

非線形分散波理論の津波数値解析への適用性と 新しい数値モデルの提案

嶋 原 良 典*・今 村 文 彦**

本研究は、非線形分散波理論計算における分散項と移流項について、差分精度と安定性の視点から津波数値解析への適用性の検討を行い、分散性に関しては数値分散の逆利用法が、また、移流項は 3 次精度風上差分が最も適当であることが分かった。この結果から新たに実用的な非線形分散波モデルを提案し、一次元水理実験の再現計算から本モデルの妥当性を示した。さらに、実際の海底地形への適用性を検証するため 1983 年日本海中部地震の再現計算を行い、深海域から浅海域での一括計算を安定して行え、ソリトン分裂・波状段波等の変形過程を再現できる、適用性の高いモデルであることを示した。

1. はじめに

現在の津波数値解析は、深海域で線形長波理論、浅海域で浅水理論を利用した手法が主流であり、波源域での津波の発生を正確に抑えることができれば、沿岸域での最大波高や深水域をかなりの精度で予測・再現できることが知られている(今村, 2001)。しかしながら、1983 年日本海中部地震津波で確認された波状段波や、2003 年十勝沖地震津波での津波の河川遡上におけるソリトン分裂など、従来の浅水理論を支配方程式とした数値モデルでは再現が難しい現象例がこれまでにいくつも報告されている。特に浅海域での津波の変形による効果は、ある点での波の時系列変化や構造物に働く流体力の評価に大きな影響を及ぼす。このため、このような現象を精度高く再現し、評価できるような数値モデルの開発は、津波の被害予測をする上できわめて重要な課題であるといえる。

これまで、実用的な非線形分散波理論の数値モデル開発に関する研究が数多く行われてきており、2 次元平面問題に適用可能なモデルがいくつも提案されている(佐藤, 1995; 岩瀬ら, 2002)。しかしながら、これらの差分スキームの精度や安定性に注目して、津波数値解析に本当に適した計算方法について検討した研究例は、線形分散波理論ではあるものの(Fujima ら, 2003)、非線形分散波理論についてはほとんどなく、特に、移流項の差分方法については議論が不十分である。

そこで本研究では、実用的な非線形分散波理論の津波数値モデルの構築を目的として、既往または新たに提案する分散性と非線形性の計算法に関して津波数値解析への適用性の検討を行い、その結果から新しい非線形分散波モデルを提案する。そして、詳細波形や遡上についての水理実験結果との比較によりモデルの妥当性を検証し、さらに、モデルを 2 次元の現実問題へ拡張し、日本海中部地震の再現計算から深海域、浅海域での適用性に

ついて議論する。

2. 非線形分散波理論による津波数値解析方法の検討

本研究で用いる支配方程式は、Boussinesq 型の分散項と運動量損失項(海底摩擦、砕波減衰)を考慮した非線形分散波理論式とし、以下のように表される。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{MN}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ = \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial t \partial x \partial y} \right) - \frac{gn^2}{D^{1/3}} M \sqrt{M^2 + N^2} \\ + \nu_e \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{MN}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ = \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^2 N}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial t \partial x \partial y} \right) - \frac{gn^2}{D^{1/3}} N \sqrt{M^2 + N^2} \\ + \nu_e \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここで η は水位、 M 、 N は x 、 y 方向の線流量、 g は重力加速度、 h は静水深、 $D(=\eta+h)$ は全水深、 n は Manning の粗度係数、 $\nu_e(=0.23(gD)^{1/2}\eta)$ は渦動粘性係数である。以下、分散項と移流項について、津波数値解析に適した非線形分散波理論の差分方法を検討する。

(1) 実用的な分散項の差分方法の検討

ここでは、式(2)、(3)中の移流項を除いた線形分散波理論式から差分スキームの検討を行う。スキームとしては以下の 3 種類を検討する。なお、変数の空間的な格子配置には全て Staggered 格子を使用し、ここでは時間発展と差分方法が異なるものとする。

a) 2 段階混合差分法(岩瀬ら, 2002): 時間発展に Leap-Frog 法を用い、連続の式は従来通りに解く。次に運動の式に関して、1 段目に線形長波と見なした陽的計算を行い、2 段目に分散項を陰的に解く。 M の式では M の x 方向微分のみが、 N の式では N の y 方向微分のみが

* 正会員 博(工) 防衛大学校助手 システム工学群建設環境工学科
** 正会員 工 博 東北大学教授 大学院工学研究科附属災害制御研究センター

陰的に表現されているため、3重対角行列を解くだけでよく、他の陰解法に比べて計算量は少ない。

b) 数値分散性の逆利用法 (Yoon, 2002; 鳴原・今村, 2003): 津波の線形長波理論の差分計算 (時間発展は Leap-Frog 法) において、空間差分から生じる数値分散性を物理分散性と一致する条件は、

$$\Delta x^* = \sqrt{gh\Delta t^2 + 4h^2} \dots\dots\dots (4)$$

で与えられる。この式に対し、差分の際に擬似的な空間格子を仮定し、擬似格子状での流量と水位を本来の実格子の値から3次多項式で補間することによって分散性を計算する。計算例として、一次元問題での運動の式の差分式を示す。

$$\frac{1}{\Delta t}[M_{i+1/2}^{n+1} - M_{i+1/2}^n] + \frac{gh}{\Delta x^*}[\eta_{i+1}^{n+1/2} - \eta_i^{n+1/2}] = 0 \dots\dots (5)$$

ただし

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x^*}[\eta_{i+1}^{n+1/2} - \eta_i^{n+1/2}] &= \frac{\alpha^2 - 1}{24\Delta x}(\eta_{i+2}^{n+1/2} - \eta_{i-1}^{n+1/2}) \\ &+ \frac{3(9 - \alpha^2)}{24\Delta x}(\eta_{i+1}^{n+1/2} - \eta_i^{n+1/2}) \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\alpha = \Delta x^* / \Delta x \quad (0 \leq \alpha \leq 3) \dots\dots\dots (7)$$

ここで $(\Delta x, \Delta t)$ 、 (i, n) はそれぞれ (x, t) 軸方向の差分格子間隔、格子点番号である。連続の式についても、流量について同様の補間に行えばよい。このように未知の変数が必要なく、陽的に解くことができるのが大きな特徴である。また、2次元問題での方向依存性は、対角方向の打ち切り誤差に対し、圧力項を修正することにより解消することができる (鳴原・今村, 2003)。

c) 完全陰解法 (Fujima ら, 2003): 時間発展に Crank-Nicholson 法を用い、連続の式と運動の式を陰的に解く。

これらの各差分方法について、von Neumann の安定性解析を行うことにより各スキームの安定性が表-1 のようにまとめられる。Crank-Nicholson 法は、完全陰解法であるため常に安定であるが、誤差自体は大きいことが指摘されており (Fujima ら, 2003)、また、領域結合や陸上遡上の取り扱いが問題とされている。数値分散の逆利用法は、Leap-Frog 法の主要な誤差である数値分散を物

理分散として取り入れているため、誤差の影響は非常に小さく、さらに、方向依存性も解消され高精度である。一方、二段階混合差分は、分散項以外は Leap-Frog 法と同様に陽的な中心差分であるため、数値分散が誤差として影響する。これは、遠地津波のように長距離伝播する場合は無視できない。ここで空間格子の条件を比較すると、数値分散の逆利用法は、静水深よりも空間格子間隔を小さくできるため、二段階混合差分よりも空間解像度に優れている。このことは深海、特に日本海中部地震津波のような断層幅・長さが数十 km といった比較的小さい波源を数値解析する場合に有利であり、より実用的であるといえる。以上から本研究では、分散項の差分計算に数値分散の逆利用法を採用する。

(2) 3次精度風上差分による移流項の提案

移流項の差分方法としては、表-2 のように中心差分と風上差分に大別される。1次精度の風上差分では、数値粘性が分散性の働きを抑えてしまい、精度の良い解を得ることは出来ない。そのため、従来の非線形分散波モデルでは2次精度の中心差分が採用されているが、この場合の打ち切り誤差は数値分散であり、本来の物理的な分散に影響を与えてしまう問題が発生する。そこで本研究では、数値粘性と数値分散を共に小さく押さえることのできる、3次精度の風上差分を提案する。すなわち、

$M_{i+1/2,j}^n \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) \Big|_{i+1/2} &= \frac{1}{6\Delta x} \left[2 \cdot \frac{(M_{i+3/2,j}^n)^2}{D_{i+3/2,j}^n} + 3 \cdot \frac{(M_{i+1/2,j}^n)^2}{D_{i+1/2,j}^n} \right. \\ &\quad \left. - 6 \cdot \frac{(M_{i-1/2,j}^n)^2}{D_{i-1/2,j}^n} + \frac{(M_{i-3/2,j}^n)^2}{D_{i-1/2,j}^n} \right] \dots\dots (8) \end{aligned}$$

$M_{i+1/2,j}^n < 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) \Big|_{i+1/2} &= \frac{1}{6\Delta x} \left[- \frac{(M_{i+5/2,j}^n)^2}{D_{i+5/2,j}^n} + 6 \cdot \frac{(M_{i+3/2,j}^n)^2}{D_{i+3/2,j}^n} \right. \\ &\quad \left. - 3 \cdot \frac{(M_{i+1/2,j}^n)^2}{D_{i+1/2,j}^n} - 2 \cdot \frac{(M_{i-1/2,j}^n)^2}{D_{i-1/2,j}^n} \right] \dots\dots (9) \end{aligned}$$

とする。この式から、分散性に打ち切り誤差が干渉することなく、移流項を陽的に計算することができる。

以上の検討から、分散項と移流項を陽的に解く非線形分散波理論の数値モデルを構築する。分散項の計算は数値分散の逆利用法 (式(5)–(7)) を、移流項は式(8)、

表-1 2次元線形分散波モデルの安定性の比較

数値モデル	解法	分散性	C.F.L 条件	空間格子の条件	誤差	分散の方向依存性
Leap-Frog 法による線形長波モデル	陽解法	数値分散	$C_r \leq 0.71$	—	数値分散を誤差として含む	対角方向が弱い
数値分散の逆利用法	陽解法	数値分散	$C_r \leq 0.61$	$0.67 \leq \Delta x/h$	数値分散を物理分散として利用	依存性は小さい
二段階混合差分法	分散項のみ陰解法	物理分散	$C_r \leq 0.71$	$1.15 \leq \Delta x/h$	数値分散を誤差として含む	対角方向が弱い(線形長波モデルよりは優れる)
Crank Nicholson 法	完全陰解法	物理分散	常に安定	—	誤差が比較的大きい	依存性は小さい

表-2 津波数値解析での移流項の差分方法の比較

モデル	スキーム	差分方法	精度	誤差の性質
浅水理論モデル	風上差分	陽的	1次	数値粘性
—			2次	数値分散
本モデル			3次	数値粘性
二段階混合差分 Crank Nicholson	中心差分	陰的	2次	数値分散

(9)で与えられる3次精度風上差分式をそれぞれ二次元問題に拡張する。また、海底摩擦項は計算の安定化のため半陰的な差分とし、砕波減衰項の渦動粘性係数 ν_e は、流速波速比が0.59を超える位置に対して空間分布として与える(岩瀬ら, 2001)。さらに、水と陸の境界での波の先端処理は小谷ら(1998)の方法に従う。

3. 水理実験結果との比較

ここでは、水理実験の再現計算により、提案した数値モデルの妥当性について検証する。なお、ここでのManningの粗度係数は水理実験の再現であることを考慮し、 $n=0.01$ としている。

(1) 浅水変形の再現性

本モデルによる波の変形過程の再現性を評価するため、Mase・Kirby (1992)の実験結果の再現を行う。斜面勾配1/20を有する一次元水路に対し、水深20 cmの位置から水位の時刻歴(最大無次元波数 $k_h=2.0$ の不規則波)の実験値を強制入力する。設定する計算条件として、空間格子は表-1での分散項の安定条件を考慮して $\Delta x=10$ cmとし、時間間隔は $\Delta t=0.005$ sとする。

図-1に、水深15 cm位置での実験結果と数値計算結果の水位の時刻歴を示す。分散性を考慮(図-1の中段、下段)することにより短周期成分の遅れが生じ、結果として波の前傾化が抑えられる。これは、非線形性のみが作用する従来の浅水理論モデルとは大きく結果が異なっ

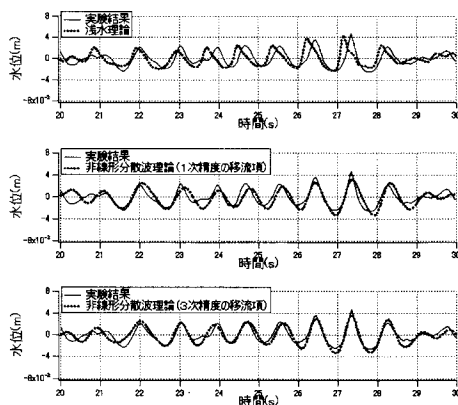


図-1 Mase・Kirby (1992)の実験結果との比較(水深15 cm地点での水位の時刻歴変動)

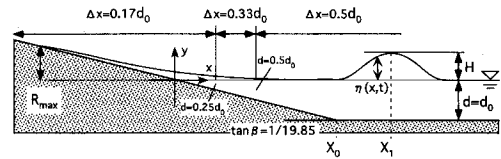


図-2 数値計算条件($d_0=15$ cm)

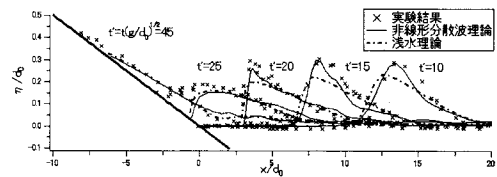


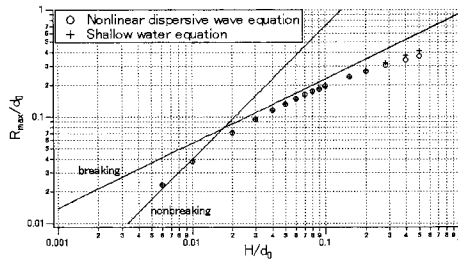
図-3 Synolakis (1987)の実験結果との比較

ている。さらに移流項の計算精度による結果の相違について比較すると、3次精度結果は1次精度に比べ数値粘性の影響が小さくなるため、波高の減衰が抑えられており、位相もより精度良く一致している。以上により、本モデルの再現性が高く、非線形性・分散性を有する波動場において、浅水変形への高い適用性があるといえる。

(2) 砕波・遡上段階での再現性

次に、Synolakis (1987)の水理実験結果との比較から砕波・遡上問題での再現性について検討する。図-2に示すような1次元水路に対し、波長 $L/2=|X_1-X_0|$ 、波高 H の孤立波を伝播させる。計算格子として時間間隔 $\Delta t=0.001$ sとし、空間格子間隔は安定条件を満たすように水深の変化に応じて3段階に設定した。また、分散項は水深に依存するため遡上域では計算できないため、水深が1 cm以下では分散項を計算しないことにする。

図-3は波高水深比0.28での無次元化した各時刻における計算結果と実験の空間波形である。非線形分散波モデルは浅水変形の段階($t(g/d_0)^{1/2}=10, 15$)では先端部の波形勾配や増幅過程が実験と良好に一致している。しかしその後、 $t(g/d_0)^{1/2}=20$ 付近で砕波が始まることにより概形に差が生じ、最終的な遡上高は実験値よりも小さくなる。ここで、孤立波の入射波高に対する遡上高を求め、水理実験結果と比較する(図-4)と、両モデルとも実験結果の傾向に一致している。その中でも非砕波領域では、砕波減衰項の働きが小さいため実験値に近い値を示しているが、砕波領域では15~20%程度の過小評価となっている。以上から、遡上段階での砕波モデルの再現性について問題は残るものの、従来の浅水理論モデルの波高減衰は移流項からの数値粘性に起因しているのに対し、本モデルでは砕波減衰項による運動量損失を考慮しており、より物理的に妥当なモデルであるといえる。

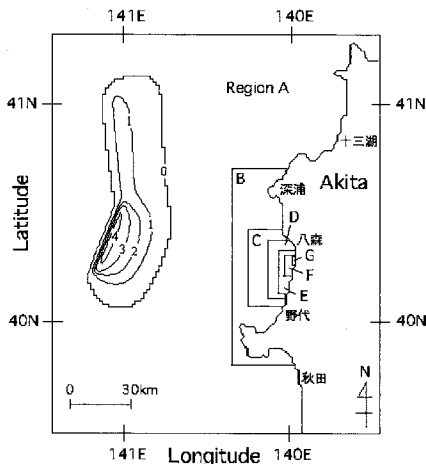


図一4 孤立波の波高と最大遡上高の関係(図中の直線は水理実験結果からの算定式)

4. 二次元平面地形への適用性 (1983 年日本海中部地震津波の再現計算)

本モデルの実際の海底地形への適用性を検証するため、日本海中部地震津波の再現計算を行う。図一5に計算領域および初期水位分布を示す。津波の初期水位は、相田(1984)の断層モデルを用いた。計算条件として、表一1での安定条件を満足するような空間格子を設定するため、領域を7つに分割し、時間間隔は一定とした。各領域での空間格子長を表一3に示す。領域AからCは1/4間隔で、それ以降は1/2間隔で結合する必要があるため、従来の一定間隔の接続とは若干異なる。計算領域の境界に隣接する格子点では、分散性の計算や3次風上差分による移流項の計算は必要な変数が確保できないため、通常の浅水理論計算を行う。また Manning 粗度は $n=0.025$ とした。なお、本計算での CPU 時間は、浅水理論が 6.57 時間であるのに対し、本モデルでは 13.82 時間であった。

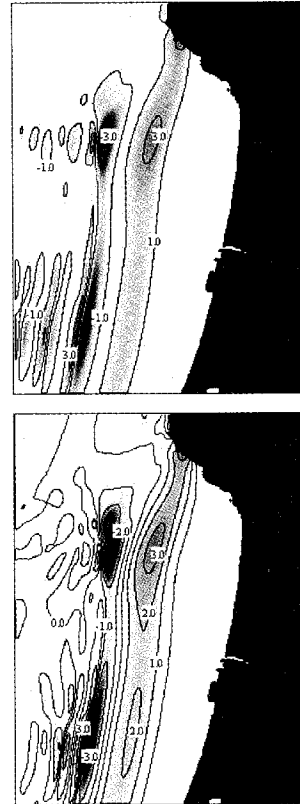
計算結果として、図一6に領域C(水深100m以浅)での初期変位20分後の津波波形の空間分布を示す。両計算ケース共に、津波は北秋田海岸に対しほぼ直角に進入し



図一5 計算領域と初期波形の水位分布

表一3 各領域での格子間隔および計算点

Region	計算点の数	$\Delta x, \Delta y$ (m)	Δt	再現時間
A	102×124	1600	0.1 sec	30 min
B	102×252	400		
C	296×396	100		
D	380×600	50		
E	500×800	25		
F	500×800	12.5		
G	500×700	6.25		



図一6 領域Cでの津波伝播、初期変位20分後(上:非線形分散波計算, 下:浅水理論計算)単位はm

ていることが確認できる。水位分布を比較すると、浅水理論計算では津波が1つもしくは2つの波峰および谷を形成しているのに対し、非線形分散波理論計算では分散性の効果によって複数の後続波が重なって伝播していることがわかる。

次に、図一7は領域Eでの水深30m地点における水位の時系列を示している。第1波の波形に差は見られないが、第2波目以降の波は非線形性により前傾化し、分散性の作用からソリトン分裂を生じている。首藤(1984)の調査結果から、第2波以降の波は1波目より大きく、沖で碎波したという目撃証言があり、ここでの解析結果

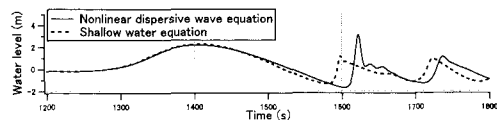


図-7 領域 E (水深 30 m 地点) での水位の時刻歴

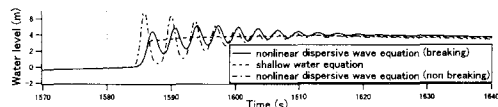


図-8 領域 G (水深 7 m 地点) での水位の時刻歴 (breaking: 式 (2), (3) 中に砕波減衰項あり, nonbreaking: 砕波減衰項なし)

は、上記の現象を再現していると考えられる。

図-8は領域 G での、水深 7 m 地点 (峰浜村沿岸) における水位の時系列である。浅水理論計算は、非線形効果による波の前傾化により段波となっている。一方、非線形分散波理論計算は、前傾化とともに分散効果が働くことによる波の分裂が発生し、さらに砕波減衰項を考慮することにより波状段波として安定する。調査結果 (首藤, 1984) から、この一帯は沖方向から横一線に波状段波が来襲したことが確認されており、本数値解析は津波第 1 波の来襲形態を良好に再現できている。なお、砕波現象を考慮しないと波は増幅し続け、沿岸で安定した解を得ることはできない (図-8 参照)。

以上の結果から、本モデルは実際の海底地形での計算を安定に行え、かつ日本海中部地震津波で確認されてきたソリトン分裂や波状段波等の津波変形の特徴を深海域、浅海域で再現でき、適用性の高いモデルであるといえる。

5. 結 論

本研究は、これまで提案されてきた、また、新たに考案した分散項と移流項の差分計算法に関して、差分の精度と安定性の観点から津波数値解析への適用性の検討を行い、分散性に関しては数値分散の逆利用法、また、移流項は 3 次精度風上差分が最も適当であることが分かった。そこで、新たに実用的な非線形分散波モデルを提案し、一次元水理実験 (Mase・Kirby, 1992; Synolakis, 1987) の再現計算から本モデルが分散性と非線形性を有

する波動場で適用可能であることを示した。これにより、山体崩壊や地滑りなど比較的短周期の津波 (後藤ら, 2003) にも安定して適用が可能である。さらに、1983 年日本海中部地震の再現計算を行い、深海域から浅海域での一括計算を安定して行うことができ、適用性の高いモデルであることを示した。しかし、本モデルで採用した砕波条件は浅海域での条件であり、本研究の再現計算で見られた深海域でのソリトン分裂に対する砕波指標は明らかにされておらず、今後の課題である。

謝辞: 本研究の一部は、科研費基盤 (B) (2) (12574016) や特定研究 (2) (14080203) の補助を受けた。ここに記して謝意を表す。

参 考 文 献

- 相田 勇 (1984): 1983 年日本海中部地震津波の波源数値モデル, 地震研究所集報, Vol. 59, pp. 93-104.
- 今村文彦 (2001): 津波災害予測と対策一, 地学雑誌, Vol. 110, No. 6, pp. 828-837.
- 岩瀬浩之・深澤雅人・後藤智明 (2001): ソリトン分裂波の砕波変形に関する水理実験と数値計算, 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp. 306-310.
- 岩瀬浩之・藤間功司・見上敏文・柴木秀之・後藤智明 (2002): 波数分散効果を考慮した日本海中部地震津波の遡上計算, 海岸工学論文集, 第 49 巻, pp. 266-270.
- 小谷美佐・今村文彦・首藤伸夫 (1998): GIS を利用した津波遡上計算と被害推定法, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp. 386-390.
- 後藤大地・今村文彦・嶋原良典 (2003): 土石流流下・津波発生・伝播段階における津波数値モデルの改良, 海岸工学論文集, 第 50 巻, pp. 281-285.
- 佐藤慎司 (1995): 波の分裂と砕波を考慮した津波の数値計算, 海岸工学論文集, 第 42 巻, pp. 376-380.
- 首藤伸夫 (1984): 秋田県北部海岸における日本海中部地震津波, 東北大学工学部津波防災実験所研究報告, 第 1 号, pp. 12-26.
- 嶋原良典・今村文彦 (2003): 長波計算における数値分散性を利用した擬似 Variable Grid System の提案, 海岸工学論文集, 第 50 巻, pp. 6-10.
- Fujima, K. and C., Goto (2003): Truncation error of numerical simulation of linear dispersive wave theory, Proc. 2 nd Int. Conf. Asian and Pacific Coasts 2003. pp. 99-100.
- Mase, H. and J. T., Kirby (1992): Hybrid frequency-domain KdV equation for random wave transformation, Proc. 23 rd Int. Conf. Coastal Eng., Venice. pp. 474-487.
- Synolakis, C., E. (1987): Runup of solitary waves, J. F luid Mech., Vol. 185, pp. 523-545.
- Yoon, S., B. (2002): Propagation of distant tsunamis over slowly varying topography, J. Geophys. Res., 07 (C10), 3140, doi: 10.29/2001 JC 000791, pp. 4-11.