

ラグランジェ方程式を用いた打ち上げ波帯における 不規則波の遡上解析

出口 一郎*・澤田 崇宏**・松村 直輝***

ラグランジェ型の基礎方程式を摂動展開して求められた 1 次近似解と、周波数応答関数を用いた 2 次元及び 3 次元傾斜海浜上における不規則波の遡上運動を解析する手法を提案した。提案した方法を用いると、砕波帯相似パラメータが 3 以上の領域で、斜面上で顕著な砕波が生じず、岸沖方向にほぼ完全な重複波が形成される場合は、入射角にかかわらず煩雑な数値計算を行うことなく不規則波の波先の運動を容易に再現することができることが分かった。ただし、入射波高に対して汀線の変動が線形に応答するという取り扱いをしていることあるいは非砕波の状態を仮定した解析であることから、現地海岸での遡上運動について検討は、今後に残された問題である。

1. ま え が き

従来、打ち上げ波帯における流体運動の解析は、オイラー座標で表記された非線形波動方程式を数値計算することにより行われてきた。しかし、数値計算による手法では、計算時間が長くなり、非線形項の処理や移動境界の適用による数値誤差を無視できない。また、Carrier・Greenspan (1957) は、非線形長波方程式に複雑な変数変換することにより、2 次元傾斜海浜上での厳密解を誘導しているが、この方法では不規則波に拡張するのは困難であると考えられる。著者らも、ラグランジェ表記された連続式と運動方程式を摂動展開することにより、1 次近似解と 2 次近似解を誘導した(合田ら, 2000; 浅川ら, 2002)。しかし、これらも規則波に対する解析であった。

本研究では、先に著者らが導いた 1 次近似解と、入射波と遡上波の応答関数を用いて 2 次元、3 次元傾斜海浜上における不規則波の遡上波を算定する手法を提案し、2 次元及び平面水槽内での実験により、その適用性を検証する

2. ラグランジェ方程式 1 次近似解と応答関数の誘導

(1) 基礎方程式と 1 次近似解

解析に使用する基礎方程式は、汀線方向に y 軸、汀線直角沖方向に x 軸、静水面から鉛直上方に z 軸をとった座標系で次式で表される。

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p, y, z)}{\partial(a, b, c)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(x, p, z)}{\partial(a, b, c)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(x, y, p)}{\partial(a, b, c)} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 (a, b, c) は、水粒子の初期位置、 g は重力加速度、 p は圧力である。

代表水深 d 、その地点における波長 L を用い式 (1) ~ 式 (4) をそれぞれ無次元化 ($A=a/l$, $B=b/l$, $C=c/d$, $X=x/l$, $Y=y/l$, $Z=z/d$, $P=p/\rho g d$, $T=\sqrt{g d} t/l$) し、 $\delta=d/L$ を微小として変数 X, Y, Z, P, T を、初期値 A, B, C, P_0, τ 周りに摂動展開する。

$$\left. \begin{aligned} X &= A + \delta X_1(A, B, C, T) + \delta^2 X_2(A, B, C, T) + \dots \\ Y &= B + \delta Y_1(A, B, C, T) + \delta^2 Y_2(A, B, C, T) + \dots \\ Z &= C + \delta Z_1(A, B, C, T) + \delta^2 Z_2(A, B, C, T) + \dots \\ P &= P_0(A, B, C) + \delta P_1(A, B, C, T) \\ &\quad + \delta^2 P_2(A, B, C, T) + \dots \\ T &= \tau + \delta \tau_1(\tau) + \delta^2 \tau_2(\tau) + \dots \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

これらの式を無次元化された式 (1) ~ (4) に代入し、 δ のオーダーで整理する。境界条件としては、自由水面では初期水面を形成していた粒子は常に水面にあり、水底では水底にあった粒子は水底を離れることはないとする。すなわち傾斜海浜上では次式で与えられる。

$$P=0, \text{ on } C=0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$Z=-IX, \text{ on } C=-IA \quad \dots\dots\dots (7)$$

これらの方程式を解いて得られる 2 次までの近似解についてはすでに報告している(浅川ら, 2002)。ここでは、1 次近似解を用いて不規則波の遡上解析を行う。

(2) 2 次元傾斜海浜上での周波数応答関数

斜面上に波が直角入射し、完全重複波が形成されている状態での解について示す。1 次近似解については以下のように得られている。

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -\frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \eta}{\partial A} & Z_1 &= -\frac{C+IA}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial A^2} - \frac{I}{\sigma^2} \frac{\partial \eta_1}{\partial A} \\ P_1 &= -\frac{C}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial A^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

* 正 会 員 工博 大阪大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻
** 正 会 員 工修 大阪ガス
*** 学生会員 大阪大学院工学研究科

$$\eta_1 = c_1 \text{Bessel } J \left[0, 2\sqrt{A} \sqrt{\frac{\sigma^2}{I}} \right] e^{-i\sigma\tau} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 c_1 は未定定数、 $\text{Bessel } J[]$ は、第1種ベッセル関数である。

今、無次元量で考える。沖波波高 H_0 の波が斜面に向かって進行しており、斜面上の腹の位置 ($X=0.115$) で波の波高を $H_{x=\text{loop}}$ とする。式 (9) において、勾配、周期に関わらず、斜面上の腹の位置での波高は、 $H_{x=\text{loop}} = 0.81$ となる。また、浅水係数を K_s を用いて、腹の位置での波高 H を表現すると $H = 2H_0 K_s$ となる。したがって、未定係数 c_1 は、式 (10) のように表される。

$$c_1 = \frac{2K_s H_0}{H_{x=\text{loop}}} \dots\dots\dots (10)$$

式 (9) 式 (10) より、2次元傾斜海浜上での沖波の波高に対する遡上波の振幅比は次式で表される。

$$\frac{R_{\max}}{H_0} = \frac{2K_s}{H_{x=\text{loop}}} \dots\dots\dots (11)$$

水深 h の地点から汀線までの距離を l とすると、この地点の波動運動と遡上運動の位相差 τ は次式で与えられる。

$$\tau = \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{gd}} \dots\dots\dots (12)$$

式 (11)、式 (12) より、2次元傾斜海浜上での周波数応答関数は次式で与えられる。

$$H(\sigma) = \frac{4K_s}{H_{x=\text{loop}}} e^{i\sigma\tau} \dots\dots\dots (13)$$

(3) 3次元傾斜海浜上での周波数応答関数

斜面上に波が斜め入射し、岸沖方向に完全重複波が形成されている状態での1次近似解については以下のように得られている。

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \eta_1}{\partial A} & Y_1 &= \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \eta_1}{\partial B} \\ Z_1 &= -\frac{(C+IA)}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial A^2} & P_1 &= \frac{C}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial A^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$$\eta_1 = \left\{ c_1 \text{Hypergeometric } F \left(\frac{1}{2}, \frac{m^2}{2n}, 1, 2An \right) \right\} \cdot e^{-An} \times (e^{-inB} + K, e^{-inB}) e^{i\sigma\tau} \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 c_1 は未定定数、 K_r は沿岸方向の反射率、 $\text{Hypergeometric } F[]$ は Kummer の合流型超幾何関数、 n は沿岸方向の波数、 $m^2 = \sigma^2/I$ で、未定係数 c_1 は、2次元の場合と同様に次式のように表される。

$$c_1 = \frac{2K_s H_0}{H_{x=\text{loop}}} \dots\dots\dots (16)$$

また、 n は、無次元水深 h における入射角 (直角入射の場合を 0° とする) θ と次式で関係付けられる。

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{n\sqrt{h}}{\sigma} \right) \dots\dots\dots (17)$$

式 (15) 式 (16) より、3次元傾斜海浜上で沿岸方向に進行する場合の沖波の波高に対する遡上波の振幅比及び波動運動と遡上運動の位相差 τ は、2次元傾斜海浜上の重複波同様式 (11)～(12) で与えられ、周波数応答関数は式 (13) となる。ただし、式 (12) 右辺の積分は、斜面上を屈折して進行する波向線に沿った経路積分となる。

一方、式 (11)、(12) 及び式 (14)～(16) より、3次元傾斜海浜上で沿岸方向に重複する場合の沖波の波高に対する遡上波の振幅比及び周波数応答関数は次式で表される。

$$\frac{R_{\max}}{H_0} = \frac{2K_s}{H_{x=\text{loop}}} (1 + K_s) \cos(nB) \dots\dots\dots (18)$$

$$H(\sigma) = \frac{4K_s}{H_{x=\text{loop}}} (1 + K_s) \cos(nB) e^{i\sigma\tau} \dots\dots\dots (19)$$

(3) 遡上特性

本研究では、1次近似解を用いて不規則波の遡上を推定することが目的である。そこで、まず斜面上での遡上高さ及び空間波形が1次近似解と2次近似解でどの程度異なるのかということについて検討した。図-1は、Savageによってまとめられた遡上高さに関する実験結果 (Savage, 1958) を基に、勾配 1/5 の斜面上への無次元遡上高を碎波帯相似パラメータ ξ で表した回帰式と式 (11) の関係を示したものである。図中には、 $H/L_0 = 0.03$ 及び 0.05 の場合の2次近似解による計算結果も示してある。式 (11) によると、線形波動論を用いると、1次近似解での無次元遡上高さ $R_{\max}/H_0$ は、一定値 (ほぼ 3.0) となる。Miche の碎波限界では、勾配 1/5 のときは、碎波帯相似パラメータが3以上の場合は非碎波となる。したがって、解析の適用領域は $\xi \geq 3$ である。Miche の碎波限界 3.0 で実験結果と式 (11) が一致し、 $\xi > 3$ の領域では 30% 程度の誤差が生ずる。この誤差は、2次近似解を用いることによって改善される。2次近似解を計算する際には、1次近似解と2次近似解の振幅比が必要になる。この振幅比は、斜面の法先の水深でのストークス波の1次近似解と2次近似解との振幅比とした。

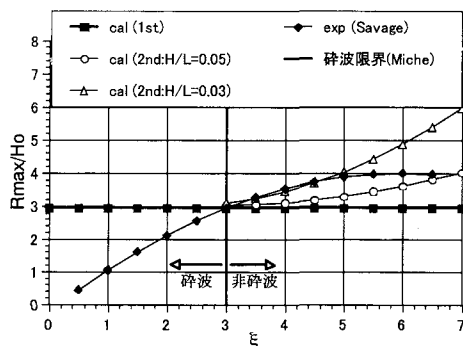


図-1 碎波帯相似パラメータと最大遡上高さとの関係

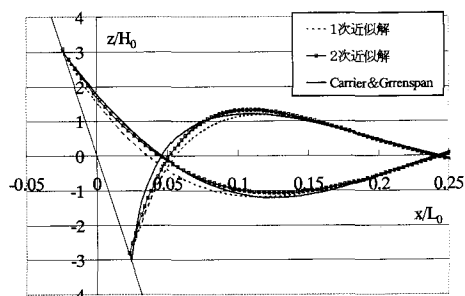


図-2 Career・Greenspan の厳密解との比較

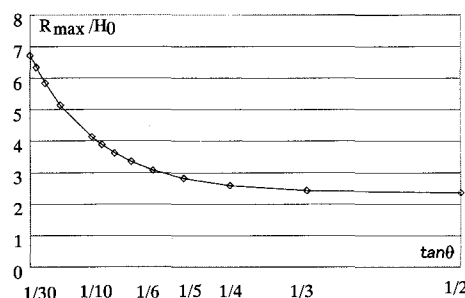


図-3 無次元遡上高さと勾配との関係

図-2 は、勾配 $1/5$ の斜面上に波高 1 cm 、周期 2 s の波浪が入射した場合 ($\xi=0.5$, $H/L_0=0.0016$) に斜面上で形成される重複波形の計算結果と Career・Greenspan の厳密解による遡上波形と 1 次及び、2 次近似解による遡上波形とを比較したものである。図より、非碎波領域で入射波の波形勾配が小さい場合は 1 次近似解と 2 次近似解に顕著な差異は生じず、Career・Greenspan の厳密解とほぼ一致するが、重複波の腹近傍では、2 次近似解のほうがより厳密解に近い波形となる。

図-3 は無次元遡上高さと勾配との関係を示したものである。無次元遡上高さは、勾配が一定であれば、周期によらず一定となる。これは、周期を変えても勾配が一定であれば、腹の位置での浅水係数 K_s は一定となるためである。解析では、無次元遡上高さは、緩勾配の斜面になるほど指数関数的に増加する。ただし、解析解は全て非碎波と仮定している。

3. 打ち上げ波帯における流体運動の実験

(1) 実験方法と諸元

実験では、一樣勾配斜面上に波を入射させ、ビデオカメラにより波先の運動解析をした。実験に使用した水槽は、長さ 30 m 、幅 0.7 m 、高さ 0.9 m の 2 次元水槽と、長さ 10 m 、幅 20 m 、高さ 0.6 m の平面水槽で、それぞれ勾配 $1/5$ の不透水性の傾斜海浜を作成し、有義周期 $T_s=1\sim 4\text{ s}$ 、有義波高 $H_s=0.7\sim 3\text{ cm}$ の波を入射させた。な

お、水深は、水平床上で 33 cm とした。表-1 に実験条件を示す。

表-1 実験条件

	T_s (s)	H_s (m)	沿岸方向反射率
exp-1	1.45	1.20	2 次元
exp-2	1.73	0.73	
exp-3	3.08	1.22	
exp-4	1.45	1.20	平面
exp-5	1.77	1.40	
exp-6	2.50	1.75	
exp-7	1.50	1.87	0.69
exp-8	1.70	1.99	0.71
exp-9	1.80	1.79	0.70

平面水槽において、波の入射角は 30° に設定し、沿岸方向に重複波を作る場合は、汀線直角方向に反射板を設置した。実験では、ほとんどの波は碎波せずに遡上・流下を繰り返すものであった。岸沖方向の反射率は、岸沖方向に並べた 2 本の波高計による時系列より、入射分離によって測定した。沿岸方向の反射率は、汀線の岸沖変位が最大の地点での汀線の変動を測定し、沿岸方向の反射率を 1 と仮定した場合の腹の位置での汀線の変動と比較して決定した。2 次元、3 次元の実験ともに、岸沖方向の反射率は $0.8\sim 1.0$ 、3 次元の実験において沿岸方向に重複波を作った場合の沿岸方向の反射率は $0.6\sim 0.7$ であった。

(2) 2 次元傾斜海浜上での遡上波

図-4 は、有義波高 1.2 cm 、有義周期 1.45 s の不規則波が入射した場合の斜面上の波先の運動と、式 (13) を用いて計算される遡上波スペクトルの逆フーリエ変換から推定される波先の位置の比較を示したものである。このときの水深 33 cm の地点における有義波諸元を用いて計算される碎波帯相似パラメータは、ほぼ 3 であり、間瀬ら (1983) による不規則波の遡上に対する研究によると入射波数と遡上波数はほぼ一致する領域である。碎波帯相似パラメータが比較的大きな領域では、傾斜海浜上での波先の運動は、式 (13) によってほぼ再現されることが確認された。

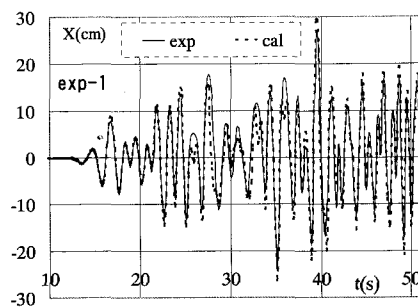


図-4 汀線の岸沖変位の比較

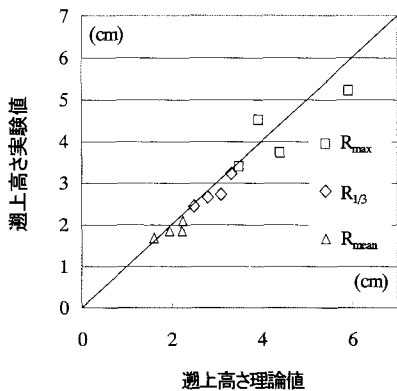


図-5 遡上高さの実験値と理論値との比較

図-5は、最大遡上高さ $R_{\max}$ 、有義遡上高さ $R_{1/3}$ 、平均遡上高さ R_{mean} について、実験値と理論値を比較したものである。実験では $R_{\max}=5.2$ cm, $R_{1/3}=3.3$ cm, $R_{\text{mean}}=2.3$ cm である。1次近似解による計算結果は、 $R_{\max}=5.9$ cm, $R_{1/3}=3.2$ cm, $R_{\text{mean}}=2.1$ cm である。1次近似解による誤差は、最大遡上高さでは13.3%、有義遡上高さでは3%、平均遡上高さでは8.7%である。最大遡上高さについての誤差は、有義遡上高さと平均遡上高さについての誤差より大きくなっているが、1次近似解による誤差の範囲内である。有義遡上高さと平均遡上高さについては、実験値と理論値はほぼ一致している。

図-6は、実測された入射波と遡上波のパワースペクトルから計算される振幅特性について、2つの実験結果と式(13)の計算結果の比較を示したものである。

計算結果は、全ての周波数で振幅比は一定 ($=5.88$) となる。実験による応答関数は、図中に示した2つのケースともほぼ同じ傾向を示す。また、周波数1.0 Hz以上の高周波数領域では、実験から求められた値と式(13)から計算される結果は一致しなくなる。これは、周波数1.0 Hzより短周期の波はもはや長波近似できず、解析の適用領域外であるためである。なお、周波数が1.0 Hz以下の低周波数領域では、位相特性も実験結果と計算結果は

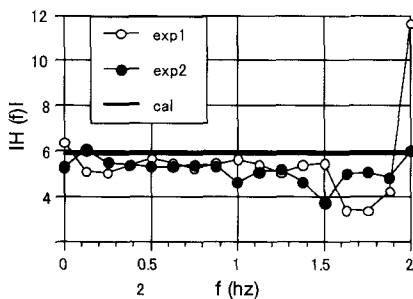


図-6 振幅特性の比較

良い一致を示すことが確認された。

(3) 3次元傾斜海浜上の遡上波

図-7は、3次元傾斜海浜上において、沿岸方向に進行する場合の実験で得られた勾配1/5の傾斜海浜上に水深33 cmでの有義波高1.75 cm、有義周期2.53 sの不規則波が入射した場合の斜面上の波先の運動と、式(13)を用いて計算される遡上波スペクトルの逆フーリエ変換から推定される波先の位置の比較を示したものである。2次元海浜上と比較すると、3次元海浜上での波先の運動の再現性は悪い。その理由は、汀線方向に限られた水槽内での実験結果であったことから、反射波成分の影響が大きくなり、純粋な沿岸方向進行波を作ることができなかったためと考えられる。

図-8は、有義波高1.99 cm、有義周期1.7 sの波動に対して沿岸方向に重複した場合の腹の位置で測定した汀線の岸沖変位と式(19)から計算された汀線位置の変化の比較を示す。ただし、実験では沿岸方向に完全に重複する定常波を作り出すことができなかったことから、図-8に示す計算結果は、沿岸方向の反射率 K_r を実測値0.673として計算したものである。

汀線方向に進行する遡上波同様、2次元実験の結果ほど再現性は良くないが、砕波帯相似パラメータが比較的大きな領域では、傾斜海浜上での波先の運動は、式(19)

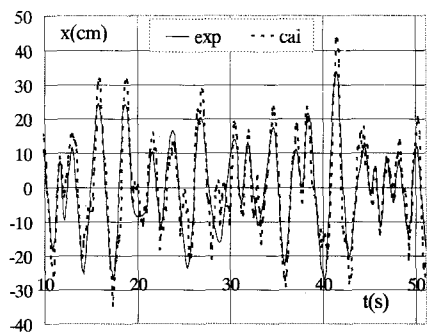


図-7 汀線変動の比較 (沿岸方向進行波)

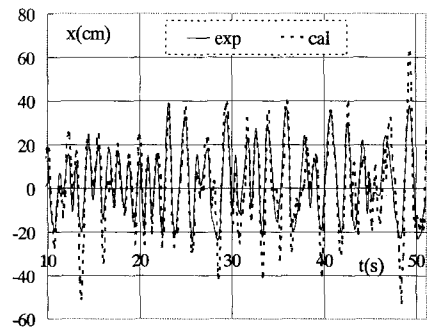


図-8 汀線変動の比較 (沿岸方向反射率0.673)

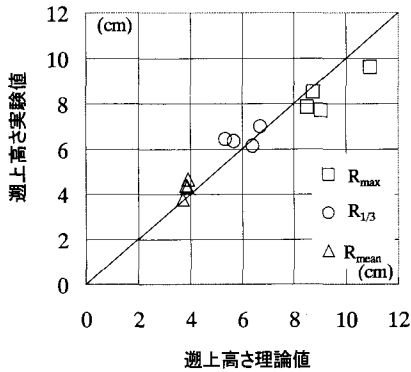


図-9 遡上高さの実験値と理論値の比較

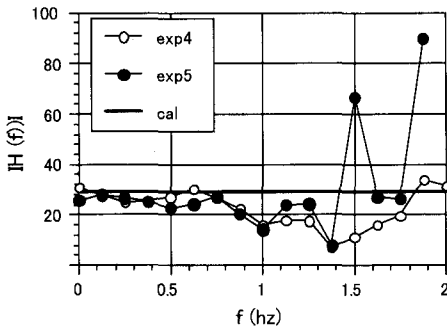


図-10 振幅特性の仕較 (沿岸方向進行波)

によってほぼ再現されることが確認された。

図-9は、最大遡上高 $R_{\max}$ 、有義遡上高 $R_{1/3}$ 、平均遡上高 R_{mean} について、実験値と理論値を比較したものである。実験値は、 $R_{\max}=9.6\text{ cm}$ 、 $R_{1/3}=6.1\text{ cm}$ 、 $R_{\text{mean}}=4.4\text{ cm}$ である。1次近似解では、沿岸方向の反射率を1.0と仮定した場合は、 $R_{\max}=16.2\text{ cm}$ 、 $R_{1/3}=9.5\text{ cm}$ 、 $R_{\text{mean}}=5.7\text{ cm}$ となる。沿岸方向の反射率を0.673とした場合は、 $R_{\max}=10.9\text{ cm}$ 、 $R_{1/3}=6.4\text{ cm}$ 、 $R_{\text{mean}}=3.8\text{ cm}$ である。したがって、解析解において沿岸方向の反射率を考慮しなければ、遡上高さは過大評価する。遡上高さについて実験と解析の誤差は、最大遡上高さでは13.5%、有義遡上高さで8.2%、平均遡上高さで13.6%である。いずれも1次近似解による誤差の範囲内であるが、さらに精度よく遡上高さを再現するには、2次近似解を導入する必要がある。

図-10に、式(19)から計算される応答関数の振幅特

性と実測された入射波と遡上波のパワースペクトルから計算される振幅比の比較を示す。ただし、反射率を0.7としたものである。

式(19)から計算される振幅比は、全ての周波数で一定(=29.2)となる。実験による応答関数は、図-6に示す2次元実験結果と同様の理由で周波数1.0 Hz以上の高周波数領域では式(19)から計算される値と一致しない。位相特性に関しても、周波数が1.0 Hz以下の低周波数領域では、実験値と計算結果は比較的よく一致していることが確認された。

4. 結 語

ラグランジュ型の基礎方程式を摂動展開して求められた1次近似解と、周波数応答関数を用いた2次元及び3次元傾斜海岸上における不規則波の遡上運動を解析する手法を提案した。提案した方法を用いると、砕波帯相似パラメータが3以上の領域で、斜面上で顕著な砕波が生じず、岸沖方向にほぼ完全な重複波が形成される場合は、入射角にかかわらず煩雑な数値計算を行うことなく不規則波の波先の運動を容易に再現することができることが分かった。

しかし、入射波高に対して汀線の変動が線形に応答するという取り扱いをしていること、非砕波の状態を仮定していることあるいは一様勾配斜面上での解析であることから、現地海岸での遡上運動について検討できる状態ではない。これらの課題をふまえ、今後、2次近似解を用いた非線形干渉効果あるいは砕波の影響を考慮できるような解析を行っていく予定である。

参 考 文 献

- 浅川敬之・澤田崇博・出口一郎 (2002): ラグランジュ方程式による打ち上げ波帯流体運動の2次近似解, 海岸工学論文集, 第49巻, pp. 126-131.
- 合田 桂・浅川敬之・出口一郎 (2000): ラグランジュ方程式による遡上波の解析, 海岸工学論文集, 第47巻, pp. 191-195.
- 間瀬 肇・土井宏行・岩垣雄一 (1987): 不規則波の遡上特性に及ぼす Wave grouping の影響に関する研究, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 114-118.
- Carier G. F. and H. P. Greenspan (1967): Water waves of finite amplitude on a sloping beach, Journal of Fluid Mech., 4, pp. 97-109.
- Savage, R. P. (1958): Wave run-up on roughened and permeable slope, Journal of the ASCE, Vol. 84, No. WW3, May.