

## 2 平面二次元高次ブジネスク方程式の一般形導出 および高精度数値解析モデルの開発

中嶋光浩\*・由比政年\*\*・川本賢治\*\*\*・石田 啓\*\*\*\*

近年適用例の多い複合的波浪防護施設の周辺では、地形変化およびそれに伴う波浪変形は複雑になり、その予測精度の向上は、防災性や海岸環境を考慮する上で本質的に重要となる。本研究では、こうした観点から、平面二次元高次ブジネスク方程式の一般形を無限級数の形で新たに誘導するとともに、実用的観点から、分散項の次数を三階微分までに抑えつつ、従来のNwoguモデルより分散性適合度を向上させた簡易な平面二次元修正ブジネスク方程式を提示して、対応する数値解析モデルの構築を行った。水理実験との比較により、本数値モデルが、浅水変形、部分反射、碎波および屈折・回折を伴う複雑な波浪現象を良好に再現できることを確認した。

## 1. はじめに

沿岸域における波浪防護施設として、近年、各種の海岸構造物を統合した複合防護工法が適用されることが多い。このような複合的波浪防護施設の周辺では、地形変化およびそれに伴う波浪変形は複雑になり、その予測精度の向上は、防災性あるいは海岸環境を考慮する上で本質的に重要な課題となる。こうした観点から、著者らは、これまでに、従来の Madsen ら (1992) や Nwogu (1993) のブジネスクモデルに比べ、適用波数領域が格段に広い修正ブジネスク方程式を誘導し、対応する断面二次元波浪変形の数値モデルを構築して、波の部分反射、碎波、分裂、再生、再碎波などを含む複雑な波浪場における適用性を検証してきた(中嶋ら, 2002, 2003)。

本研究では、このモデルをさらに発展させ、平面二次元高次ブジネスク方程式の一般形を無限級数の形で新たに誘導するとともに、実用的観点から、分散項の次数を三階微分までに抑えつつ、従来の Nwogu モデルより分散性の適合度を向上させた簡易な平面二次元修正ブジネスク方程式を提示して、対応する数値解析モデルの構築を行い、その適用性を検証する。

## 2. 平面二次元高次ブジネスク方程式の誘導

底面勾配を考慮した3次元の非回転波動の基礎方程式は、 $x$ 軸および $y$ 軸を静水面に、 $z$ 軸を鉛直向上きにとり、速度ポテンシャルを $\phi$ 、水面変動を $\eta$ 、水深を $h$ として、水平方向代表長 $J$ および基準水深 $h_0$ を用い、

$$x = x'/L', \quad y = y'/L', \quad z = z'/L',$$

$$\eta = \eta'/L', \quad h = h'/L', \quad t = t' \sqrt{gh'} / L',$$

のような無次元量で表すと、以下のようなになる。

$$\eta_t + \phi_x \eta_x + \phi_y \eta_y - \phi_z = 0 \Big|_{z=\eta} \dots \dots \dots \quad (4)$$

$$\phi_t + (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)/2 + z/\mu = 0 \Big|_{z=n} \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

ここに、 $\mu = h'_0/L'$  である.

速度ポテンシャル  $\phi$  を、

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (z+h)^n \phi^{(n)}(x, y, t) \dots \dots \dots (6)$$

のようにべき級数展開し、式(2)および(3)に代入すると、 $\phi^{(n)}$ に関する漸化式が得られ、 $\phi$ は底面における速度ポテンシャル $\phi^{(0)}$ により表される。

これより、水面における  $x$  方向水粒子速度  $u_s$  および任意水深における  $x$  方向水粒子速度  $u_a$  は、それぞれ、以下のようく表すことができる。

$$u_s = u^{(0)} - \frac{1}{2}(\eta + h)^2 \left[ u_{xx}^{(0)} + u_{yy}^{(0)} \right] + \dots$$

$$+ \frac{1}{24}(\eta + h)^4 \left[ u_{xxxx}^{(0)} + 2u_{xxyy}^{(0)} + u_{yyyy}^{(0)} \right] - \dots \quad (7)$$

$$u_{\alpha} = u^{(0)} - \frac{1}{2} \alpha^2 (\eta + h)^2 \left[ u_{xx}^{(0)} + u_{yy}^{(0)} \right] \\ + \frac{1}{8} \alpha^4 (\eta + h)^4 \left[ u_{xxxx}^{(0)} + 2u_{xxyy}^{(0)} + u_{yyyy}^{(0)} \right] - (8)$$

ここに、 $\alpha$ は、水面を 1, 底面を 0 とする係数である。なお  $y$  方向の流速  $v_y$  やび  $v_z$  についても同様である。

$u^{(0)}$ の関数で表される式(7)と(8)を差し引くと、その差は $u^{(0)}$ の関数で表されることになる。この式の右辺第一項は $u_{xx}^{(0)}$ および $u_{yy}^{(0)}$ の項であり、この項の係数を、 $u^{(0)}$ で表現された $u_{xxx}$ および $u_{yyy}$ の式に乘じ、両者を差し

\* 正会員 博(工) 北陸電力(株) 土木部

\*\* 正会員 博(工) 金沢大学助教授 大学院自然科学研究科

\* \* \* 修(工) 吹田市

\*\*\* 正会員 工博 金沢大学教授 大学院自然科学研究科

引く。さらに、その差の第一項は、 $u_{xxx}^{(0)}$ 、 $u_{xxxy}^{(0)}$ および $u_{yyyy}^{(0)}$ の項になっていることから、この項の係数を、 $u^{(0)}$ で表現された $u_{axxx}$ 等に乘じ差し引く。このような操作を繰り返すことにより、最終的に $u_s$ は $u_\alpha$ で表示することができる。また、 $v_s$ も同様となる。さらに、 $w_s$ に対しても、同様の操作を行うことにより、 $u_\alpha$ で表すことができる。最終的に、 $u_s$ および $w_s$ は以下のような一般式として表すことができる。なお、ここでは、簡単のため一様水深を仮定した。

$$u_s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta+h)^{2n}}{(2n)!} \left[ \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} E_{r2n} C_{2r} \alpha^{2r} \right] \\ \times \left[ \sum_{r=0}^n {}_n C_r \frac{\partial^{2n} u_\alpha}{\partial x^{2(n-r)} \partial y^{2r}} \right] \quad (9)$$

$$w_s = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta+h)^{2n+1}}{(2n+1)!} \left[ \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} {}_{2n+1} C_{2r} E_r \alpha^{2r} \right] \\ \times \left[ \sum_{r=0}^n {}_n C_r \left( \frac{\partial^{2n+1} u_\alpha}{\partial x^{2(n-r)+1} \partial y^{2r}} + \frac{\partial^{2n+1} v_\alpha}{\partial x^{2(n-r)} \partial y^{2r+1}} \right) \right] \quad (10)$$

ここに、 $E_r$ はオイラー数 ( $E_0=1, E_1=1, E_2=5, E_3=61 \cdots$ )、 ${}_n C_r$ は組み合わせ数である。

上式を水面における運動学的境界条件および力学的境界条件に代入すると、高次ブジネスク方程式の一般形として、次式が得られる。

$$\eta_t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta+h)^{2n}}{(2n)!} \left[ \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} E_{r2n} C_{2r} \alpha^{2r} \right] \\ \times \left[ \sum_{r=0}^n \left( \eta_{xn} C_r \frac{\partial^{2n} u_\alpha}{\partial x^{2(n-r)} \partial y^{2r}} + \eta_{yn} C_r \frac{\partial^{2n} v_\alpha}{\partial x^{2r} \partial y^{2(n-r)}} \right) \right] \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta+h)^{2n+1}}{(2n+1)!} \left[ \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} E_{r2n+1} C_{2r} \alpha^{2r} \right] \\ \times \left[ \sum_{r=0}^n {}_n C_r \left( \frac{\partial^{2n+1} u_\alpha}{\partial x^{2(n-r)+1} \partial y^{2r}} + \frac{\partial^{2n+1} v_\alpha}{\partial x^{2(n-r)} \partial y^{2r+1}} \right) \right] = 0 \quad (11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta+h)^{2n}}{(2n)!} \left[ \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} E_{r2n} C_{2r} \alpha^{2r} \right] \\ \times \left[ \sum_{r=0}^n \left( {}_n C_r \frac{\partial^{2n-1} u_\alpha}{\partial t \partial x^{2(n-r)} \partial y^{2r}} \right) \right] \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta+h)^{2n}}{(2n)!} \left( \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} E_{r2n} C_{2r} \alpha^{2r} \right) \right. \\ \left. \times \left( \sum_{r=0}^n {}_n C_r \frac{\partial^{2n} u_\alpha}{\partial x^{2(n-r)} \partial y^{2r}} \right) \right]^2 \\ \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta+h)^{2n}}{(2n)!} \left( \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} E_{r2n} C_{2r} \alpha^{2r} \right) \right\}^2 \\ \times \left( \sum_{r=0}^n {}_n C_r \frac{\partial^{2n} v_\alpha}{\partial x^{2(n-r)} \partial y^{2r}} \right) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta+h)^{2n+1}}{(2n+1)!} \left( \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} E_{r2n+1} C_{2r} \alpha^{2r} \right) \quad (12)$$

$$\times \left[ \sum_{r=0}^n {}_n C_r \left( \frac{\partial^{2n+1} u_\alpha}{\partial x^{2(n-r)+1} \partial y^{2r}} + \frac{\partial^{2n+1} v_\alpha}{\partial x^{2(n-r)} \partial y^{2r+1}} \right) \right]^2 \\ + g \eta_x = 0 \quad (12)$$

また、式 (12) に相当する  $y$  方向の式も同様に導くことができる (中嶋, 2004)。

### 3. 実用的な修正ブジネスク方程式とその差分化

前述した方法で導いた Nwogu (1993) と同次数の 3 階微分までの分散項を考慮した海底勾配を含むブジネスク方程式に、低次の式による部分的置き換えを行う Beji・Nadaoka (1996) の手法を用いると、三階微分までの分散項を考慮した最も簡易な平面二次元修正ブジネスク方程式が以下のようになる (中嶋, 2004)。

$$\eta_t + [(\eta+h) u_\alpha]_x + [(\eta+h) v_\alpha]_y \\ + (K1_2 - B1_2) h^2 (h_x u_{axx} + h_y u_{axy} + h_x v_{ayx} + h_y v_{ayy}) \\ + (K1_3 - B1_3) h^3 (u_{axxx} + u_{axyy} + v_{axxy} + v_{ayyy}) \\ - (B1_2 - 3B1_3) (h_x h \eta_{tx} + h_y h \eta_{ty}) \\ - B1_3 h^2 (\eta_{txx} + \eta_{tyy}) = 0 \quad (13)$$

$$u_{at} + u_\alpha u_{ax} + v_\alpha u_{ay} + g \eta_x \\ + (K2_1 - B2_1) \left( h_x h u_{axt} + \frac{1}{2} h_y h v_{axt} + \frac{1}{2} h_x h v_{ayt} \right) \\ + (K2_2 - B2_2) h^2 (u_{axxt} + v_{axyt}) \\ - B2_1 g h \left( h_x \eta_{xx} + \frac{1}{2} h_y \eta_{xy} + \frac{1}{2} h_x \eta_{yy} \right) \\ - B2_2 g h^2 (\eta_{xxx} + \eta_{yyy}) = 0 \quad (14)$$

$$v_{at} + u_\alpha v_{ax} + v_\alpha v_{ay} + g \eta_y \\ + (K2_1 - B2_1) \left( h_y h v_{ayt} + \frac{1}{2} h_x h u_{ayt} + \frac{1}{2} h_y h u_{axt} \right) \\ + (K2_2 - B2_2) h^2 (u_{ayyt} + v_{axyt}) \\ - B2_1 g h \left( h_y \eta_{yy} + \frac{1}{2} h_x \eta_{xy} + \frac{1}{2} h_y \eta_{xx} \right) \\ - B2_2 g h^2 (\eta_{xyx} + \eta_{yyy}) = 0 \quad (15)$$

ここに、 $K1$  やび  $K2$  は、

$$K1_2 = \frac{3\alpha^2 + 4\alpha - 3}{2}, \quad K1_3 = \frac{3\alpha^2 - 1}{6}$$

$$K2_1 = 2(\alpha - 1), \quad K2_2 = \frac{\alpha^2 - 1}{2}$$

であり、 $B1$  やび  $B2$  は分散性の補正係数である。

式 (13)、(14) やび (15) の数値計算にあたっては、これらを、以下のように置き換える、

$$U_t = -u_\alpha u_{ax} - v_\alpha u_{ay} - g \eta_x + B2_1 g h \left( h_x \eta_{xx} + \frac{h_x}{2} \eta_{xy} \right) \\ + K2_1 g h \frac{h_x}{2} \eta_{yy} + B2_2 g h^2 (\eta_{xxx} + \eta_{yyy}) \quad (16)$$

$$V_t = -u_\alpha v_{ax} - v_\alpha v_{ay} - g \eta_y + B2_1 g h \left( h_y \eta_{yy} + \frac{h_x}{2} \eta_{xy} \right)$$

$$+K2_1gh\frac{h_y}{2}\eta_{xx}+B2_2gh^2(\eta_{xxy}+\eta_{yyy}) \dots\dots\dots(17)$$

$$U=u_\alpha+(K2_1-B2_1)h_xhu_{ax}+\frac{(K2_1-B2_1)}{2}h_yhv_{ay}$$

$$+(K2_2-B2_2)h^2(u_{axx}+u_{ayy}) \dots\dots\dots(18)$$

$$V=v_\alpha+(K2_1-B2_1)h_yhv_{ay}+\frac{(K2_1-B2_1)}{2}h_xhv_{ax}$$

$$+(K2_2-B2_2)h^2(v_{axx}+v_{ayy}) \dots\dots\dots(19)$$

$$\zeta_t=-[(\eta+h)u_\alpha]_x-[(\eta+h)v_\alpha]_y$$

$$-(K1_2-B1_2)h^2(h_xu_{axx}+h_yu_{axy}+h_xv_{axy}+h_yv_{ayy})$$

$$-(K1_3-B1_3)h^3(u_{axxx}+u_{axyy}+v_{axxy}+v_{ayyy}) \dots\dots\dots(20)$$

$$\zeta=\eta-(B1_2-3B1_3)h(h_x\eta_x+h_y\eta_y)$$

$$-B1_3h^2(\eta_{xx}+\eta_{yy}) \dots\dots\dots(21)$$

式(16)および(17)において、既知の $\eta$ 、 $u_\alpha$ および $v_\alpha$ から $U$ および $V$ を、次いで、得られた $U$ および $V$ から式(18)および(19)をSOR法により解き $u_\alpha$ および $v_\alpha$ を求めた。 $\zeta$ および $\eta$ についても同様とした。差分化には、スタガード格子を用い、1階微分項には4次精度、2階および3階微分項には2次精度の中心差分を、非線形項には3次精度の風上差分をそれぞれ用いた。このような差分化により、数値的な分散を除去することができる。

また、碎波計算には、以下の碎波減衰項 $M_b$ をそれぞれ、式(14)および(15)に付加することとした。

$$M_b=\frac{1}{H}[\nu_b(Hu_\alpha)_x+\nu_b(Hv_\alpha)_y] \dots\dots\dots(22)$$

$$M_b=\frac{1}{H}[\nu_b(Hu_\alpha)_x+\nu_b(Hv_\alpha)_y] \dots\dots\dots(23)$$

ここに、 $H=\eta+h$ 、 $\nu_b$ は拡散係数であり、

$$\nu_b=(\hat{u}_s-u_r)\delta h \dots\dots\dots(24)$$

とした。 $\hat{u}_s$ は水面における水粒子速度振幅、 $u_r$ は波の再生限界を表す水粒子速度( $0.25\sqrt{gh}$ )、 $\delta$ は碎波減衰係数( $\delta=0.8$ )である。なお、碎波判定としては、水面における水粒子速度と波速の比が0.8~1.0程度を用いることとした(中嶋ら、2004)。

#### 4. 理論値および既往の水理実験結果との比較

##### (1) 深海域までの分散性の整合性

式(13)~(15)における群速度は以下となる。

$$\frac{Cg}{C}=1+\frac{(B1_3+B2_2-K1_3)(kh)^2-2(K1_3-B1_3)B2_2(kh)^4}{1+(B1_3+B2_2-K1_3)(kh)^2-(K1_3-B1_3)B2_2(kh)^4}$$

$$-\frac{(B1_3+B2_2-K2_2)(kh)^2-2(K2_2-B2_2)B1_3(kh)^4}{1+(B1_3+B2_2-K2_2)(kh)^2-(K2_2-B2_2)B1_3(kh)^4} \dots\dots\dots(25)$$

図-1は、 $\alpha$ 、 $B1_3$ および $B2_2$ を変化させた場合の式(25)による群速度を示した例である。右図は、 $\alpha$ =

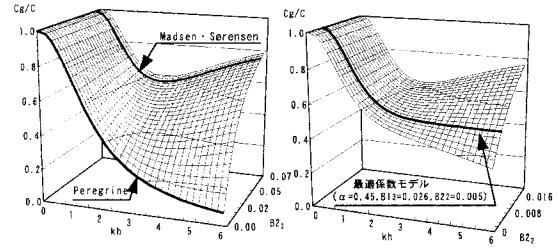


図-1 分散性パラメータを変化させた群速度特性

$0.45$ 、 $B1_3=0.026$ と固定し、 $B2_2$ を0から0.02まで変化させた場合の群速度特性を示す。 $B2_2=0.005$ とした太線では、 $kh$ が0から6までの深海域をも含む範囲でほぼ完全に理論群速度と一致しており、実用的な3階微分までの方程式でも、MadsenらやNwoguのブジネスクモデルに比べ、分散性を格段に向上させ得ることがわかる。

なお、本平面二次元数値モデルによる島堤沿いにおける深海波(相対水深1.0)の波高分布計算の結果は、実際に、Nwoguモデルによる計算結果に比べ理論値との整合性が良く、深海域までの分散性の向上が数値計算上からも確認されている(中嶋ら、2003)。

##### (2) 球面浅瀬による波の屈折変形

伊藤・谷本(1972)による水理実験と本数値計算結果との比較を行い非碎波条件における数値モデルの検証を行った。その結果は図-2に示すとおりであり、本数値モデルによる屈折計算の妥当性が確認された。

##### (3) 離岸堤周辺における波浪変形

次に、渡辺・丸山(1984)が実施した平面水槽における離岸堤実験と条件を合わせて本モデルによる数値計算を行い、実験結果との比較を行った。

計算は、図-3に示すような水理実験の半領域とした。底面地形は10cmの一様水深部に続き、海底勾配1/50の一様勾配斜面を有し、水深6cmの位置に長さ1.33mの離岸堤(半分)が設置されているものである。造波境界

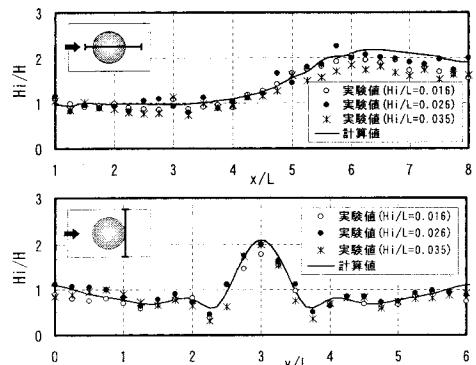


図-2 球面浅瀬周辺波高に関する計算値と実験値との比較

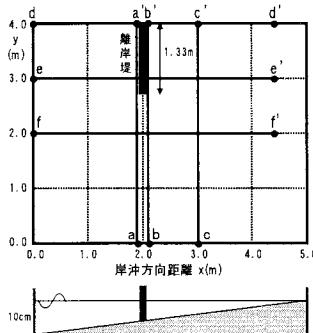


図-3 斜面上の離岸堤

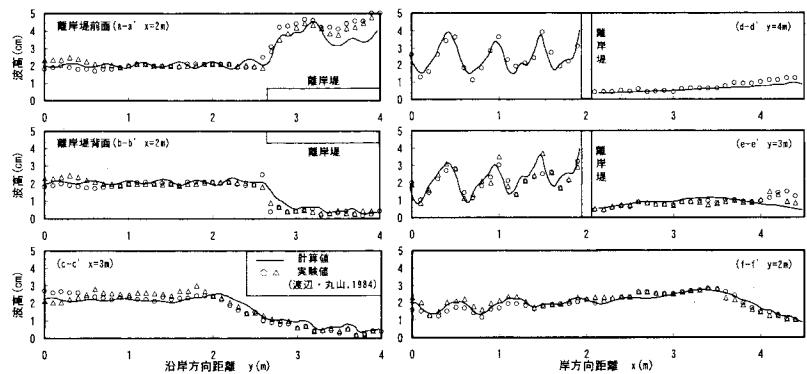


図-4 離岸堤周辺の波高に関する計算値と実験値との比較

より、周期1.2 s の規則波を汀線に直角に入射させ、防波堤位置ラインにおいて波高が概ね2 cmとなるようにした。また、計算格子幅 $\Delta x$ および $\Delta t$ は、それぞれ $L/15$ および $T/60$ とした。汀線は水深1 cmの一様水深場で代替的に表現し、スponジ境界を導入した無反射境界を設定した。

図-4に離岸堤周辺における波高分布の実験値と計算値との比較を示す。両者はよく一致しており、本数値モデルによる反射・回折計算等の妥当性が確認された。

## 5. 高波浪時における一字堤前面背面波高

防波堤堤頭部付近における波高分布は、その堤頭部からの回折波の影響により、重複波の形成のみの1次元の場合に比べ大きくなるが、長さの比較的短い一字堤の場合には、回折波が両側から回り込むことでさらに顕著になる。「蛇行灾害」の原因となるこのような現象につ

いて、一字堤の設計の際には、水理実験等により検討されてはいるものの、高波浪時の現象について必ずしも十分な解析的検討が行われているとは言い難い。このような高波浪時における回折波と進行波・反射波との重合に伴う一字堤沿いの波高分布特性を把握するため、一字堤防波堤に関する水理実験を実施するとともに、本数値モデルによる数値計算を実施し比較を行った。

実験には、図-5(a)に示す北陸電力株式会社技術開発研究所の長さ28 m、幅17 mの多方向不規則造波装置を有する平面2次元水槽を用いた。水深は28 cmとし、水槽のほぼ中央片側に一字堤模型として、長さ4 m、厚さ1 cmのアクリル板を設置した。入射波は3.7 cmおよび10 cmとし、防波堤長 $B$ と入射波長 $L$ との比 $B/L$ は3.0および3.8とした。図-5(b)～(f)に一字堤沿いの波高分布と同時刻における前面背面水位差の最大値を示す。計算値は実験値とほぼ一致しており、高波浪時において

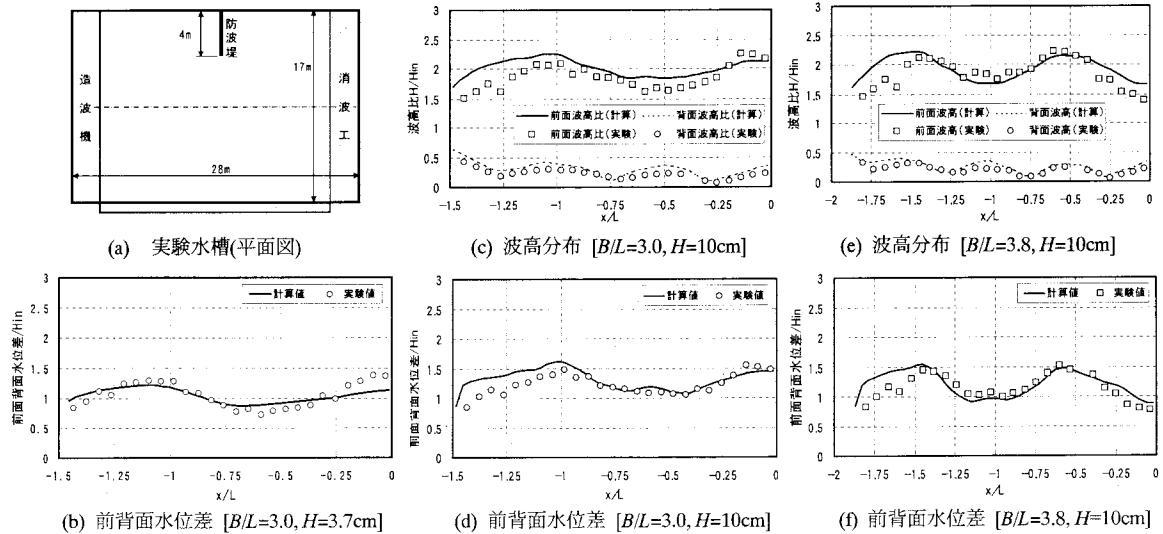


図-5 一字堤沿いの前背面波高

も本数値モデルは十分適用可能であると考えられる。なお、非線形性が強い高波高の波の場合は、波高が小さい場合に比較して防波堤に作用する波力算定の基本となる防波堤前面背面水位差の比が大きくなつておる、非線形性の影響で波力的にもより厳しいものになることが示唆される。

## 6. 人工リーフ周辺の波浪変形

人工リーフは、面的防護方式の海岸保全施設の中で代表的なもののひとつである。人工リーフ上の水深急変部やその周辺では、複雑な底面地形が形成され、対応する波浪場も、波の部分反射、回折、碎波、分裂、再生、再碎波を含む複雑なものとなる。ここでは、このような人工リーフ周辺の波浪場に対する本数値解析モデルの適用性を検討するため、第一段階として、一様水深場における人工リーフ周辺における碎波を含む波浪変形に関する水理実験と数値計算を実施した。

実験は、前節と同じ水槽を用い、その中央に図-6に示す人工リーフ模型を設置した(写真-1)。実験における水深は23 cm、天端水深は7 cmである。波は、周期1.5 cm、振幅1.5 cmとし、リーフに対して直角に入射させた。計算は、空間計算格子幅 $\Delta x$ および $\Delta y$ を5.0 cm、時間計算格子幅 $\Delta t$ を0.00625 sとした。

図-7および図-8にそれぞれ、水面変位の空間分布例およびリーフ中心軸上の波高分布を示す。リーフ前面の部分重複波の形成、リーフ上での碎波によるリーフ背面における波の減衰、リーフ背面における回折波の重合など、リーフ周辺での計算結果は実験結果を定性的・定量的に非常によく再現している。

## 7. おわりに

本研究では、任意水深流速表示の平面二次元高次ブジネスク方程式の一般形を無限級数の形で誘導するとともに、実用的観点から、分散項の次数を三階微分までに抑えつつ、従来のNwoguモデル等より分散性の適合度を向上させた簡易な平面二次元修正ブジネスク方程式を提示した。さらに、対応する数値解析モデルの構築を行い、それに基づくいくつかの事例的な計算を実施して水理実験値との比較を通して本数値モデルの適用性を確認した。

**謝辞：**本研究における水理実験にあたり、金沢大学工学部の学生諸氏（榎原秀作氏、松村亜矢子氏）、および、北電技術コンサルタント（株）の越後満氏に協力していただいた。ここに記して感謝の意を表する。

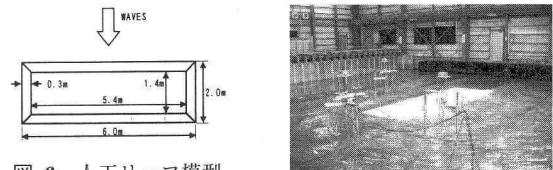


図-6 人工リーフ模型

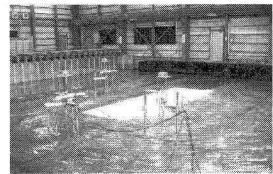


写真-1 水理実験状況

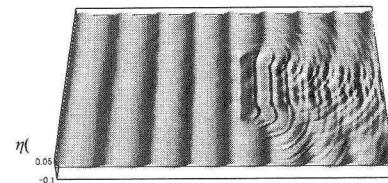


図-7 人工リーフ周辺の波浪変形計算例

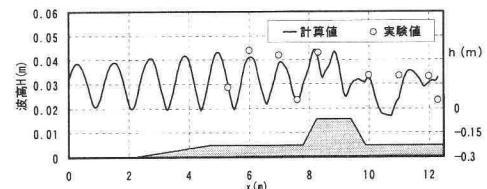


図-8 人工リーフ周辺波高分布（中央岸沖方向断面）

## 参考文献

- 伊藤喜行・谷本勝利(1972)：波向線交差領域での波の屈折-数値波動解析法の応用(2), 第19回海岸工学講演会論文集, pp. 325-329.
- 中嶋光浩・由比政年・石田 啓(2002)：高次ブジネスク方程式の一般形の導出と最適係数を用いた高精度数値モデルの開発, 海岸工学論文集, 第49巻, pp. 6-10.
- 中嶋光浩・由比政年・間瀬 肇・石田 啓(2003)：複合防護施設周辺の複雑波浪場に対する高精度数値予測モデルの構築, 海岸工学論文集, 第50巻, pp. 51-55.
- 中嶋光浩(2004)：海岸構造物周辺の波浪場解析におけるブジネスクモデルの高度化と応用に関する研究, 平成15年度金沢大学学位論文, 188p.
- 渡辺 晃・丸山康樹(1984)：屈折・回折・碎波変形を含む波浪場の数値解法, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 103-107.
- Beji, S. and K. Nadaoka.(1996): A formal derivation and numerical modeling of the improved Boussinesq equations for varying depth, Ocean Eng., Vol23, pp. 691-704.
- Madsen, P. A., and O.R. Sorensen.(1992): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Part 2.A slowly-varying bathymetry, Coastal Eng., Vol.18, pp. 183-204.
- Nwogu, O. (1993): Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE, Vol.119, No.6, pp. 618-638.