

CIVA/Level set 法による越波・遡上の数値解析

桜庭 雅明*・弘 崎 聡**・檜 山 和 男***

本論文は、複雑な地形形状を有する場合の海岸波動現象を安定かつ高精度に計算可能な非構造格子を用いた CIVA/Level set 法に基づく数値波動水路を提案するものである。自由表面流れ解析における流れ場の計算には、Smagorinsky モデルに基づく LES の基礎方程式に対して SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を適用した。また、自由表面位置の計算には基礎方程式である移流方程式に対して高精度に解析が可能な CIP 法に基づく CIVA 法を用いた。数値解析例として、越波問題、遡上問題を取り上げ、実験結果および VOF 法に基づく解析結果との比較を行い、本手法の有効性を示した。

1. はじめに

海岸工学で対象とする自由表面流れ問題には、砕波、越波および遡上等の複雑な現象が含まれており、それらの現象を数値シミュレーションにより精度良く解析して評価することはこれまで困難とされてきた。しかしながら近年、飛躍的な計算機性能の向上と数値シミュレーション技術の進歩により、数値波動水路（数値波動水路の耐波設計への適用に関する研究会、2002）に代表されるような実用的な数値波動解析手法が数多く提案されており、数値シミュレーションは広く普及するようになってきている。数値波動解析に用いられる解析手法としては、自由表面の表現が簡便な VOF 法（Hirt・Nichols, 1981）に基づくものが一般的であるが、この方法は自由表面近傍の鋭敏性の確保や体積の保存性について工夫が必要とされている。また、計算格子はデカルト座標系に基づく構造格子を基本としており、複雑な地形や諸現象を考慮するためには計算メッシュを解析領域全体にわたって細かくする必要があり、計算効率の観点で課題が残されている。一方、自由表面付近の鋭敏性および気液の体積保存性の課題に対しては、Level set 法（Sussman ら、1994）が提案されており、その有効性が認められつつある。また、由比ら（1998）、陸田（2003）および桜庭・檜山（2003）の報告においても Level set 法の有効性が示されており、今後応用面で期待できるものと考えられる。

本論文は、任意地形上の自由表面を有する海岸波動問題に対して、自由表面近傍の鋭敏性と気液の体積保存性を確保して計算が可能となる Level set 法に基づく数値波動水路を提案し、海岸の越波・遡上現象に対する適用評価を行うものである。なお、計算格子には非構造格子を用いるものとして、流れ場の計算には三角形同次補間要素を用いた SUPG/PSPG (Streamline Upwind-Petrov Galerkin/Pressure Stabilizing-Petrov Galerkin) 法に基づく安定化有限要素法（Tezduyar, 1991）、自由表面位置

を決定するための移流方程式の解法には、CIP (Cubic Interpolation Pseudo-Particle) 法（Yabe・Aoki, 1991）を三角形要素へと拡張した CIVA (Cubic Interpolation Volume/Area Coordinate) 法（Tanaka, 1999）を組み合わせた CIVA/Level set 法を用いた。数値解析例として、海岸構造物に対する越波現象および一様勾配水路に対する遡上現象を取り上げ、VOF 法に基づく既往の計算手法および水理模型実験との比較を行った。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式と境界条件

本手法の流れ場の計算における基礎方程式として、非圧縮粘性流体における Navier-Stokes の運動方程式と連続式に対して、Smagorinsky モデルに基づく LES によりモデル化された式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{1}{\rho} p \mathbf{I} + 2(\nu + \nu_{SGS}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 Ω は解析領域、 $\mathbf{u}$ は流速、 p は圧力、 $\mathbf{f}$ は物体力、 ρ は密度、 ν は動粘性係数、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は速度ひずみテンソル GS 成分である。また、 ν_{SGS} は渦動粘性係数であり、以下のように表す。

$$\nu_{SGS} = (C_s \Delta)^2 \sqrt{2 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 C_s は Smagorinsky 定数である。また、 Δ は格子フィルター幅であり、三角形要素面積の 1/2 乗としている。また、Dirichlet 型、Neumann 型境界条件は以下のように入えられる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma_g \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h} \quad \text{on } \Gamma_h \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $\mathbf{g}$ 、 $\mathbf{h}$ はそれぞれ流速、トラクションの既知量の GS 成分を表し、 Γ_g 、 Γ_h はそれぞれ流速、トラクションが既知の境界、 $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトルを示す。

* 正 会 員 博(工) 日本工営(株) 大阪支店技術部
** 学生会員 中央大学大学院 理工学研究科土木工学専攻
*** 正 会 員 工 博 中央大学教授 理工学部土木工学科

また、本研究では気液界面の位置を表現する方法として、界面位置とその周辺距離の関係を表す関数 (Level set 関数) を用いている。Level set 関数は次式に示すような移流方程式で支配される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 ϕ は自由表面からの距離を表現する Level set 関数であり液体であれば正、気体であれば負、自由表面上であれば 0 となる。なお、Level set 関数は $|\nabla \phi| = 1$ となるような等距離関数としての性質を持つ。

(2) 安定化有限要素法による定式化

流れ場の計算における基礎方程式 (1)～(5) と境界条件の式 (6), (7) に対する空間方向の離散化には、流速・圧力三角形同次補間要素を用いた流線風上化法 (SUPG 法)/圧力安定化法 (PSPG 法) に基づく安定化有限要素法 (Tezduyar, 1991) を適用した。流速、圧力それぞれの重み関数を $\mathbf{w}$, q とすると、以下の弱形式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{w}) : \sigma d\Omega + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left(\tau_{supg} \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{w} + \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \nabla q \right) \\ & \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} - \nabla \cdot \sigma \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{cont} \cdot \mathbf{w} \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_h} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

左辺第 1～3 項と右辺項は式 (1), (2) に対する通常のガラーキン項、第 4 項は移流の卓越に対して安定化を施す SUPG (Streamline Upwind/Petrov Galerkin) 項及び圧力振動を回避するための安定化項である PSPG (Pressure Stabilizing/Petrov Galerkin) 項、第 5 項は自由表面の数値不安定性を回避する安定化項である衝撃捕捉 (Shock-Capturing) 項である。ここに、 τ_{supg} , τ_{pspg} , τ_{cont} は安定化パラメータ (Guler ら, 1999) であり、移流速度 $\mathbf{u}^*$ は 2 次精度 Adams-Bashforth 公式 $\mathbf{u}^* = 0.5(3\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})$ により、準線形化している。

時間方向の離散化では、時間微分 $\partial \mathbf{u} / \partial t$ を次のように表す。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 Δt は時刻レベル n と $n+1$ 間の微小時間増分量である。また、流速 $\mathbf{u}$ および圧力 p を次式のようにして取り扱うものとする。

$$\mathbf{u} = \theta \mathbf{u}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{u}^n, \quad p = p^{n+1} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 θ は時間積分の安定性と精度をコントロールす

るパラメータであり、ここでは、2 次精度を有するよう $\theta = 0.5$ を選択した。また、連続式は陰的に取り扱った。なお、有限要素方程式の解法には Element-by-Element 法に基づく GMRES 法を用いた。

(3) Level Set 法による気液界面の表現

Level set 法 (Sussman ら, 1994) は、界面位置と液相と気相の関係を Level set 関数として表すことにより界面上の不連続点を平滑に捉えることを可能とする方法である。Level set 関数は液体であれば正、気体であれば負、自由表面上であれば 0 としており、 $|\nabla \phi| = 1$ となるような等距離関数としての性質を持つ。また、任意の時間における Level set 関数値 ϕ から次式に示す Heaviside 関数を用いることにより界面近傍の平滑化を行う。

$$H_a = 0.5 \times \max(-1.0, \phi_a) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\phi_a = \min \left\{ 1.0, \frac{\phi}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sin \left(\frac{\pi \phi}{\alpha} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 H_a は Heaviside 関数、 α は界面から平滑化を行う幅であり、最小メッシュ幅の 1～5 倍程度の値を用いる。なお、Heaviside 関数を用いることにより、気液相の密度と粘性係数は次式のように表すことができる。

$$\rho = 0.5(\rho_{Li} + \rho_{Ga}) + (\rho_{Li} - \rho_{Ga}) H_a \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\mu = 0.5(\mu_{Li} + \mu_{Ga}) + (\mu_{Li} - \mu_{Ga}) H_a \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに、添字 *Li* は液相、*Gas* は気相を表す。

(4) 再初期化および体積補正の計算

Level set 法により自由表面を捕捉していくと、自由表面形状の変化に伴う液相と気相の変化により、Level set 関数としての性質 $|\nabla \phi| = 1$ の維持が保障されなくなり、計算精度の低下が懸念される。そこで、本研究では各時間ステップにおいて、界面の移動の計算を行った後に、Level set 関数としての性質を回復させるために次式に示す再初期化手法 (姫野ら, 1999) を導入した。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{w}_s \cdot \nabla \phi = 2 H_a \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\mathbf{w}_s = 2 H_a \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 t は無次元時間を表す。また、流体または気体の体積変化を補正して体積の保存性を高めるために体積補正の計算を行う。体積補正の計算は、以下に示す移流方程式の形により表現できる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{w}_h \cdot \nabla \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\mathbf{w}_h = \delta_a \left(\frac{V}{V_{init}} - 1 \right) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 V , V_{init} は各時刻における液体の体積及び初期体積、 δ_a は近似デルタ関数であり、 $dH_a/d\phi$ である。

(5) CIVA 法による移流方程式の計算

移流方程式で記述される式 (8), (16) および (18)

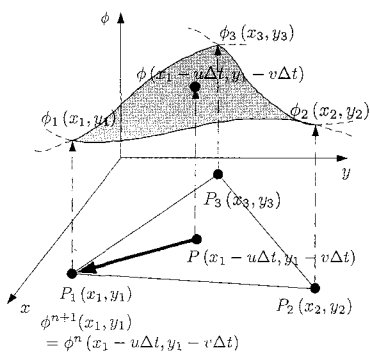


図-1 CIVA 法による風上点の評価方法

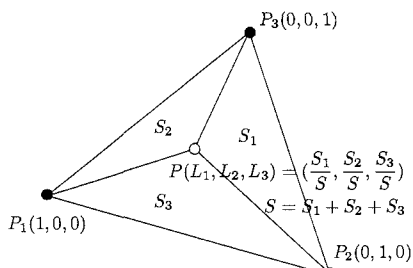


図-2 面積座標系

の計算法としては、解の精度が高いCIVA (Cubic Interpolation Volume/Area Coordinate) 法 (Tanaka, 1999) を用いた。CIVA 法はCIP (Cubic Interpolation Pseudoparticle) 法 (Yabe・Aoki, 1991) を三角形要素に対して適用が可能になるように、面積座標系を導入した方法である。具体的なCIVA 法による計算方法は、図-1に示すように、移流方程式の局所厳密解である式 (19) を用いて、各節点の時刻 t での Level set 関数値は、上流側の $x - u\Delta t$ 地点での値で近似し、上流側の要素における完全3次多項式で補間することにより決定される。

$$\phi^{n+1}(x, t) = \phi^n(x - u\Delta t, t - \Delta t) \quad (20)$$

なお、完全3次多項式は式 (21) のように表現できる。

$$\phi = \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i + d \sum_{j,k=1}^3 \beta_{jk} \left[L_j^2 L_k + \frac{1}{2} L_j L_k L_3 \right] \quad (21)$$

$$\alpha_i = \phi_i, \beta_{jk} = \phi_j - \phi_k + (x_k - x_j) \cdot \nabla \phi_j \quad (22)$$

ここに、 L_1, L_2, L_3 は図-2で定義される面積座標である。また、 d は1次補間と3次補間の調節パラメータで、 $d=0$ のとき1次、 $d=1$ のとき3次補間となる。CIVA 法では、要素内の補間に3次多項式を用いることによる数値振動が生じる場合がある。このため、本手法ではフィルタ操作を行うことにより、振動を除去することとした。フィルタ操作の手順として、まず次式のように Level set 関数 ϕ^n の各要素における節点の最小値及び最大値を求める。

$$\phi_{\min} = \min(\phi_1^n, \phi_2^n, \phi_3^n) \quad (23)$$

$$\phi_{\max} = \max(\phi_1^n, \phi_2^n, \phi_3^n) \quad (24)$$

そして式 (21) で計算された ϕ^{n+1} が ϕ , $\phi_{\min} \leq \phi^{n+1} \leq \phi_{\max}$ を満たせば $d=1$ として、満たさなければ局所的な値の変化をさけるために $d=0$ として1次多項式を用いるものとする。

3. 数値計算例

(1) 越波現象の解析

本手法の有効性を示すために、堤体上で越波する問題を取り上げた。図-3に示すように数値波動水路の中に天端高 R を有する堤体が1/20勾配の斜面の上部に設置されているものとする。沖側での静水深は0.6mとして、天端高と沖波波高・周期の条件を変化させた場合の計算を行った。天端高を変化させた計算ケースとして $R=9.4$ cm, 12.8 cm の条件に対して適用した。計算に用いた有限要素分割は、それぞれ水面近傍における最小メッシュ幅を約2 cm とし、図-4に示すような非構造格子を用いた。また、微小時間増分量は $\Delta t=0.005$ 秒とした。入射波浪の条件として、造波境界に有限振幅波であるストークス波の第5近似解に基づく流速と水位を与え、 $R=9.4$ cm の場合の波高を10, 12, 16 cm, $R=12.8$ cm の場合の波高を12, 16 cm と変化させ、周期は1.77秒の一定条件とした。Smagorinsky 定数は一様等方性乱流の仮定に基づく $C_s=0.23$ を採用した。密度と粘性係数は、液体として水(密度998.0 kg/m³, 粘性係数 1.01×10^{-3} Ns/m²)、気体として空気(密度1.205 kg/m³, 粘性係数 1.81×10^{-5} Ns/m²)を与えた。なお、流速境界条件はすべてスリップ条件としている。

図-5に $R=12.8$ cm, 波高16 cm, 周期1.77秒の場合

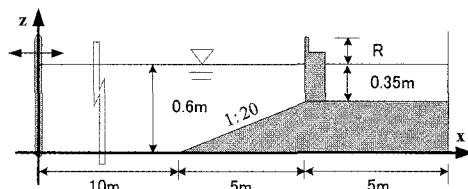
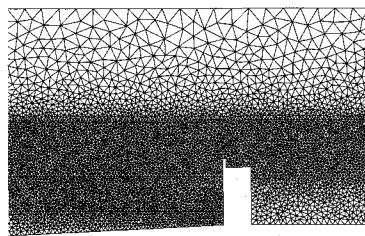


図-3 越波問題における数値波動水路

図-4 堤体周辺における有限要素分割図 ($R=12.8$ cm)

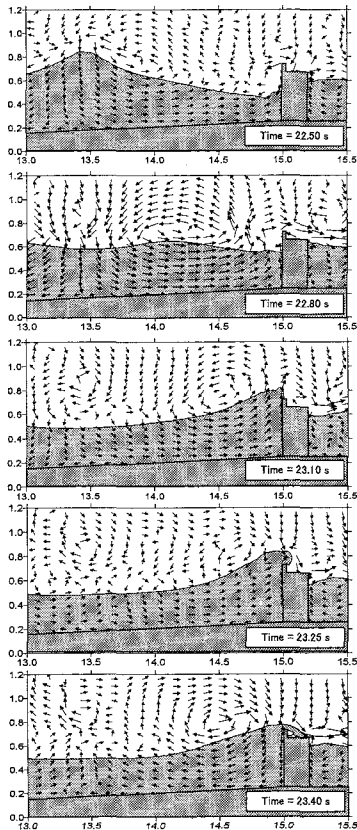


図-5 越波の状況 (波形および流速ベクトル)

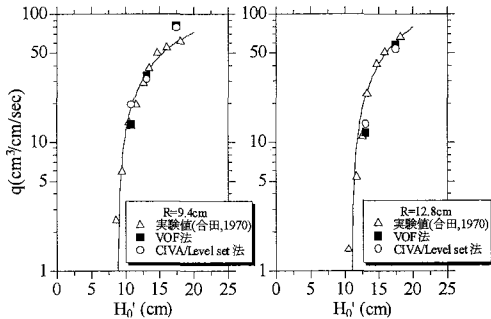


図-6 越波流量による実験値等との比較

の堤体周辺の水面変化状況及び流速ベクトルの分布を示す。この結果から、構造物を越波する状況が捉えられていることが確認できる。また、図-6に既往の実験(合田, 1970)およびVOF法に基づく数値波動水路CADMAS-SURF(数値波動水路の耐波設計への適用に関する研究会, 2002)との越波流量の比較を示す。ここに、 q は単位時間あたりの越波流量、 H_0' は換算沖波波高(入射波高を浅水係数で除した値)であり、越波流量は堤体前面位置での水平流速からの水塊の通過量として算定している。

なお、CADMAS-SURFでの計算で用いた格子分割は堤体近傍以外は $\Delta x=4$ cm、 $\Delta z=1$ cmであり、堤体付近では天端高を正確に考慮するため、不等間隔格子にしている。この結果の比較より、本手法は波高条件が大きい場合において一部越波流量を過大に評価する傾向が見られるものの、実験結果と良好な一致を示している。また、CADMAS-SURFの結果と比較して、波高条件が小さい場合においては、本手法の方がより実験値に近い結果となっていることが確認できる。

(2) 遡上現象の解析

遡上現象への適用性について検討するために、図-7示す一様勾配を有する海浜での遡上問題の解析を行った。計算ケースとして、斜面勾配が $i=1/2.5$, $1/5$ となるような斜面を仮定した。有限要素分割は図-8に示すような斜面近傍で最小メッシュ幅が約1 cmとなるような非構造格子とし、 $i=1/2.5$ では節点数60952、要素数120844、 $i=1/5$ では節点数59439、要素数117662である。また、微小時間増分量は $\Delta t=0.004$ 秒とした。入射波条件として、沖側境界にストークス波第5次近似解による流速と水位を与え、波高と周期がそれぞれ5 cmと1秒、6 cmと1.5秒、7 cmと2秒、8 cmと1秒、8 cmと1.5秒および10 cmと2秒の6ケースについて計算を行った。Smagorinsky定数は一様等方性乱流の仮定に基づく $C_s=0.23$ を採用した。また、密度と粘性係数は、越波問題同様、液体として水、気体として空気を与えた。なお、境界条件は斜面を除き、スリップ条件とし、斜面境界では壁面での遡上現象を正確に考慮するため、対数則分布に基づく流速を壁面に与えた。

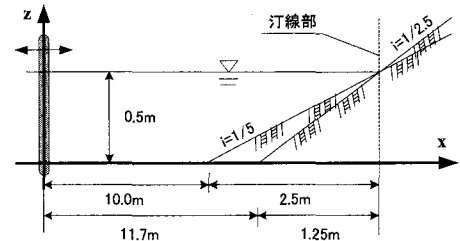
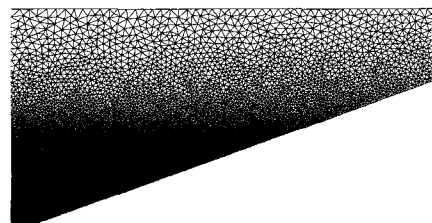


図-7 遡上問題における数値波動水路

図-8 遡上域での有限要素分割図 ($i=1/2.5$)

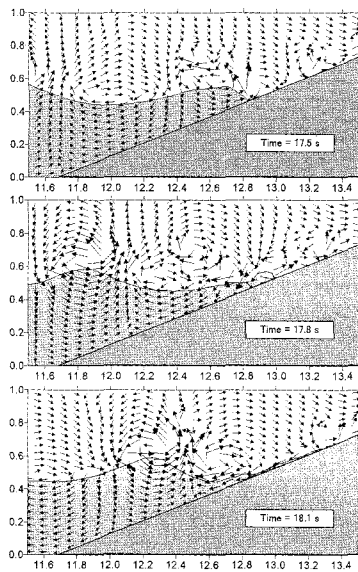


図-9 遡上の状況 (波形および流速ベクトル)

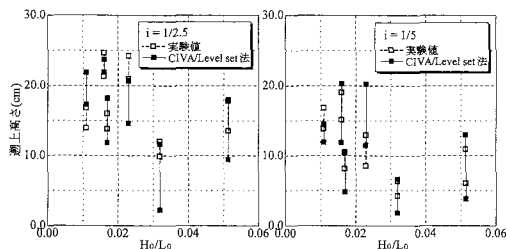


図-10 遡上高さによる実験値との比較

図-9に $i=1/2.5$ 、波高 8 cm、周期 1 秒のケースにおける遡上域での計算結果を示す。図より、遡上域における波浪変形の過程を捉えていることが確認できる。また、図-10に遡上高さによる実験値(数値波動水路の耐波設計への適用に関する研究会, 2002)との比較を示す。ここに、横軸の H_0/L_0 は波形勾配である。図より、本手法による解析結果は、波高が大きく、周期が長くなるに従い、遡上高さが大きくなる傾向を捉えており、実験結果と概ねよい一致を示していることがわかる。

4. おわりに

本論文では、任意地形上の海岸波動現象を高精度かつ安定に計算可能な CIVA/Level set 法に基づく数値解析手法の提案を行った。本手法の有効性を検討するため、数値解析例として、越波および遡上問題を取り上げ、本手法の有効性を実験結果や他の数値解析結果との比較を行った。その結果、以下の結論が得られた。

- 本手法を越波問題に適用した結果、複雑な自由表面形状を有する越波現象を捉えられるとともに、越波流量

については実験値とほぼ一致した。また、既往の手法である VOF 法に基づく数値波動水路と比較して、本手法は同等もしくはそれ以上の計算結果を与えることが示された。

- 本手法を遡上問題に適用した結果、遡上域での現象を捉えられるとともに、遡上高さは実験値とほぼ一致を示した。
- Level set 法に対して非構造格子にも適用可能である SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法と CIP 法に基づく CIVA 法を組み合わせた方法の提案により、任意の地形上における波の諸現象を精度よくかつ安定に解析を行うことが可能となった。

以上より、本手法は任意地形上の波動解析に対して有効な手法であるといえる。今後は、碎波、越波および遡上の複合現象を有するような問題に対して本手法を適用するとともに、本手法の三次元化を行い、三次元性が卓越するような現象に対しても適用して評価を行うことを予定している。

参考文献

- 合田良実 (1970): 防波護岸の越波流量に関する研究, 港湾技術研究所報告, 第 9 巻, 第 4 号。
- 桜庭雅明・榎山和男 (2003): Level set 法を用いた安定化有限要素法による自由表面流れの数値解析, 海岸工学論文集, 第 50 巻, pp. 16-20。
- 佐貫 宏・藤田 竜・関本恒浩・清水琢三 (2001): 数値モデルによる越波量の評価に関する研究, 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp. 736-740。
- 数値波動水路の耐波設計への適用に関する研究会 (2002): 海域施設の耐波設計に適用できる数値波動水路 (CADMAS-SURF) の研究・開発と将来展望, 土木学会論文集, No. 705, II-59, pp. 1-17。
- 姫野武洋・渡辺紀徳 (1999): 微小重力下で気液境界を有する流れの数値解析, 日本機械学会論文集 (B 編), No. 65/635, pp. 2333-2340。
- 陸田秀実 (2003): 二相流体における流力弾性連成解析, 海岸工学論文集, 第 50 巻, pp. 31-35。
- 由比正年・石田 啓・保智正和 (1998): 界面の大変形を伴う気液二相流体場の数値解析—衝突砕波および上昇気泡解析への適用—, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp. 61-65。
- Guler, I., M. Behr and T. E. Tezduyar (1999): Parallel Finite Element Computation of Free-Surface Flows, Comput. Mechanics, Vol. 23, pp. 117-123。
- Hirt, C. W. and B. D. Nichols (1981): Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries, J. Comp. Phys., Vol. 14, pp. 201-225。
- Sussman, M., P. Smereca and S. Osher (1994): A Level Set Approach for Computing Solutions for Incompressible Two-Phase Flow, J. of Comput. Physics, Vol. 144, pp. 146-159。
- Tanaka, N. (1999): The CIVA Method for Mesh-Free Approaches: Improvement of the CIP Method for n-Simplex, Comput. Fluid Dynamics J., Vol. 8, No. 1, pp. 121-127。
- Tezduyar, T. E. (1991): Stabilized finite element formulation for incompressible flow computations, Advanced in Appl. Mech., Vol. 28, pp. 1-44。
- Yabe, T. and T. Aoki (1991): A universal solver for hyperbolic equation by cubic-polynomial interpolation, Comput. Phys. Commun., Vol. 66, pp. 219-242。