hat{C}$ は

$$\hat{C} = (D^T V_\varepsilon^{-1} D)^{-1} D^T V_\varepsilon^{-1} z \quad (9)$$

より求められる。ここで、

$$z = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} L \\ \lambda T \end{bmatrix}, \quad V_\varepsilon = \begin{bmatrix} V_\varepsilon & 0 \\ 0 & V_\delta \end{bmatrix} \quad (10)$$

である。また λ は観測データの情報と先験情報の相対的な重みを表すパラメータで次式で定義される。

$$\lambda_2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\delta^2} \quad (11)$$

(3) 赤池ベイズ情報量基準 (ABIC)

未知パラメータ λ を求めるために、赤池ベイズ情報量基準 (ABIC) を導入する。前節で導出した線形の拡張ベイズ法では、ABIC は次のように定式化される。

$$ABIC = n \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) - 2n \ln \lambda + n \ln(2\pi) - \ln |V_\varepsilon^{-1}| - \ln |V_\delta^{-1}| + n + 2 \dim(\lambda) \quad (12)$$

式中、 $\dim(\lambda)$ はベイズモデルでの未知パラメータ (超パラメータ) の数である。また $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ は次式より求められる。

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n} (\mathbf{z} - \mathbf{D}\hat{\mathbf{C}})^T \mathbf{V}_z^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{D}\hat{\mathbf{C}}) \dots\dots\dots (13)$$

式 (9) 中の λ の最適値は、式 (12) の ABIC の値を最小化するものである。

(4) 拡張ベイズ法への非線形モデル導入

前節で定式化した拡張ベイズ法では式 (6), (8) の観測モデル、先験情報モデルともに線形であり、拡張ベイズ法導出の過程でも求めるべき濁度 $C_{ix, iy}$ に正負の拘束条件を与えていなかった。このため、この線形モデルでは解として負値の濁度を導出することがある。この負値は濁度という物理量としてあり得ないだけでなく、その地点近傍の濁度分布の逆推定精度低下の大きな要因となる。そこでここでは次式のように指数関数を導入し、逆推定される濁度に負値が生じない拘束条件を加えた。

$$C_{ix, iy} = \exp p_{ix, iy} \dots\dots\dots (14)$$

これに伴い、前節の観測モデル式 (6) と先験情報モデル式 (8) は次式の通りとなる。

$$\text{観測モデル: } \mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{Q} + \boldsymbol{\varepsilon} \dots\dots\dots (15)$$

$$\text{先験情報モデル: } \mathbf{TP} = \boldsymbol{\delta} \dots\dots\dots (16)$$

ここで $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ はそれぞれ $p_{ix, iy}$ または $\exp p_{ix, iy}$ を要素とするベクトルである。ここで観測モデル式 (15) は求めるべき変数 $p_{ix, iy}$ に対して非線形であるので、この $p_{ix, iy}$ を Taylor 展開して 1 次の項まで採ることにより線形化する。そして前節と同様に拡張ベイズ法を適用する。これより、 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ を求める式 (13) は次式のように書き換えられる。

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n} (\mathbf{z}' - \mathbf{D}'\hat{\mathbf{P}}')^T \mathbf{V}_z^{-1} (\mathbf{z}' - \mathbf{D}'\hat{\mathbf{P}}') \dots\dots\dots (17)$$

ここで

$$\mathbf{z}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R} - \mathbf{L}\mathbf{Q}_0 \\ \lambda \mathbf{TP}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}' = \begin{bmatrix} \mathbf{L}\mathbf{Q}_0 \\ -\lambda \mathbf{T} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

である。また $\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0, \mathbf{P}'$ はそれぞれ $p_{0ix, iy}, \exp p_{0ix, iy}, p'_{ix, iy}$ を要素とするベクトルである。

この非線形モデルでは、式 (12), (17) から ABIC が最小となる λ を決定し、 $\mathbf{P}'$ を求めてベクトル $\mathbf{P}_0$ を逐次更新する。そして式 (14) より濁度分布 $C_{ix, iy}$ を得る。

(5) $\mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\delta$ の決定

観測モデル式 (6), (15) に用いられる誤差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は受光素子で得られる透過光減衰量の計測誤差である。この確率誤差分布は光学経路長 $L_{i_0, i_r; i_x, i_y}$ に依存する。一方誤差ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ の共分散は $\varepsilon^2 \mathbf{V}_\varepsilon$ と表されるので、 $\mathbf{V}_\varepsilon$ は相対的誤差分布を表す行列と見なせる。そこで $\mathbf{V}_\varepsilon$ は各光学経路長の 2 乗 $L_{i_0, i_r; i_x, i_y}^2$ を要素とする対角行列とした。

一方先験情報モデル式 (8), (16) に用いられている

誤差 δ に関する行列 $\mathbf{V}_\delta$ には単位行列を適用した。

4. 逆解析モデルを用いた解析

(1) 疑似データによる解析手法の検証

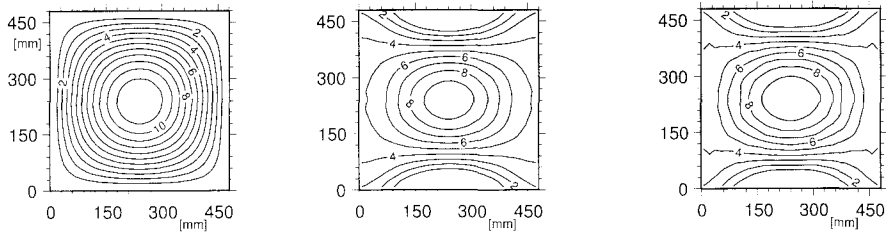
前節で述べた拡張ベイズ法に基づく非線形モデルを実際の逆解析に適用し、その有用性について確認する。

まず、CT 型濁度計で計測される透過光減衰量のデータを疑似的に生成し、このデータを前節で述べた逆解析手法で再現することにより、この手法の再現性を検討する。疑似的に生成される透過光減衰量のデータは、実際の CT 型濁度計と同様に、発光素子・受光素子数とともに 32 素子とし、推定濁度分布の格子数を 32×32 とした。

図-3 には、計測対象断面内中央に高濃度の濁度が存在する透過光減衰量疑似データの解析結果を示す。図中では (a) 対象となる疑似濁度分布データ、そこから透過光減衰量に変換し (b) 線形モデルで逆解析して得られた濁度分布、および (c) 非線形モデルを適用した結果を示している。これらの図では発光部が左側に、受光部が右側に配置されているものとしている。一方図-4 は、計測対象断面内の対角の位置 2 点に高濃度の濁度が存在する場合における、同様の解析結果である。

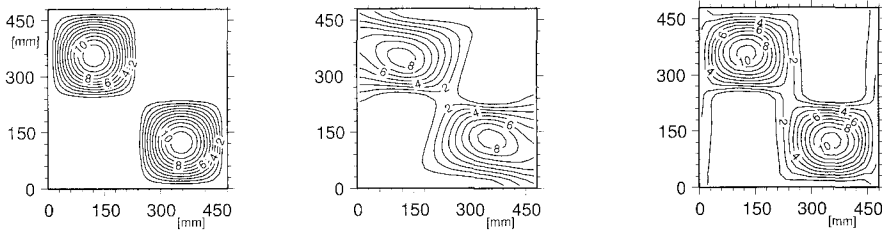
図-3 において、(a) 対象の疑似濁度分布では計測断面四辺境界上で濁度がゼロとなっているが、逆解析結果では (b) 線形モデル、(c) 非線形モデル適用時共に、発光部および受光部側 (図の左右) の測定断面境界上で濁度が過大に再現されている。逆に断面中央の高濃度域では逆解析値は小さく、その側方域 (図中の上下) でも過小評価されている。これは小林・松下 (2002) が指摘している通り、CT 型濁度計では発光部と受光部の各素子が平行に配置されているため、この素子配置方向と平行な方向に様な濁度分布は原理的に検出できないためである。

一方、二つの高濃度領域を有する疑似濁度分布を対象とした解析結果、図-4 では (b) 線形モデルと (c) 非線形モデルによる逆解析精度に明確な差が現れている。この図の (b) 線形モデルによる解析結果では高濃度域近傍の発光部または受光部付近 (図中の右側上および左側下) で濁度を過大に評価している。また疑似濁度分布の高濃度ピーク付近の値が小さくなると共に、高濃度領域が広がり、鮮明さのない逆解析結果となっている。またこの逆解析結果では負値の濁度が推定された領域があった。ただし図中ではあり得ない値としてゼロに置き換えている。この負値の濁度の発生は周辺領域での推定濁度の精度にも大きく影響していた。これに対して (c) 非線形モデルでは計測断面の発光部側および受光部側 (図の左右側) で、素子配置方向に様にやや過大に濁度を推定しているものの、対象の疑似濁度分布の高濃度領域の



(a) 解析対象疑似濁度分布 (b) 線形モデルによる解析結果 (c) 非線形モデルによる解析結果

図-3 疑似濁度分布の逆解析結果 (断面中央部に高濃度領域が存在する場合)



(a) 解析対象疑似濁度分布 (b) 線形モデルによる解析結果 (c) 非線形モデルによる解析結果

図-4 疑似濁度分布の逆解析結果 (断面対角部2点に高濃度領域が存在する場合)

値やその分布形をほぼ再現していることがわかる。

図-3, 4のほか, 数種類の疑似濁度分布に対する逆解析も実施した結果, 本研究で提案する非線形モデルでは特に複雑な分布形を有する濁度分布での再現が改善されていることが分かった。これは, このモデルでは式(14)に示すように濁度 C を変数 p の指数関数として表現し, 先験情報モデル式(16)ではこの変数 p に対してスムージングフィルタを適用したので, 特に局所的な高濃度領域の再現性が向上したためと考えられる。

また誤差ベクトルに関する行列 V_e についても検討した。小林・松下 (2002) はこの V_e に単位行列を適用した。これに対して本研究では光学経路長からこの誤差ベクトルを評価している。両者による解析結果を比較した結果, 光学経路長から V_e を評価することによりさらに逆推定結果の精度向上が見られた。ただし精度向上に対する寄与は, 非線形モデル導入の方が大きかった。

以上の通り, CT型濁度計に用いる逆解析として拡張ベイズ法に非線形モデルを適用した手法を用いることにより, 妥当な濁度分布が推定できることが確認できた。

(2) 室内実験計測への適用

次に浮遊砂の室内実験にCT型濁度計を適用し, この逆解析手法が有効であるかを検証した。ここでは宇野ら (2002) によって得られた計測データを用いる。実験は

図-5に示す幅0.5 mの水槽を用い, 砕破帯に位置する1/20勾配スロープ上に底質砂を敷き, その直上断面での濁度分布をCT型濁度計により計測することで, 砕波乱流による底質の巻き上げ現象を検出する試みである。この実験の詳細は宇野ら (2002) を参照されたい。

この実験での逆解析結果の一例を図-6に示す。図には逆解析手法として(a)線形モデルおよび(b)非線形モデルを用いて解析された浮遊砂濁度分布を0.1秒間隔の時系列として並べている。CT型濁度計の発光部および受光部は各図の上端または下端側に配置されており, 波は図の左側から入射している。この図では巻き上げられた底質による高濃度領域が波動中の水粒子運動により移流している様子が捉えられている。

この(a)線形モデルと(b)非線形モデルによる逆解析結果では高濃度領域の位置はほぼ対応しているが, その濁度分布形では非線形モデルによる解析結果で鮮明に現

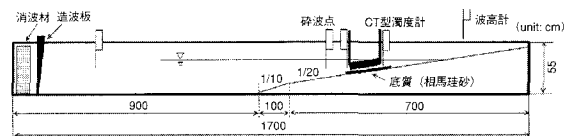


図-5 2次元実験水槽 (宇野ら, 2002)

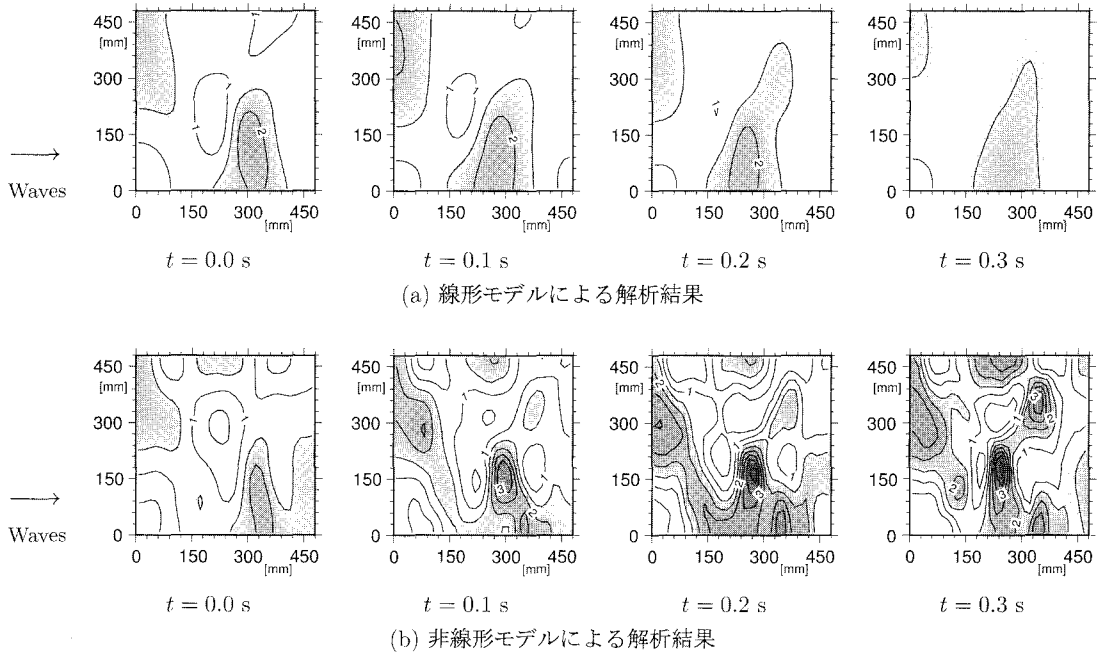


図-6 破碎帯内での浮遊砂濁度時系列分布

れていることがわかる。これは前述の通り、指数関数の導入で特に局所的な高濃度領域の再現が可能になったためと考えられる。

このように、CT 型濁度計に本研究で提案する非線形逆解析モデルを適用することにより、計測断面内での濁度分布を時系列的に捉えることが可能となる。

5. おわりに

CT 型濁度計は対象断面内の瞬間濁度分布を時間的に連続して計測できる新しいタイプの濁度計である。本研究ではこの CT 型濁度計で計測される透過光減衰量から計測対象断面内の濁度分布を逆推定する手法として、拡張ベイズ法に指数関数を導入して非線形化したモデルを構築した。そしてこの逆解析手法の特性を把握するため、擬似的に作成した濁度分布データの逆解析、および室内実験計測値の逆解析を試みた。その結果、CT 型濁度計に用いられている従来の逆解析手法に比べて精度が改善され、鮮明な解析結果を得ることができた。これは逆解析手法に指数関数を導入することにより、実際にはあり得ない負値の解析濁度の発生を避けると共に、特に局所的な高濃度領域の再現性が向上したためである。これによりこの逆解析手法が有用であり、これを採用した CT 型濁度計は計測対象断面内の濁度分布を再現しうる計測

器であることが示せた。

謝辞：本研究を行うにあたって、東京海洋大学教授、岡安章夫先生、(株)エコー、宇野喜之氏から貴重な実験データをご提供頂きました。また東京工業大学名誉教授、日野幹雄先生には CT 型濁度計をご提供頂き、また有益な助言も頂きました。ここに謝意を表します。

参考文献

- 宇野喜之・岡安章夫・小林智尚・島谷学 (2002) : CT 型濁度計による碎波帯内底質巻き上げに関する実験的研究, 海岸工学論文集, 第49巻, pp. 431-435.
- 応用力学委員会逆問題小委員会(2000) : 土木工学における逆問題入門, 土木学会, 158p.
- 小林智尚・松下裕昭 (2002) : 仮想荷重法と拡張ベイズ法を用いた CT 型濁度計の濃度分布逆推定法, 海岸工学論文集, 第49巻, pp. 1526-1530.
- 佐藤行成・常見 亮・日野幹雄(1997) : CT 型レーザー土砂濃度分布計の試作, 水工学論文集, 第41巻, pp. 1091-1096.
- 日野幹雄・佐藤行成(1998) : CT 型レーザー濃度計—仮想荷重法の応用による逆問題の解—, 水工学論文集, 第42巻, pp. 565-570.
- Honjo, Y. and N.Kashiwagi (1991) : On the optimum design of a smoothing filter for geophysical tomography, Soils and Foundations, Vol.31, No.1, pp. 131-144.