

重合ソロバン格子法による自由表面境界層の数値解析

陸田秀実*・常山鉄平**・土井康明***

風波に代表されるような碎波を伴う自由表面境界層は、数 mm～数 m のマルチスケールな流体現象であり、時間スケールも大幅に異なる。このような複雑な自由表面境界層の数値解析に対して、粒子法に代表される Lagrange 的手法を適用することは難しく、格子網に工夫を加えた Semi-Lagrange 的手法が有用である。特に、自由表面境界層付近の格子生成は、不等間隔格子による解の精度低下、高解像度による計算負荷の増大、界面極近傍の渦構造や碎波の再現性に大きな影響を与える。本研究では、重合格子法とソロバン格子法の併用によって、自由表面の複雑さに合わせて、必要な計算点を局所的に再配置し、計算格子網を再構成する数値計算法を新たに提案し、本手法の自由表面境界層への適用性を検討したものである。

1. はじめに

風波に代表されるような碎波を伴う自由表面境界層は、数 mm～数 m のマルチスケールな流体現象であり、かつ、時間スケールも大幅に異なるため、数値流体力学のアプローチを困難なものにしている。このような複雑な自由表面境界層問題に対して格子生成する場合、不等間隔格子による解の精度低下、高解像度による計算負荷の増大、界面極近傍の渦構造や碎波の再現性に大きな影響を与えるため、格子生成にかなりの工夫が必要となる。

近年、格子法と粒子法の利点を併せ持つ結合タイプの手法の提案がなされ、より複雑な計算問題に対して、柔軟に対応できる新手法 (Enright ら, 2002; Liu ら, 2003; 亀井ら, 2004) の開発が進められている。特に、Yabe ら (2004) が提案したソロバン格子法は、動的境界適合格子形成法の一つでありながら、CIP 法との組み合わせによって、かなり自由に計算点を移動させることが可能であり、メッシュフリースキームに近い格子法として注目されている。この方法は、物理量の局所の変化を高精度で捕捉するために、必要な領域に必要なだけ適切に計算点を再配置することで、局所的に計算解像度をあげ、複雑な界面変形にも柔軟に対応できる手法である。

本研究では、Steger ら (1983) によって提案された重合格子法とソロバン格子法の併用によって、自由表面の複雑さに合わせて、必要な計算点を局所的に配置し、計算格子網を再構成する数値計算法を新たに提案し、本手法の自由表面境界層への適用性を検証する。

2. 数値計算法

(1) 支配方程式とその解法

支配方程式は、以下に示す質量保存式、非圧縮 Navier-Stokes 方程式、 I 相の密度関数 $\phi_I (0 \leq \phi_I \leq 1)$ の移流方程式である。ここで、 I 相とは、気相、液相、固相を意味する。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_i \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial t} + \frac{\partial (\phi_I u_j)}{\partial x_j} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

また、これらの支配方程式の解法には、Yabe ら (1991) によって提案された C-CUP 法に倣い、移流相と非移流相に分けた時間分離解法を採用する。まず始めに、移流相の計算の後、以下のポアソン方程式から $n+1$ 時刻の圧力を計算し、最後に非移流計算を行う。

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla P^{n+1}}{\rho^*} \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $*$ は移流後の計算値を示す。

次いで、得られた流速場を基に、密度関数の移流計算を行う。なお、流体の物性である密度および粘性係数は、密度関数を用いて下式によって求めた。

$$\rho = \sum_{I=1}^3 \rho_I \phi_I \dots\dots\dots (5)$$

$$\mu = \sum_{I=1}^3 \mu_I \phi_I \dots\dots\dots (6)$$

(2) 重合ソロバン格子法

本研究の格子生成法の特徴は、重合格子法とソロバン格子法の併用によって異相界面の高精度な追跡が可能となる点にある。

重合格子法 (Steger ら, 1983) は、複数の格子を重ねあわせてそれぞれの格子間で情報を交換しながら流れ

* 正 会 員 博(工) 広島大学助教授大学院工学研究科社会環境システム専攻

** 広島大学大学院工学研究科社会環境システム専攻

*** 正 会 員 工博 広島大学教授大学院工学研究科社会環境システム専攻

場を解く方法である。この方法は、複雑な形状の物体周りに一つの構造格子だけで格子生成する場合、格子の歪みが大きくなることや、一部分の格子の影響が他の部分に及ぶ等の問題が生じてしまうことを解消するために考えられたものである。このようにすると、各格子間で格子点や格子面を一致させる必要はなく、それぞれの格子をかなり独立に格子生成することができる。

一方、ソロバン格子法 (Yabe ら, 2004) は、動的境界適合格子生成法の一つで、複雑な移動境界面を認識できる以下のようなモニター関数 M を導入することによって、物理量 f の空間微分の大きい場所に集中的に計算格子点を自動配置することが可能となる方法である。

$$M(x_i, t) = \left\{ 1 + \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right\}^{1/2} + \beta \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right)^2 \dots \dots \dots (7)$$

ここで、 α, β は格子間距離を調整するパラメータである。また、このモニター関数 M を x_i 方向に積分した累積モニター関数を定義し、この関数を格子数に応じて等分割することによって、以下のような式が得られる。

$$M_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} M(x, t) dx = \frac{1}{N} \int_{x_1}^{x_N} M(x, t) dx \dots (8)$$

上式より、この分割に対応する x_i 座標が格子点の位置となり、自動的に物理量の変化が大きいところ、すなわち、累積モニター関数の勾配が大きいところで、 x_i 座標は集中的に生成される。

この方法は、図-1 に示すように、ある方向に対してのみ、すべて垂直な直線上をスライドしながら計算点が動くことが可能な特殊格子系である。これによって、後述する M 型 CIP 法の適用が簡単になるだけでなく、直線上の格子点数を自由に変化させる事ができる。

(3) 重合ソロバン格子法による格子配置の具体例

本研究で適用する重合ソロバン格子法は、計算領域全体に主格子 (以下、Main-grid) を配置するとともに、非定常に変化する自由表面に物体適合型補助格子 (以下、

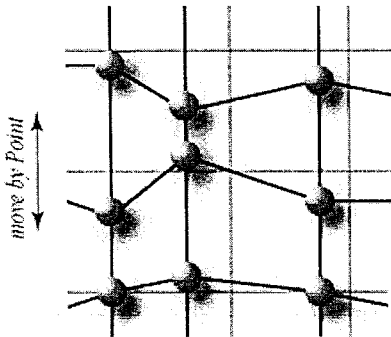


図-1 重合ソロバン格子の概念図

Sub-grid) を重ねて配置する。また、Main-Grid は固定格子系とする一方で、Sub-Grid は、自由表面の形状に合わせてソロバン格子法を適用し、毎時刻、必要な場所に必要だけ格子網の再構成を行う。図-2 は、自由表面を捕捉する Sub-Grid にソロバン格子を適用した例である。自由表面の変形に追従して、表面付近に格子が集中していることが分かる。なお、自由表面変位の卓越方向が y 方向であることを考慮して、計算点の移動は、 y 方向にのみ行うものとし、 x 方向の格子線は固定している。

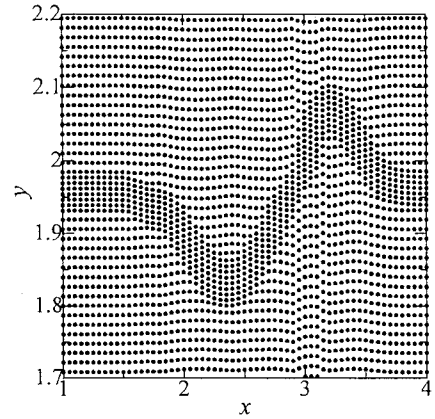


図-2 自由表面に対するソロバン格子法の適用例

(4) 高精度な移流計算

本研究では、流速・圧力場を計算する Main-Grid に対して CIP-CSL2 法、密度関数を追跡する Sub-Grid に対して M 型 CIP 法をそれぞれ適用し、高精度な移流計算を行っている。

CIP-CSL2 (Conservative Semi-Lagrangian) 法とは、数学的に保存が保証される CIP 法で、Nakamura ら (2002) によって提案されたものである。通常の CIP 法は、物理量 f とその微分値を用いて 3 次補間関数を構築するが、CIP-CSL2 法は、物理量 f とその積分値 ρ を用いて 2 次関数を構築するものである。そこで、

$$D_i(x) = \int_{x_i}^x f(x') dx' \dots \dots \dots (17)$$

を導入し、

$$D_i(x) = A1_i X^3 + A2_i X^2 + f_i^n X \dots \dots \dots (18)$$

$$\begin{cases} X = x - x_{i-1/2} \\ f_{i-1/2} = f(x_{i-1/2}) \end{cases}$$

ここで、 $A1_i$ および $A2_i$ は以下の通りである。

$$A1_i = \frac{f_{i-1/2}^n + f_{i+1/2}^n}{\Delta x^2} + \frac{2 \text{sgn}(u) \sigma_{icell}^n}{\Delta x^3} \dots \dots \dots (19)$$

$$A2_i = -\frac{2f_{i-1/2}^n + f_{i+1/2}^n}{\Delta x} - \frac{3 \text{sgn}(u) \sigma_{icell}^n}{\Delta x^2} \dots \dots \dots (20)$$

$$\sigma_{icell} = |D_i(x_{1i}) - D_i(x_{i-1/2})|$$

物理量 f と積分値を 3 次関数で補間すれば、その微分に対応する値の関数は、

$$F_i(x_i - u\Delta t) = \frac{\partial D(x)}{\partial x} = 3A_1 X^2 + 2A_2 X + f_i^n$$

$$X \equiv x - x_i \dots\dots\dots (21)$$

と書くことができる。

物理量 f と積分値 ρ の時間発展は、2 次元の場合、以下の方程式を移流相と非移流相に分離して解くことにより行う。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (uf)}{\partial x} + \frac{\partial (vf)}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (22)$$

$$\frac{\partial D'}{\partial t} + \frac{\partial (uD')}{\partial x} + \frac{\partial (vD')}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

$$\rho_{i-1/2}^{n+1} = \rho_{i-1/2}^n + (\Delta \rho_{i-1}^n - \Delta \rho_i^n) \dots\dots\dots (24)$$

$$\Delta \rho_i^n = \int_{x_i+\xi}^{x_i} F(x') dx' = -D_i(x_i+\xi) \dots\dots\dots (25)$$

$$= -(A_1 \xi^3 + A_2 \xi^2 + f_i^n \xi)$$

$$\xi = -u_i \Delta t \dots\dots\dots (26)$$

なお、積分値 ρ および関連の線密度 σ は以下のよう
に定義される。

$$\rho_{ij}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y, t) dy dx \dots\dots\dots (27)$$

$$\sigma_{xij}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y, t) dx \dots\dots\dots (28)$$

$$\sigma_{yij}^n = \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y, t) dy \dots\dots\dots (29)$$

一方、M 型 CIP 法とは、通常良く使用されている多次元空間に 3 次多項式を形成する方法を A 型 CIP 法と呼ぶのに対して、ある方向にのみ CIP 法を適用し、その他の方向には 1 次風上差分（1 次補間）を適用する方法の事をいう。この方法は、先に示したソロバン格子との併用によって、高精度な移流計算が可能となる。

(5) 格子間の物理量の補間

計算時に各格子間で逐次更新される物理量は、互いに補間する必要がある。本研究では、2 次元場であることを考慮して、これを囲む 4 点の Main-grid でその物理量を最小二乗法により補間し、逆に、Sub-grid 内部の点で囲まれる Main-grid は Sub-grid の値により補間した。以下に、最小二乗法による物理量 f の補間式を示す。

$$f_{isg} = a_0 + a_1 x_{isg} + a_2 y_{isg} + a_3 z_{isg} \dots\dots\dots (30)$$

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i & \sum z_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i z_i \\ \sum y_i & \sum y_i x_i & \sum y_i^2 & \sum y_i z_i \\ \sum z_i & \sum z_i x_i & \sum z_i y_i & \sum z_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f_i \\ \sum f_i x_i \\ \sum f_i y_i \\ \sum f_i z_i \end{pmatrix}$$

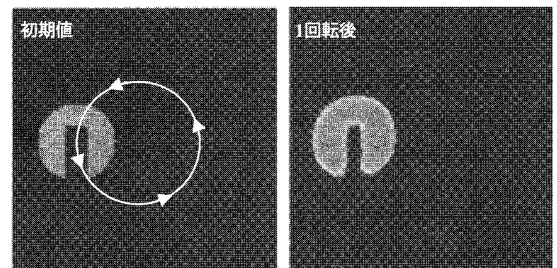
なお、本研究では、補間する物理量 f は、Main-Grid から Sub-Grid へは流速・圧力、Sub-Grid から Main-Grid へは密度関数であり、毎時刻、必要格子点に補間操作を行う。なお、2 次元の場合、 $n=4$ となる。

(6) 重合ソロバン格子法による移流精度の検証

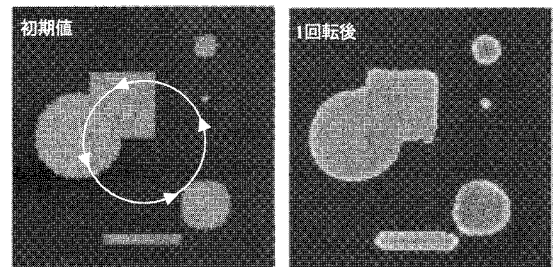
図-3 は、定常な回転流場において、重合ソロバン格子法の移流精度を検証したものである。計算領域全体に Main-Grid を配置するとともに、物体ごとに Sub-Grid を 1～5 個配置した。また、Sub-Grid 内においてソロバン格子法による異相界面の捕捉を行うとともに、物体の重心移動に応じて Sub-Grid は移動するものとした。図より、1 回転後、物体形状をほぼ保持したまま高精度な移流計算が行われていることが分かる。なお、界面幅はほぼ全ての場所で 2～3 メッシュ程度に収まっており、数値拡散はほとんど起こらないことが分かる。

(7) 計算アルゴリズム

計算アルゴリズムは、前述したように多相流場の統一解法である C-CUP 法を適用し、Main-Grid と Sub-Grid 間の物理量の補間及び Sub-Grid 内の格子再生成は毎時刻行うものとする。なお、Coarse-Grid である Main-Grid において流速・圧力場を計算し、Fine-Grid である Sub-Grid において密度関数を計算するため、時間刻みは格子解像度に合わせて、各 Grid で別々に設定し、時間スケールの異なる流体現象を同時に取り扱うことを可能にしている。つまり、下式に示すように Main-Grid で 1 ステップ計算される間に、Sub-Grid で



(a) Zalesak 問題



(b) 複数物体の問題

図-3 重合ソロバン格子法の移流精度の検証

は N_s ステップの計算を行うものとし、その間、Main-Grid の物理量は一定として取り扱うものとする。

$$\Delta t_m = N_s \Delta t_s \dots \dots \dots (31)$$

ここで、 Δt_m 及び Δt_s はそれぞれ Main 及び Sub-Grid の時間刻みを示す。

4. 数値計算結果

(1) 初期の格子配置

図-4 は、初期格子配置の具体例を示す。計算領域全体に Coarse-Grid である Main-Grid を配置し、自由表面付近に Fine-Grid である Sub-Grid を重ねて配置する。この時、自由表面変動は Sub-Grid 領域を超えることのないよう領域を適宜変更する必要がある。なお、先にも示したが、Main-Grid は固定格子とし、Sub-Grid にはソロバン格子を適用し、毎時刻、格子網が再構成される。

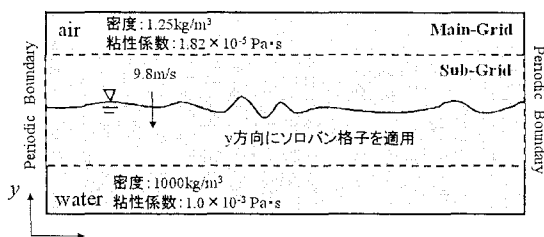


図-4 初期の格子配置

格子数は、Main-Grid : 100 × 60, Sub grid : 100 × 80 とし、初期の最大格子幅 5 cm, 最小格子幅 2.5 cm とした。ここで、Sub-Grid の格子点間隔は、Main-Grid の格子サイズの半分程度を基本とし、式 (7) 中の格子間距離の制御パラメータ $\alpha = 0.1$, $\beta = 0$ として、異相界面に格子を自動的に集中させている。

なお、空気と水の流体密度および粘性係数は実流体場と同様とし、時間刻み幅は 0.0005 s とした。

(2) 自由表面境界層への適用

図-5 および図-6 は、静水面付近に速度の微小攪乱を与え、気流速度 $U_m = 9.0$ m/s を作用させた場合の自由表面境界相の発達過程と自由表面境界層内に形成された組織渦を示したものである。図より、気流性状の変化に伴って自由表面（水面）が大変形し、その後、碎波、ジェット突入、再生波、しぶき等が再現されており、複雑な自由表面運動の追跡計算が可能であることが分かる。

図-7 は、Main-Grid および Sub-Grid の計算点の位置関係を示したものであり、△は Main-Grid の格子点、■は Sub-Grid の格子点をそれぞれ示している。

図から、自由表面の大変形やジェット放出による液

滴・連行気泡に合わせて、Sub-Grid ではかなり歪んだ格子網が自動生成され、計算が破綻することはなく、自由表面を追跡していることが分かる。なお、ジェット放出付近の Sub-Grid 格子網を図-8 に示す。この時の最小格子サイズは、0.5 cm であり、最大・最小格子サイズの比は約 10 倍程度であった。このことは、時間・空間スケールが大幅に異なる複雑流体現象に対して本手法を用いれば、解析領域を広領域に設定しつつ、局所的な自由表面変形を追跡することが可能であることを意味してい

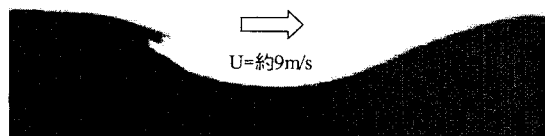


図-5 自由表面境界層の時間的变化

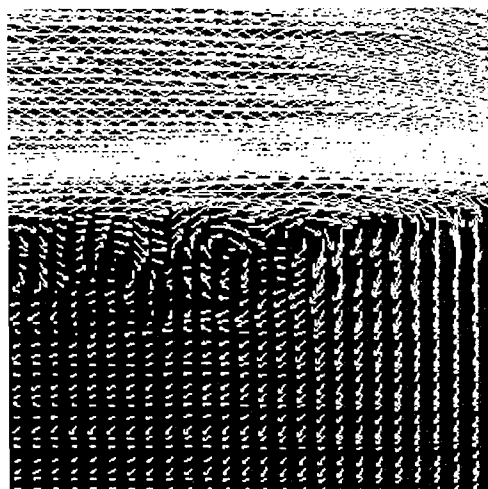


図-6 自由表面境界層の組織渦

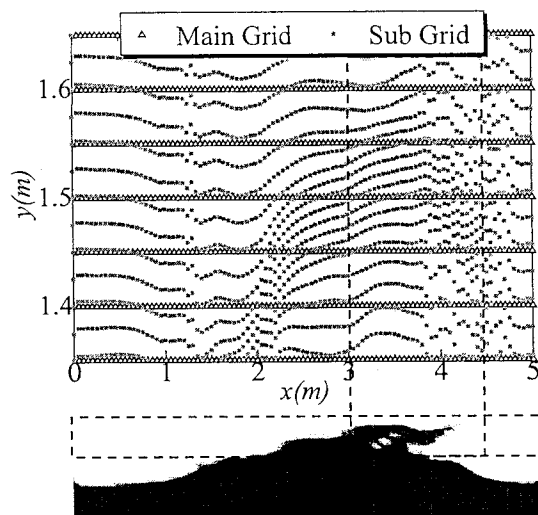


図-7 Main 及び Sub-Grid の計算格子点の位置関係

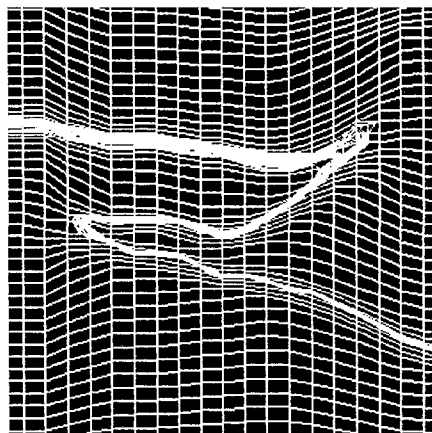


図-8 ジェット放出時の Sub-Grid の格子網

る。なお、同一計算条件下で格子数を4倍にした場合も行った結果、Coarse Gridであっても同様の界面変形が追跡できることが分かった。

5. おわりに

本研究では、重合格子法とソロバン格子法の併用によ

って、砕波を伴う自由表面の複雑形状に合わせて、必要な計算格子網を局所的に再構成する重合ソロバン格子法を提案した。また、本手法を自由表面境界層の問題へ適用し、その有効性を検証した。

その結果、最大・最小格子サイズ比は約10倍程度であっても、問題なく計算できるため、格子数の大幅な節約が可能となることが分かった。また、重合ソロバン格子法とCIP法の組み合わせによって、複雑に大変形する異相界面を、界面幅約2～3メッシュで高精度に捕捉できることが分かった。今後は、3次元への拡張、時間・空間スケールが大きくことなる風波を再現可能とする数値風洞水槽の開発を進める予定である。

謝辞：本研究は、科学研究費補助金（課題番号15360264, 16760411）の助成によるものであり、ここに謝意を表する。

参考文献

- 亀井卓也・白山 晋(2004)：MPS型局所補間法を用いた格子・粒子結合モデルについて、日本流体力学会年会講演論文集, pp. 116-117.
- Enright, D. R. Fedkiw, J. Ferziger and I. Mitchell (2002) : A hybrid particle level set method for improved interface capturing, J. Comput. Phys., 183, pp. 83-116.
- Liu, J. S. Koshizuka and Y. Oka (2003) : A Hybrid Particle-Mesh Method for Viscous, Incompressible, Multiphase Flows, 第17回数値流体シンポジウム, B11-5.
- Nakamura T., R. Tanaka, T. Yabe and K. Takizawa (2002) : Exactly Conservative Semi-Lagrangian Scheme for Multi-dimensional Hyperbolic Equations with Directional Splitting Technique, J. Comput. Phys., 174, pp. 171-207.
- Steger, J. et al. (1983) : A Chimera Grid Scheme ; Advances in Grid Generation, K. N. Ghia and U. Ghia, ASME FED-5, pp. 59-69.
- Yabe, T. and P. Y. Wang (1991) : Unified Numerical Procedure for Compressible and Incompressible Fluid, J. Phys. Soc. Japan, 60, pp. 2105-2108.
- Yabe, T., H. Mizoe, K. Takizawa, H. Moriki, Hyo-Nam Im and Y. Ogata (2004) : Higher-order schemes with CIP method and adaptive Soroban grid towards mesh-free scheme, J. Comput. Phys., 194, pp. 57-77.