

非線形の波の数値シミュレーションにおける 2 次波の性質

加 藤 始*・信 岡 尚 道**・小松崎泰光***

海洋波の非線形の計算において 2 次波のスペクトルが f^{-5} の特性をもつためには, 1 次波のスペクトルはほぼ f^{-8} の減衰特性を持つべきであるとの Tayfun (1990) の指摘を考慮し, 本論文では一方向及び多方向の波で 2 次の非線形数値シミュレーションを行い, 1 次波のスペクトルの形状と計算条件が 2 次波のスペクトルと波の統計的性質にどう影響するのかを調べた。深海波では波の非線形性のよい指標とされる skewness は浅海性が強くなると差の周波数成分の寄与のため非線形性の強さに対応しない。また浅海性の強い波を対象としたシミュレーションの結果から, 非線形拘束長周期波の波高が 1 次波の波高の 2 乗に比例するという結果を得た。

1. 緒 言

海の波には非線形の性質があり, その影響は水面波形の頻度分布が正規分布からずれる現象や周波数スペクトルの低周波・高周波側が線形波より増大する現象など多様な形で現れる。従来, 波の統計量の研究では, 線形数値シミュレーションが有効に使われて来ているが, 非線形性の影響についてはあまり解明されていない。

波の非線形シミュレーションを用いた研究は, 波力を対象としたものが 1970 年代から見られる。沿岸波浪の統計的性質を対象としたものは従来ほとんど見られなかったが, 最近, 波頂高の分布に関して Forristall (2000) の論文が発表されている。一方, 国際会議論文としては Prevosto (1998) の他かなりの数の研究が見られるが, ほとんどは深海波が対象であり, また詳しい計算内容は示されていない。小松崎ら (2001) は波の非線形シミュレーションを行い, skewness 等の波の統計量に及ぼす非線形性の影響を議論したが, 一部に問題もあった。これら従来の非線形シミュレーションでは, 例外なく 1 次波のスペクトルとしては高周波側が f^{-5} に比例して減衰する JONSWAP スペクトルが使われている。

一方 Tayfun (1990) は, 実測された海の波のスペクトルの高周波部が $f^{-5} \sim f^{-4}$ の減衰特性を示すのは, すでに非線形性の影響が入っているためであり, 高周波側がこのような減衰特性をもつ波をシミュレーションで得るためには, 1 次波のスペクトルの高周波側は $f^{-9} \sim f^{-8}$ の減衰特性をもつべきことを計算で示している。しかしこれまでの非線形シミュレーションを扱った論文では, 2 次のパワーがスペクトルにどう現れるかはほとんど示されておらず, 非線形の波のシミュレーション方法が確立されているとは言えない。

近年, 海岸付近の砕波帯で生じる長周期波が海浜変形との関連で注目されており, 現地観測データの解析や理

論的な解析が数多く行われている (例えば, 中谷ら, 1998; 瀬戸口ら, 1998; 等)。砕波帯で観測される長周期波は, 入射した波群に伴う非線形の拘束波が原因の 1 つと考えられている。堀江ら (2002) は入射波のスペクトルから長周期波の予測を行ったが, 波の非線形性を考慮する必要があることを指摘している。

本論文では浅海性の波を対象に, 一方向及び多方向の波のいろいろな条件の下で 2 次の非線形数値シミュレーションを行う。そして非線形の高周波成分が, 2 次波のスペクトルと波の統計的性質にどう影響するのかを議論する。また低周波側への影響を対象にしたシミュレーションの結果から, 非線形の拘束長周期波の性質を調べ, 1 次の波との関係について検討する。

2. シミュレーション手法

(1) シミュレーション波形の定式化

2 次までの非線形性を考慮した表面波形 $\eta(x, t)$ は次式のように与えられる (Tuah ら, 1985; 橋本, 1993)。

$$\eta(x, t) = \eta^{(1)}(x, t) + \eta^{(2)}(x, t) \\ = \int_{k_1, \omega_1} \{dA^{(1)} + dA^{(2)}\} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \dots \dots \dots (1)$$

ここに, $dA^{(1)}, dA^{(2)}$ は表面波の 1 次及び 2 次の Fourier-Stieltjes 成分の複素振幅であり, これらは次の式 (2), (3) でそれぞれ計算される。

$$dA^{(1)} = \begin{cases} \sqrt{S^{(1)}(\omega)} d\omega & : (\text{一方向}) \\ \sqrt{S^{(1)}(\omega, \theta)} d\theta d\omega & : (\text{多方向}) \end{cases} \dots \dots (2)$$

$$dA^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{k_1, \omega_1} \int_{k_2, \omega_2} H(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega_1, \omega_2) \\ \times dA^{(1)}(\mathbf{k}_1, \omega_1) dA^{(1)}(\mathbf{k}_2, \omega_2) \dots \dots (3)$$

ここに $S^{(1)}(\omega)$, $S^{(1)}(\omega, \theta)$ は 1 次の周波数スペクトル及び方向スペクトルである。式 (3) の $H(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega_1, \omega_2)$ は表面波の 2 次非線形核関数であり, 次式で表される。

* 正会員 工博 茨城大学名誉教授
** 正会員 工博 茨城大学助手 工務部都市システム工学科
*** 正会員 工修 東亜建設工業(株)

$$H(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2g} \left[2(\omega_1 + \omega_2) D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega_1, \omega_2) - \frac{g^2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}{\omega_1 \omega_2} + \omega_1 \omega_2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 \right] \cdots (4)$$

$$D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega_1, \omega_2) = [2(\omega_1 + \omega_2) \{ g^2 \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - (\omega_1 \omega_2)^2 \} - \omega_1 \omega_2 (\omega_1^3 + \omega_2^3) + g^2 (k_1^2 \omega_2 + k_2^2 \omega_1)] / [2 \omega_1 \omega_2 \{ (\omega_1 + \omega_2)^2 - g |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| \tanh(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| h) \}] \cdots (5)$$

ここに、 g は重力加速度、 $\mathbf{k}_i$ と ω_i は線形成分波の波数ベクトルと角周波数であり、それらは分散関係式

$$\omega_i^2 = g |\mathbf{k}_i| \tanh(|\mathbf{k}_i| h) \cdots (6)$$

を満たし、かつ次の関係がある。

$$\mathbf{k}_i(-\omega_i) = -\mathbf{k}_i(\omega_i) \cdots (7)$$

式(1)の2次波成分 $\eta^{(2)}(x, t)$ は次式のように書ける。

$$\eta^{(2)} = \eta^{(2)}_P + \eta^{(2)}_M \cdots (8)$$

$\eta^{(2)}_P$, $\eta^{(2)}_M$ は周波数の和と差の成分であり、Forristall (2000) は式の形で与えているが、本研究ではプログラム上で $\eta^{(2)}_P$, $\eta^{(2)}_M$ を計算した (図-2 参照)。

(2) シミュレーション条件と2次の波形例

非線形不規則波をシミュレーションする場合は、式(2)のように一方向では1次波形の周波数スペクトルを、多方向では方向スペクトルを必要とする。

周波数スペクトル $S(f)$ としては合田 (1987) による修正 Wallops 型 ($m=8$) を主に使用し、比較のため修正 JONSWAP 型も使った。方向スペクトルは、周波数スペクトル $S(f)$ と光易型の方向関数 (合田, 1990) を用いて計算し、方向集中度の最大値 $S_{\max}$ は 10, 25, 100, 300, 1000 を使用した。方向スペクトルの方向分解角は主として $\Delta\theta=6^\circ$ を用いた。一方向及び多方向のシミュレーションにおける成分波の数は 256、サンプリング時間は $\Delta t=0.25$ s または 0.50 s である。使用した周波数範囲は $f=0.0\sim 6.5 f_p$ または $20.0 f_p$ (f_p : ピーク周波数) とした。また一様乱数を用いて位相差 $0\sim 2\pi$ を与えた。

Forristall (2000) は JONSWAP スペクトルを1次波のスペクトルとして使い、 $\Delta t=0.25$ s, $f=0.0\sim 5.0 f_p$ の条件で計算を行って、2次波形の和と差の成分の例を1次波形と共に示している (図-1)。これと比べて小松崎ら (2001) の2次波形の計算結果には位相にずれがあり、そのため、1次と2次波形の和 $\eta^{(1)} + \eta^{(2)}$ の skewness が過大になっていることが分かった。そこで本研究での計算結果の妥当性をチェックするため、図-1と同じ条件で計算した1次と2次の波形を図-2に示す。この場合使用する乱数が異なるために全く同じ波形は得られないが、2次の和と差の成分の現れ方はほぼ一致しており、この範囲で今回の結果は妥当であると考えられる。

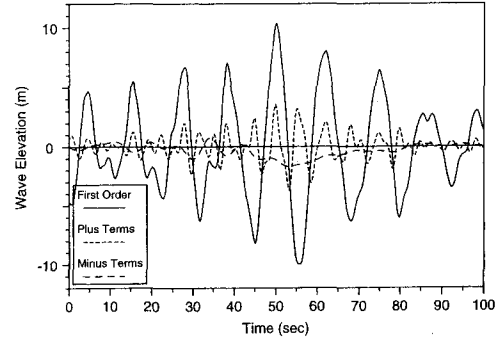


図-1 Forristall (2000) が示した2次の波形の例。 ($H_{1/3}=11.2$ m, $T_{1/3}=12$ s, $h=40$ m の場合)

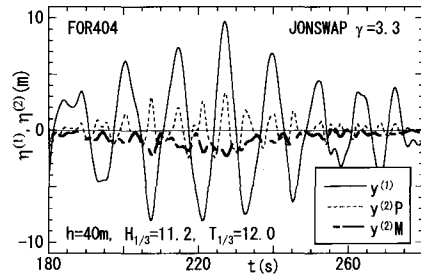


図-2 Forristall (2000) と同じ条件で計算した水面波形

3. 一方向シミュレーション波形の解析

(1) 1次波のスペクトル形の影響

まず一方向シミュレーションにおける1次のスペクトル形の影響を示す。図-3 (a) は1次スペクトルが $m=8$ の Wallops 型の場合で、2次のスペクトル $S^{(2)}$ の高周波側は f^{-5} にしたがって減衰するので、 $(1+2)$ 次のスペクトル $S^{(1+2)}$ の高周波側は Tayfun (1990) が指摘したように f^{-5} にしたがって減衰する。一方、図-3 (b) は1次のスペクトルが JONSWAP 型 ($\gamma=1.0$) の場合であるが、2次のスペクトル $S^{(2)}$ の高周波部分の減衰が緩やか

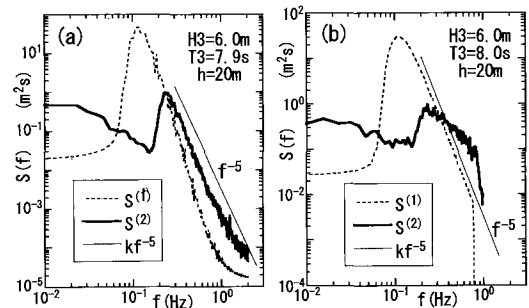


図-3 1次波のスペクトルによる2次のスペクトルの違い。(a): Wallops 型 ($m=8$), (b): JONSWAP 型 ($\gamma=1.0$)

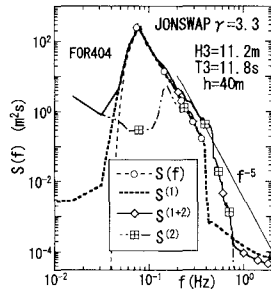
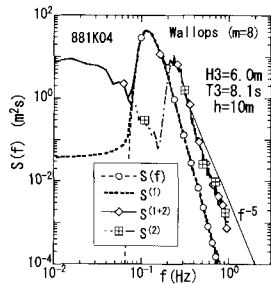


図-4 Forristallと同じ波形(図-2)のスペクトル

図-5 Wallops型($m=8$), $f_{\max}=6.5 f_p$ の場合の2次のスペクトルの例 ($Ur=31$)

であるため、 $(1+2)$ 次のスペクトル $S^{(1+2)}$ の高周波側は f^{-5} よりも緩やかな減衰を示す。この図の場合は $f_{\max}=6.5 f_p$ の計算なのでこの程度であるが、 $f_{\max}=20 f_p$ の場合には非線形の成分が高周波部分に過度に出すぎてしまう。

図-4はForristall (2000) の計算条件で図-2の波形を計算したときの1次と2次のスペクトルを示している。この場合、使用周波数範囲を $f_{\max}=5.0 f_p$ の設定で狭くとり、2次高周波成分のパワーの増加を抑えている。その分だけ波浪統計量に及ぼす非線形性の影響をカットしているとも言えるが、これが1次スペクトルに f^{-5} 型のJONSWAP型を使う場合の妥協点かも知れない。

図-5は $m=8$ のWallops型で $f_{\max}=6.5 f_p$ の設定で計算すると高周波端 $f=f_{\max}$ 付近の減衰が f^{-5} よりやや急になることを示している。この $f_{\max}=6.5 f_p$ の場合には $m=7$ とする方が高周波端が f^{-5} に近くなる。

(2) skewness と2次のパワーの変化

図-6は1次波が $H_{1/3}=6.0$ m, $T_{1/3}=8.0$ s でスペクトル形がWallops型とJONSWAP型のとき、2次波形 $\eta^{(2)}$ のrms値が水深と共にどう変るかを $f_{\max}=6.5 f_p$ で計算して比較したものである。 $\eta^{(2)}$ rmsは水深30m付近より浅いところで急激に大きくなるが、図-5と図-3(b)の差に対応してJONSWAP型の方が大きく出ることが分かる。

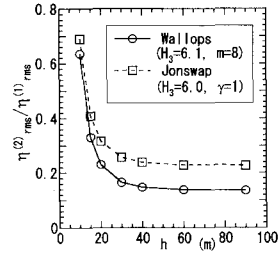
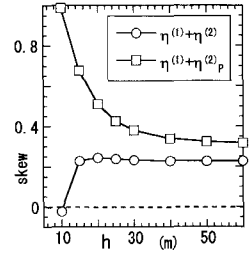
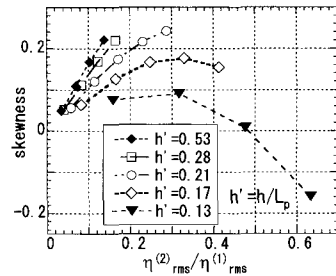
図-6 2次のパワーの水深変化 ($T_{1/3}=8.0$ s)図-7 skewnessの水深変化 ($H_{1/3}=6.0$ m)

図-8 skewness と2次のパワーの関係

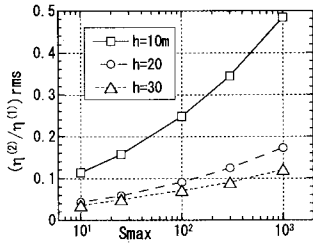
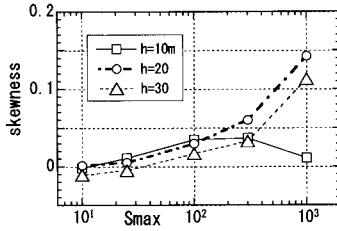
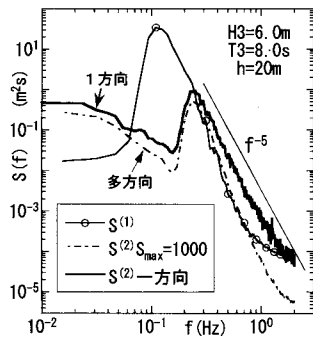
図-7は同じ1次波で水深を変えたときのskewnessの変化を示している。従来skewnessは非線形性の強さをよく表すことが知られているが、この場合水深が減少してもskewnessはあまり変わらず、 $h=15$ m付近で小さくなりはじめ、 $h=10$ mではマイナスになる。この原因は $\eta^{(2)}_M$ の影響で波形が下に歪むためではないかと考え、 $\eta^{(2)}_M$ を除いた $(\eta^{(1)} + \eta^{(2)}_p)$ についてskewnessを計算すると、図-7の中に示したように水深の減少と共に単調に増加し、この推定の通りであることが分かった。

図-8は一定水深で1次波高を変えて計算したときのskewnessと $\eta^{(2)}_{\text{rms}}/\eta^{(1)}_{\text{rms}}$ の関係を示しており、ここで使った L_p はピーク周波数に対する波長である。この図から、skewnessは深海波では波の非線形性の程度によく対応するが、浅海性が強くなるほど対応しなくなり、逆にマイナスの値をとる傾向が分かる。

4. 多方向シミュレーションの結果

非線形の波の理論計算で2次の方向スペクトルが一義的には決まらないことを木村 (1985) は指摘しているが、シミュレーションでは方向スペクトルを積分して求める周波数スペクトルが乱数の影響で大きな変動を伴う。ここでは $H_{1/3}=6.0$ m, $T_{1/3}=8.0$ s の波で約10回の計算結果を平均し、2次の周波数スペクトル、非線形性の強さ、skewnessが $S_{\max}$ と共にどう変るかを示す。

図-9は $\eta^{(2)}$ のrmsの相対値と $S_{\max}$ との関係を示しているが、この図から方向分散が小さくなるほど非線形

図-9 非線形性の強さと $S_{\max}$ の関係図-10 skewness の大きさと $S_{\max}$ の関係図-11 多方向で計算した $S^{(2)}(f)$ と一方向との比較

性が強くなることが確認される。

図-10 は skewness と $S_{\max}$ の関係であるが、水深が大きいときは skewness と非線形性の強さが対応するが、 $h=10\text{m}$ で $S_{\max}$ が大きいときに skewness が非線形性の強さと対応しないところは一方向シミュレーションの結果と同じである。

多方向の計算では式 (1) から求めた $\eta^{(2)}(x, t)$ を方向角で積分してある地点の波形を求め、次に2次のスペクトル $S^{(2)}$ を計算する。図-11 はこうして計算された $S^{(2)}(f)$ を一方向の計算で得られた $S^{(2)}(f)$ と比較しているが、多方向で計算されたスペクトルの高周波部分は一方向で計算されたスペクトルより小さく、減衰特性が f^{-5} よりも急勾配である。テスト計算の結果、 $f_{\max}=20.0 f_0$ の多方向シミュレーションでの1次スペクトルとしては、Wallops 型の $m=7$ がほぼ適当であることが分かった。

5. 2 次の拘束長周期波の解析

2 次の低周波成分波の計算は1方向シミュレーションの $\Delta t=0.50\text{s}$, $f=0.0\sim 20.0 f_0$, 成分波数 256, データ個数 $N=16384$ の条件で行った。データの長さが十分であることは、 $N=65536$ のテスト計算結果と比べて確認した。

計算結果のスペクトル $S^{(2M)}$, $S^{(2P)}$ 及び $S^{(1)}$ の例を図-12 (a), (b) に示す。 $\eta^{(2)}_M$ データからこの低周波数成分の波高 $H_{1/3}^{(M)}$ (以後単に H_3 と書く) を計算し、1 次波高 H_{3s} との比を水深波長比 h/L_3 ($L_3: T_{1/3}$ に対応する波長)

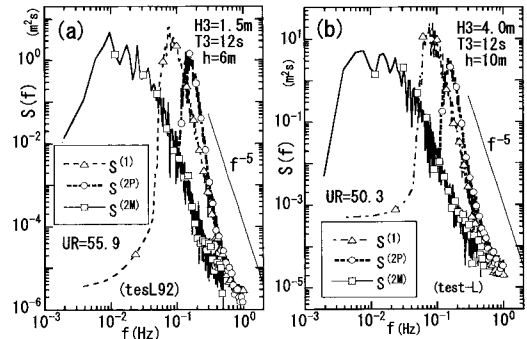


図-12 拘束長周期波のスペクトルの例

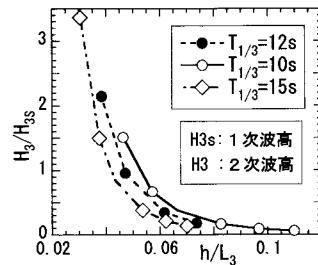
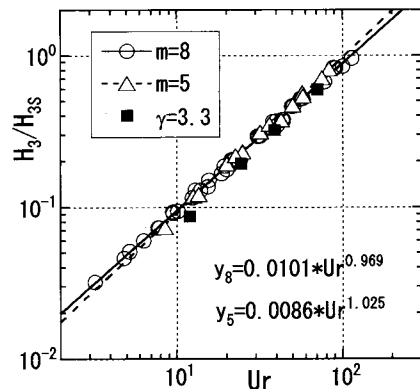


図-13 長周期波の波高比と水深波長比の関係

図-14 拘束長周期波の波高と Ur の関係

に対してプロットすると図-13 になる。そこで計算した全データの波高比を次式で定義したアーセル数

$$Ur = H_{3s} L_3^2 / h^3 \quad \dots\dots\dots (9)$$

に対してプロットしてみると、図-14 のように Ur の関数としてよく表されることが分かった。1 次波のスペクトルが $m=8$ の Wallops 型の場合の関係は

$$H_3/H_{3s} = 0.0101 Ur^{0.969} \quad \dots\dots\dots (10)$$

で表される。また JONSWAP 型の $\gamma=1.0$ の場合に相当する $m=5$ に対しては少しだけずれて

$$H_3/H_{3s} = 0.0086 Ur^{1.025} \quad \dots\dots\dots (11)$$

という関係が得られる。堀江ら (2002) によると高波浪時の碎波帯内での波のスペクトルはブレットシュナイダー・光易型よりもピークが尖っている。そこで 1 次スペクトルを JONSWAP 型 $\gamma=3.3$ としデータ数は 8192 で計算した結果を図-14 にプロットすると、 Ur の小さいところで少し H_3/H_{3s} は小さくなった。

式 (10) の関係は、 H_3/H_{3s} が Ur にほぼ正比例することを表している。このことから $H_3 \propto H_{3s}^2$ という関係のあることがわかる。

H_3/H_{3s} の変化と同時に、 $\eta^{(2)}_M$ と $\eta^{(2)}_P$ の rms 値の関係を調べたところ、今回の長周期波の計算条件範囲では両者はほとんど等しく、アーセル数が 10 以下のとき $\eta^{(2)}_M$ の rms 値の方が約 10% 程度小さくなった。

6. 結 論

本研究の主要な結論を以下に示す。

(1) 深海波の一方向シミュレーションにおいては、1 次波のスペクトルが $m=8$ の Wallops 型で $f_{\max}=20 f_p$ のとき、2 次のスペクトルの高周波部は f^{-5} 型となるが、JONSWAP 型のときは $f_{\max}=6.5 f_p$ でも 2 次波スペクトルの高周波部は f^{-5} よりかなり大きくなり、もっと小さな $f_{\max}$ 値が必要である。

(2) cut-off 周波数を $f_{\max}=5.0 f_p$ 程度に小さくした計算では、高周波成分を強制的に削除するため、波浪統計量に及ぼす非線形性の影響も小さくなる。

(3) 多方向シミュレーションにおいては、方向分散が小さいほど非線形性の強さは大きくなる。また 2 次波の高周波成分が一方向の場合より小さく、 $f_{\max}=20.0 f_p$ でも Wallops 型の $m=8$ では高周波部分の減衰が f^{-5} より急になる。

(4) 深海波では skewness が非線形性の強さのよい指標となるが、浅海性が強くなると wave set-down の影響で skewness は 2 次波の大きさに比例しなくなる。

(5) 差の周波数成分の寄与で生じる 2 次の拘束長周期波の波高と 1 次波の波高の比はアーセル数の関数として一義的に表され、水深と 1 次波の $T_{1/3}$ が等しいとき拘束長周期波の波高は 1 次波の波高の 2 乗に比例するという結果が得られた。

謝辞：小松崎ら (2001) に対する討議で合田良實博士より Tayfun (1990) の研究に関する貴重なコメントを頂いた (海講討議集)。ここに記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 木村 晃 (1985): 非線形長周期波の 2 次元スペクトル, 第 32 回海講論文集, pp. 154-158.
- 合田良實 (1987): 数値シミュレーションによる波浪の標準スペクトルと統計的性質, 第 34 回海講論文集, pp. 131-135.
- 合田良實 (1990): 港湾構造物の耐波設計, 鹿島出版会, 333 p.
- 小松崎泰光・加藤 始・信岡尚道 (2001): 波の統計量に及ぼす非線形性の影響—主として数値シミュレーションを用いた解析—, 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp. 176-180.
- 瀬戸口喜祥・浅野敏之・中村和夫・西 隆一郎・佐藤道郎 (1998): 現地観測で得られた浅海域の長周期波の特性, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp. 296-300.
- 中谷耕一・寛田博章・水口 優 (1998): 長時間連続現地観測データにおける長周期波と波群の特性, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp. 291-295.
- 橋本典明 (1993): 波浪の多方向性と弱非線形性を考慮した水圧波から表面波への換算法について, 港研報告, 第 32 巻, 第 1 号, pp. 27-51.
- 堀江岳人・関 克己・水口 優 (2002): ストーム時の波群 (包絡波) と長周期波の特性, 海岸工学論文集, 第 49 巻, pp. 151-155.
- Forristall, G. Z. (2000): Wave crest distributions: Observations and second-order theory, J. Phys. Oceanogr., Vol. 30, pp. 1,931-1,943.
- Prevosto, M. (1998): Effect of directional spreading and spectral bandwidth on the nonlinearity of the irregular waves, Proc. 8 th Int. Offshore and Polar Eng. Conf., Montreal, PQ, pp. 119-123.
- Tayfun, M. A. (1990): High-wave-number/frequency attenuation of wind-wave spectra, J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE, Vol. 116, No.3, pp. 381-398.
- Tuah, H. and R. T. Hudspeth (1985): Finite water depth effects on nonlinear waves, J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE, Vol. 111, pp. 401-416.