

流体力評価精度の高い DEM の提案と 底質粒子初期移動過程への適用

牛 島 省*・竹村雅樹**・山田修三***・禰津家久****

本報では大粒径粒子が接触移動する流れ場に対して、連続相と分散相を区別せず、全体にコロケート格子配置に基づく高次精度の非圧縮性流体計算法を適用することにより、粒子周辺の流れと粒子に作用する流体力を精度良く求める解法を示す。粒子に対する接触力の評価には個別要素法モデルを利用する。底質粒子の初期移動過程へ解法を適用し、抗力係数を用いる既往のモデルでは流体力が過小評価される可能性があること、また本モデルにより、粒子の初期移動過程に関する詳細な力学特性が把握できることを示す。

1. はじめに

波による海底の砂礫の輸送は、複雑な非定常運動を伴う流体中における粒子の移動現象である。このため、従来の砂礫の移動限界に関する評価式には、いくつかの近似や仮定、経験則が用いられている。このような既往の評価式は実用的には十分役立つものであるが、砂礫に作用する流体力や海底近傍の流速分布等の扱いは、必ずしも現象を正確に表現していない場合がある。

このような漂砂現象に対する数値シミュレーションを行うために、二流体モデルや運動方程式に従う質点モデル粒子を投入する数値解法が近年多く試みられている。しかしながら、これらの数値モデルでは、Kolmogorov スケールより十分大きい大粒径粒子に対して、後流渦などの粒子周囲の流れを正確に再現できず、また抗力係数などの平衡過程で得られた経験則を利用するため、非定常流中における粒子周辺の流れや粒子に作用する流体力を正確に扱えないという欠点を有する。

このため、本研究では粒子スケールよりも小さい Euler 格子を配置し、連続相と分散相を区別せず、全体にコロケート格子に基づく高次精度の非圧縮性流体計算法を適用して、粒子周辺の流れと粒子に作用する流体力を直接的に評価する手法を示す。粒子に作用する接触力の評価には個別要素法のモデルを利用して、粒子の接触作用を取り扱えるものとしている。この解法を用いて、底質粒子の初期移動過程の計算を行い、その有効性を検討する。

2. 粒子-流体混合系の計算法

本報では、粒子と流体を区別せず、流れ場全体に非圧縮性流体の解法を適用する。多相流場に対しては、圧縮性および非圧縮性流体を統一的に扱う CUP 法 (Yabe・Wang, 1991) が提案されている。本報で扱う問題では、流体および粒子の比重は一定であり、体積の変化はない

ため、CUP 法を用いると、局所音速項に連続性に対する誤差が集積する可能性がある。このため、本報では非圧縮性流体に対する解法を粒子-流体混合系全体に適用する。基礎式は非圧縮条件から得られる次の連続式と運動方程式である。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 u_i と F_i はそれぞれ x_i 方向の流速成分と外力成分、 p は圧力、 ρ は密度、 μ は粘性係数である。連続相と分散相の密度の相違により、密度の空間的な変化が大きくなる場合があるため、ブシネスク近似は用いない。

基礎式を直交 Euler 格子上で離散化する。最初に、セル中心における流速の推定値 u_i^* を求める。推定値の計算における圧力の取り扱い、圧力勾配を適切に評価するため CBP スキーム (牛島ら, 2002) に基づくものとし、セル中心では圧力勾配を考慮しない。時間差分に Euler 陽解法を用いると、次式より u_i^* が得られる。

$$u_i^* = u_i^n + \left(-u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + F_i \right) \Delta t + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) \right] \Delta t \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、移流項の離散化には 5 次精度相当の QSI スキーム (牛島ら, 2002)、拡散項には中央差分を用いる。

次に、 u_i^* をセル境界へ空間内挿し、圧力項を考慮する。

$$\hat{u}_i = \hat{u}_i^* - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \Delta t \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $\hat{u}_i^*$ は u_i^* をセル境界へ空間内挿した値である。セル境界における $n+1$ ステップの流速成分 $\hat{u}_i^{n+1}$ は式 (1) を満足する必要がある。すなわち、

$$\frac{\partial \hat{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

また、 $\hat{u}_i^{n+1}$ に関して次式が成り立つとする。

$$\hat{u}_i^{n+1} = \hat{u}_i^* - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i^{n+1}}{\partial x_i} \Delta t \quad \dots\dots\dots (6)$$

* 正 会 員 工 博 京都大学助教授 社会基盤工学専攻
** 学生会員 京都大学 修士課程 環境地球工学専攻
*** 学生会員 京都大学 修士課程 社会基盤工学専攻
**** フェロー 工 博 京都大学教授 社会基盤工学専攻

ここで、 p_i^{n+1} は流体計算の段階で得られる圧力であり、 p_i^{n+1} は粒子運動の計算の後に求められる。式 (4) と式 (6) より、次式が得られる。

$$\hat{u}_i^{n+1} = \hat{u}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \Delta t \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $\phi = p_i^{n+1} - p^n$ である。式 (7) を式 (5) へ代入して次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} \dots\dots\dots (8)$$

初期のCUP法では、密度の空間的な変化が大きい場合でも、式 (8) 左辺の微分の外に $1/\rho$ を出す場合が見られる (Yabe・Wang, 1991)。しかし、数値的な安定性と精度を保持するため、本報では式 (8) における密度の空間微分を考慮した離散化を行っている。

上記の関係式を用いて、連続性を満足する流速成分と圧力場を求める。このために改良型のC-HSMAC法 (牛島ら, 2003) を用いる。本報の基礎式に対しては、次の関係式を用いて反復計算の k ステップの計算が行われる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \hat{u}_i^k}{\partial x_i} \equiv \frac{1}{\Delta t} D^k \dots\dots\dots (9)$$

$$p^{k+1} = p^k + \phi^k \dots\dots\dots (10)$$

$$\hat{u}_i^{k+1} = \hat{u}_i^k - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi^k}{\partial x_i} \Delta t \dots\dots\dots (11)$$

最初に式 (9) を離散化した連立1次方程式の解 ϕ^k をBi-CGSTAB法により求める。残差ベクトルの内積に対するしきい値は $\varepsilon_p^k = \alpha^k \varepsilon_p$ (ここに $\alpha < 1$) として反復計算の進行とともに収束条件を厳しくする (牛島ら, 2003)。得られた ϕ^k を用いて、式 (10) により p^k 、また式 (11) により $\hat{u}_i^k$ を更新する。次に、 $k+1$ を k として、式 (9) で定義される D^k がしきい値 D_0 を満足すれば計算を終了し、そうでなければ反復計算を継続する。計算終了後には、 $p^{k+1} = p_i^{n+1}$ 、 $\hat{u}_i^{k+1} = \hat{u}_i^{n+1}$ となり、すべての計算セルで連続性の誤差が D_0 より小さくなる。

セル中心における流速成分 u_i^{n+1} は p_i^{n+1} を用いたPGスキーム (牛島ら, 2002) に基づき、次式から求める。

$$u_i^{n+1} = u_i^* - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i^{n+1}}{\partial x_i} \Delta t \dots\dots\dots (12)$$

なお、 $n+1$ ステップの流速成分 u_i^{n+1} と圧力 p_i^{n+1} は、粒子運動の計算により得られる結果を、セル内で加重平均して定められる。

3. 粒子運動の計算

本報では2次元場を対象とするので、粒子形状は単位長さを有する円柱に相当する。重心点の運動方程式は次式となる。

$$m \frac{dv_i}{dt} = f_i + g_i + h_i \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 m および v_i はそれぞれ粒子の質量と x_i 方向の速度成分であり、右辺の f_i 、 g_i 、 h_i はそれぞれ流体力、浮力および接触力を表す。また、角運動量の方程式は次式で与えられる。

$$I \frac{d\omega}{dt} = m_f + m_c \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 I は粒子の慣性モーメント、 ω は角速度であり、右辺の m_f および m_c はそれぞれ流体から受けるモーメントと接触力により生ずるモーメントを表す。

粒子に作用する流体力 f_i としては、質点モデルとは異なり、流体の運動方程式から導かれる力の成分を用いる。粒子 P_k が、その一部を含むセル C から受ける流体力 f_{Ci} は、式 (2) に基づき、次式から求められる。

$$f_{Ci} = \alpha_k \Delta V \sigma_k \left[-u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) \right] \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 ΔV はセルの体積 (2次元の場合は面積)、 σ_k は粒子 P_k の密度である。粒子 P_k の一部を含む全てのセルに対して f_{Ci} を求め、その和を f_i とする。また、 m_f を求める場合も同様の演算を行う。

接触力 h_i は、個別要素法モデル (Cundall, 1979) と同様に評価する。得られた流体力と接触力、そしてモーメントを用いて、式 (13) および式 (14) により、粒子の速度成分と角速度が計算される。

4. 一様流中に固定された粒子に作用する流体力

提案された数値計算手法を水中の底部に静止する単一粒子の初期移動過程に適用する。適切な数値解を得るためには、一様流中に固定された粒子に作用する抗力が適切に評価されることが必要である。この点に関する基礎的な検証を行うため、単一粒子 (円柱) に作用する抗力とレイノルズ数の関係を求めた結果を図-1に示す (牛島ら, 2003)。図中には、円柱に対する C_d の実験結果 (Tritton, 1959) と次式の近似曲線 (White, 1991) を合わせて示した。

$$C_d \approx 1 + 10.0 Rep^{-2/3} \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 Rep は円柱の直径と一様流速に基づくレイノルズ数である。図-1に示されるように、一様流中に固定された粒子に作用する流体力が本手法により適切に計算されている。

5. 粒子初期移動過程への適用

底部に静止する単一の砂礫が離脱するときの形態として、滑動形式、転動形式、リフトアップ形式などが考えられている。本報では後流渦を伴う大粒径の砂礫を対象

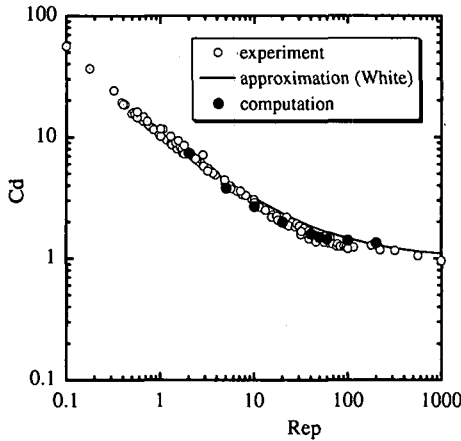


図-1 一様流中の粒子に対する Rep と C_d の関係

とするが、このような砂礫は離脱の際に転動形式を取ることが多いとされている (Garde・Ranga, 1977). 水平に配置した粒子面上に存在する単一の粒子には、図-2に示すような力が作用すると考える。静的な釣合い条件に基づけば、P点回りのモーメントを考えることにより、粒子が転動を開始する限界は次式の D が負から正の値となる瞬間とされる。

$$D = F_D \cos \beta - (F_G - F_L) \sin \beta \dots \dots \dots (17)$$

ここに、 F_D 、 F_L および F_G は、それぞれ粒子が流体から受ける抗力と揚力、そして水中の重力である。

粒子に作用する力のうち、 F_G は粒子の比重から定められるが、流体力 (F_D および F_L) は、容易には求められない。このため、砂礫の移動限界に関する多くの既往研究では、流速分布として粗面対数則分布を仮定し、流体力を評価するために一様流中で得られた抗力係数を用いるなどの方法が取られてきた。しかしながら、1) 大粒径粒子から構成される粒子面上の流速分布は局所的には対数則分布と大きく異なる場合がある、2) 底面上に存在する粒子の周辺には上下に非対称な流れが形成されるため、一様流中で得られた抗力係数の使用は適切でない、

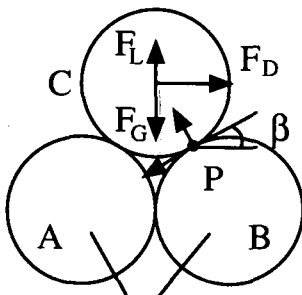


図-2 単一粒子に作用する力

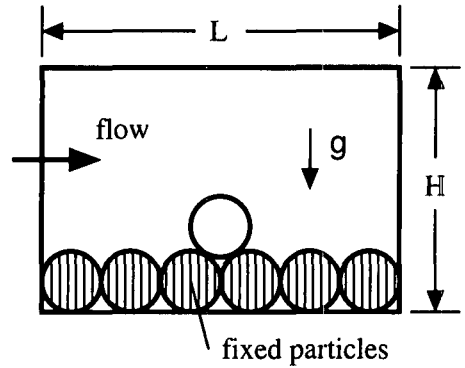


図-3 計算対象

3) 波浪場における流れのように、非定常流中では平衡状態とは異なる流体力が作用する、などの点を考慮すれば、既往研究で用いられた仮定は現象を必ずしも正確に表現していないと考えられる。

一方、本報で提案した数値モデルでは、抗力係数や対数則分布などの仮定を一切必要としないため、粒子の初期移動過程をより正確に再現できる可能性がある。このため、図-3に示す条件で生ずる粒子の離脱過程へ計算手法を適用し、粒子が転動を開始する際の力学特性について考察を加える。

計算領域は図-3に示す2次元領域であり、粒子は単位幅の円柱に相当する。領域の大きさは $H=50$ mm, $L=60$ mm であり、計算セル数は $48 \times 40=1,920$ である。粒子は直径 d を 10 mm、比重を 2.5 とした。周囲水の動粘性係数は $1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ である。重力加速度 g は 9.8 m/s^2 で、底面は水平床とした。底部の6個の粒子は計算中は固定されており、上部の1つの粒子のみが流体力によって移動する。

計算では、まず静水中で上部の粒子を所定の位置から自由落下させ、粒子がほぼ静止した状態を初期条件とした。この初期状態から、図-3に示す領域の左右の境界に、圧力差 $\Delta P/\rho g d=1.02$ を与え、徐々に流速が増加する非定常流を形成させた。流速は左右の境界で周期境界条件とし、 $\Delta t=2.0 \times 10^{-4}(\text{s})$ として、2,000 ステップまで計算を行った。計算時間は、Pentium III 1 GHz の CPU を持つ PC で 7 分程度である。

粒子が転動するときの流速ベクトルと渦度の分布を図-4に示す。図中の時間 t は $\sqrt{d/g}$ 、流速は $\sqrt{gd}$ で正規化されている。図-4に示されるように、粒子の上部と下流側に渦度の高い低圧領域が形成され、これが時間とともに発達することにより、粒子に作用する流体力が増加する。

図-5は、粒子に作用する流体力 F_D 、 F_L および F_G の時間的な変化を式 (17) で与えられる D とともに示した

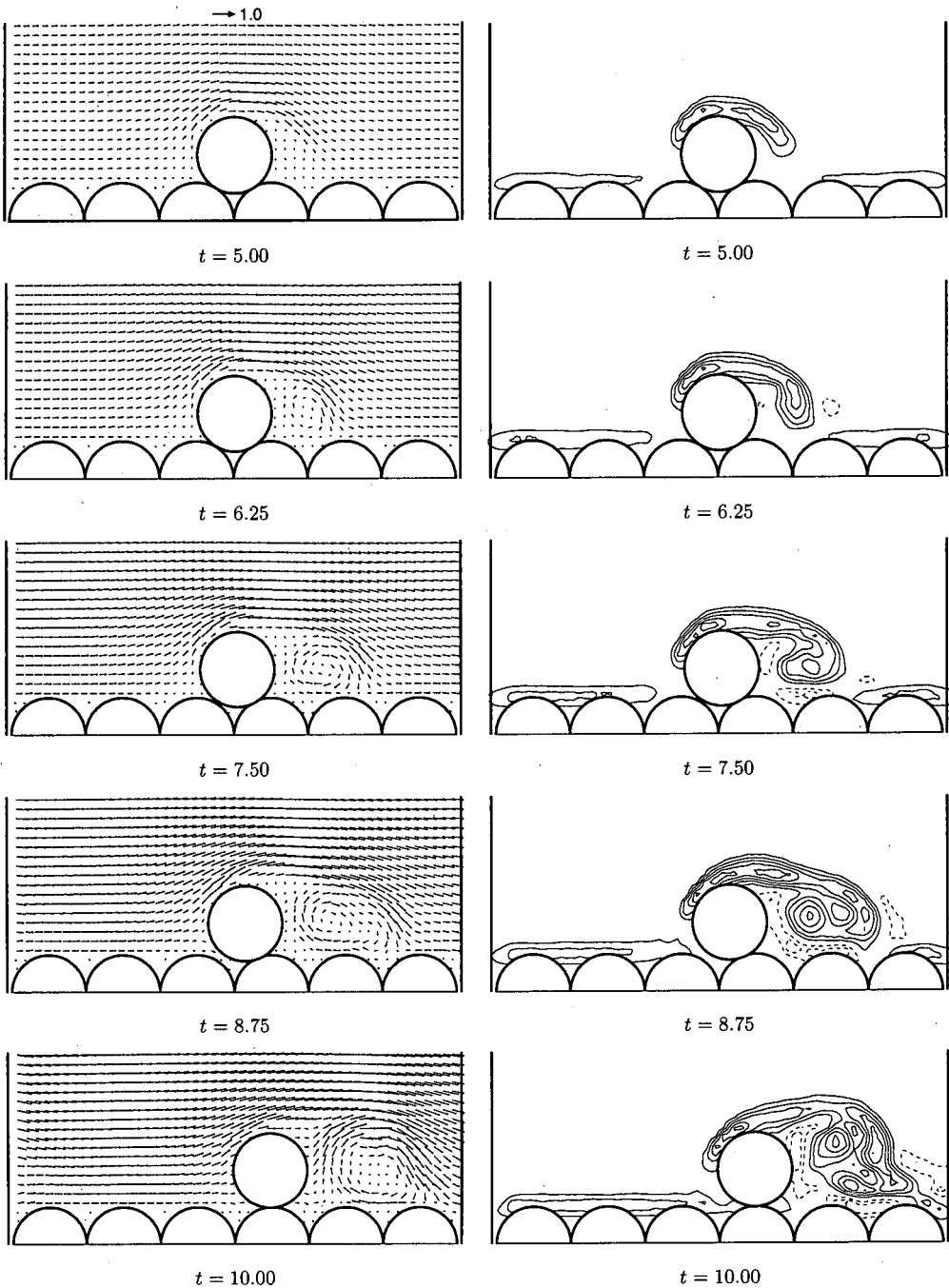
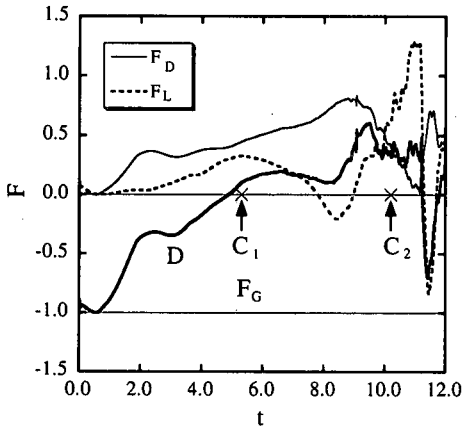
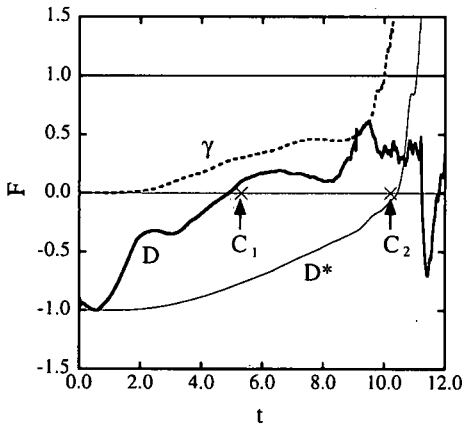


図4 粒子が転動するときの流速ベクトルと温度の分布（計算結果、実線と破線の温度分布は符号が異なることを示す）

結果である。これらの流体力は、有次元の $|F_d|$ により正規化されている。また、図-5中の D は計算により得られたもので、 F_b と F_L が増加するとともに D も増加し、曲線が負から正へ最初に $F=0$ の直線と交差する点が転動開始条件となる。図-5中の C_1 と C_2 は、それぞれ粒子が転動を開始した時点と、完全に水中に放出された時点と

を表す。これより、転動に関する静的釣合い条件である D の条件と C_1 はほぼ一致することが示されている。

次に、式 (16) に基づき、抗力係数 C_d をレイノルズ数の関数とした場合に得られる転動開始条件 D^* を図-6に示す。また、同図中の γ は、この C_d から算出された抗力 F_b^* と本報の計算により得られた抗力 F_b の比に相当

図-5 粒子離脱前後の流体力と D 図-6 粒子離脱前後の D , D^* および γ

する ($\gamma = F_D^*/F_D$)。図-6 に示されるように、転動開始前では $\gamma < 1$ であるため、計算により得られた抗力 F_D と比較して、一様流中で得られた抗力係数から算出される抗力 F_D^* は実際より過小に評価されている可能性がある。流砂実験においても、河床に置かれた粒子に対する抗力係数が、一様流中のものより増加することが指摘されており (Carty, 1957; Garde・Sethuraman, 1969), 上記の計算結果は既往の実験結果と同様の傾向にある。

抗力 F_D^* を用いて転動開始条件を求めると、図-6 に示される D^* が得られるが、粒子は D^* による転動条件よりかなり早い時刻にすでに転動を始めており、 D^* では粒子の初期移動は適切に判定できないことが示唆される。

6. おわりに

大粒径粒子が接触移動する流れ場に対する数値解析法を示し、これを単一粒子の初期移動過程に適用した。この計算手法では、粒子周辺の流れが再現されるため、粒子に作用する流体力を精度良く評価することができる。本モデルを発展させることにより、凝砂現象に関するより詳細な力学特性の解明が行えると考えられる。

参考文献

- 牛島 省・奥山洋平・竹村雅樹・瀧津家久 (2003): 3次元一般座標系における圧力場の並列計算法の提案, 水工学論文集, 47, pp. 385-390.
- 牛島 省・竹村雅樹・山田修三・瀧津家久 (2003): 非圧縮性流体解析に基づく粒子-流体混合系の計算法 (MICS) の提案, 土木学会論文集 (投稿中).
- 牛島 省・竹村雅樹・瀧津家久 (2002): コロケート格子配置を用いた MAC 系解法の計算スキームに関する考察, 土木学会論文集, 719/II-61, pp. 11-19.
- 牛島 省・瀧津家久・山上路生・坂根由季子 (2001): 局所5次スプライン内挿法 (QSI 法) を利用したコロケート格子による流体解析手法, 土木学会論文集, 691/II-57, pp. 73-83.
- Carty, J. J. (1957): Resistance coefficients for spheres on plane boundary, B. S. Thesis, MIT.
- Cundall, P. A. and O. D. L. Strack (1979): A discrete numerical model for granular assemblies, Geotechnique, 29(1), pp. 47-65.
- Garde, R. J. and K. G. R. Raju (1977): Mechanics of sediment transportation and alluvial stream problems, John Wiley & Sons.
- Garde, R. J. and S. Sethuraman (1969): Variation of the drag coefficient of a sphere rolling along a boundary, La Houille Blanche (7).
- Tritton, D. J. (1959): Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers, J. Fluid Mech, 6, pp. 547-567.
- White, F. M. (1991): Viscous fluid flow, McGraw-Hill.
- Yabe, T. and P. Y. Wang (1991): Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid, J. Physical Soc. Japan, 60(7), pp. 2105-2108.