

密度差の大きい流動場への改良 σ 座標系モデルの適用

入江政安*・中辻啓二**・西田修三***

沿岸域の流動の再現に使われる σ 座標系流動モデルは、その座標変換に起因する誤差を生じることがよく知られている。本研究では、水平圧力勾配と水平拡散勾配の補正手法を POM に組み込んだ。塩水が汽水域の急斜面上を侵入する現象や風応力による密度成層場の応答のモデル計算を行い、これらの手法の適用による誤差低減効果を評価した。水平圧力勾配の補正は、流速の過大評価や拡散量の数値的な鉛直方向の拡散を抑制する。また、水平拡散勾配の補正は等密度面の振動を抑制する働きをもつ。密度差の大きい流動場におけるこれらの補正は効果のある手法であることが確認された。

1. はじめに

沿岸海域を対象とした 3 次元流動シミュレーションが行われるようになって久しい。 σ 座標系モデルは海底地形の平滑な取り扱いが可能であることや POM (Princeton Ocean Model) などの汎用性の高いフリーソースコードがあることにより、近年、沿岸海域での適用例が増えている。同時に、 σ 座標系は水平圧力勾配項や水平拡散勾配項において誤差が発生しやすいことはよく知られ、これまで多くの指摘と改良が行われてきた。

この σ 座標系モデルの座標変換に起因する数値誤差には注意を払う必要があると言われながら、誤差を小さくすることを試みずに σ 座標系が適用されることが少なくない。流動モデル・生態系モデルによる汽水域での再現シミュレーションにおいては底層付近の流速の精度向上が不可欠であり、この数値誤差を縮小させることは重要である。

本研究では、拡散量の再現に着目し、Slørdal (1997) が水平圧力勾配の補正方法として提案した手法を応用して、水平圧力勾配と拡散方程式中の水平拡散勾配の二項の数値誤差を可能な限り縮小させる手法を提案する。また、水平圧力勾配補正の際に生じる等密度面の振動を極力抑えるために、必要な領域に限って水平圧力勾配補正を加える手法を新たに構築し、計算の安定性ならびに精度向上に資するかを評価する。

2. 本研究における補正手法

(1) 数値誤差の補正手法

σ 座標系流動モデルで発生する誤差の原因は水深の急変、つまり、グリッドの歪みである。 σ 座標系流動モデルはそもそも大気循環のモデリングや気象予測のために長年使われてきた (Phillips, 1957)。地形の急変による数値誤差も早期から指摘されている (Sundqvist, 1975)。地形急変部における誤差発生要因のひとつは、座標変換

の際の水平圧力勾配項の近似によるものである。水平圧力勾配は次のように表される。

$$\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P}{\partial x} = g \frac{\partial \eta}{\partial x^*} + \frac{gD}{\rho_a} \left\{ \int_{\sigma} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial x^*} - \frac{\sigma^2}{D} \frac{\partial D}{\partial x^*} \frac{\partial \rho'}{\partial \sigma} \right) d\sigma \right\} \dots \dots (1)$$

ここに、第一項：バロトロピック圧力項、第二項：バロクリニック圧力項、 ρ_a ：基準密度、 ρ' ：基準密度からの偏差、 η ：水位、 D ：水深である。この近似式を見れば分かるように、 σ 座標系上の底層付近のグリッドは現実地形の斜面に沿うので、とくに密度差が大きい場合に、 σ 座標系上の水平方向差分がデカルト座標系のそれと比べて大きくなる。また、座標変換時に急勾配上のグリッドが、「hydrostatic inconsistency」(Janjic, 1977; Haney, 1991) と呼ばれる、歪んだ状態になると、密度や拡散量の算定に大きな誤差を生じる。

拡散方程式中の水平拡散項についても同様である。上で述べた hydrostatic consistency condition に関する誤差の他、拡散量が鉛直方向に大きな差をもつ場合には水平拡散項に誤差が生じやすくなる。このように、密度差の大きい沿岸域においては、急な地形勾配が大きな数値誤差を生むことから、数値誤差を縮小する何らかの近似が必要である。

これらの誤差を補正するには大きく分けて 2 通りの方法がある。ひとつは歪みの少ない座標系を採用することである。Spall・Robinson (1990) をはじめ、計算対象となる物理現象に応じて、2 つの座標系を組み合わせる方法が数多く試みられている。国内では、東京湾の青潮現象の再現にあたり、窪地地形に対応したモデルを構築した佐々木 (1996, 1997)、上層下層とも σ 座標系を採用した灘岡ら (1999, 2000)、上層を σ 座標系、下層をデカルト座標系にして、河床地形の急変と潮汐の影響を考慮した北山ら (2003) の研究がある。さらに、鉛直方向に層厚を適宜変更することによって急勾配地形上のグリッドの歪みを少なくする一般鉛直座標系を採用した例として、Burchard・Petersen (1997) や Pietrzak ら (2003) の研究などがあげられる。

* 学生会員 修(工) 大阪大学大学院工学研究科土木工学専攻
** 正 会 員 工 博 大阪大学大学院教授工学研究科土木工学専攻
*** 正 会 員 工 博 大阪大学大学院助教授工学研究科土木工学専攻

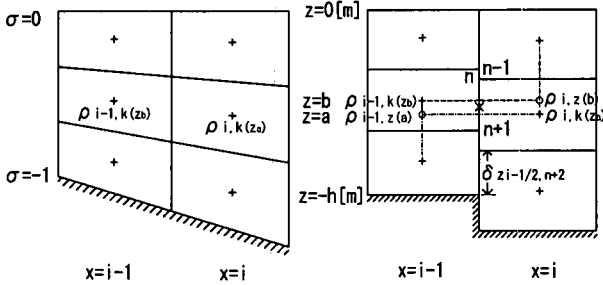


図-1 Slørðal 法による水平圧力勾配の再定義の概念図

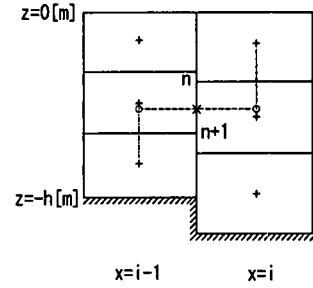


図-2 水平圧力勾配のコード上の差分方法

今ひとつの方法は、水平圧力勾配や水平拡散勾配の計算を改良する方法である。代表的な例である Stelling・Van Kester (1994) は水平圧力勾配と水平拡散勾配の補正に着目し、特に拡散方程式中の水平方向の拡散フラックスの補正 (SVK 法) について検討を行った。この手法は水平拡散勾配の計算時に、各グリッドの拡散量をデカルト座標系上に再定義し、デカルト座標系上でフラックスを算定する手法である。Slørðal (1997) は SVK 法を水平圧力勾配の算定に用いた場合、アルゴリズム上、水平圧力勾配が小さく見積もられることを指摘し、手法の改良を行った。Bijvelds ら (1999) はこの指摘を受け、異なった改良手法を水平圧力勾配の補正に用いている。二瓶ら (2002) は流れの駆動力のない安定した密度成層場で、Slørðal による方法の誤差低減効果を評価し、また、より精度の良い鉛直方向の補間方法として 3 次スプライン補間を用いた手法を提案している。

(2) 本研究での誤差補正法

本研究での補正方法は、Slørðal (1997) による水平圧力勾配の補正 (Slørðal 法) をもとに、これを利用し、発展させた。Slørðal 法におけるグリッドの再定義と水平圧力勾配の算定方法の概念図を図-1 に示す。密度の定義位置はデカルト座標系上に再定義した後も同じである。 σ 座標系上および再定義後のデカルト座標系上の水平方向のグリッド線が $x=i-1, i$ で交わるようにグリッドも再定義される。層数が k 層の場合、 $i-1$ と i のグリッド間の鉛直方向のグリッド線は最大 $2k-1$ の線分で分割される。したがって、求めるバロクリニック圧力勾配は

$$\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P_{bcl}}{\partial x} = \frac{g}{\rho_a} \sum_{n=1}^{n-1} \left[(\delta z)_{i-1/2,n} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{i-1/2,n} \right] + \frac{g}{\rho_a} \left[(z_{i-1/2,n} - z) \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{i-1/2,n} \right] \dots (2)$$

で表せる。ここに、 P_{bcl} : バロクリニック圧力、 n : 両側のセルによって $i-1/2$ の線を上から順番に区切ったものの、 $(\delta z)_{i-1/2,n}$: n 番目の切片の長さである。この式の意味は、水表面から各切片の圧力勾配を順次第 $n-1$ 切片ま

で加え、第 n 切片では定義位置までの圧力勾配を加えていることになる。まず、図-2 の第 n 切片における水平圧力勾配は、右側 i のセルの密度 $\rho_{i,k(z_a)}$ の定義位置 (+ 印) の水深 $z=a$ において、

$$\frac{\delta_a \rho}{\delta x} = \frac{\rho_{i,k(z_a)} - \bar{\rho}^2(x_{i-1}, z_a)}{x_i - x_{i-1}} \dots (3)$$

左側 $i-1$ のセルの密度 $\rho_{i-1,k(z_b)}$ の定義位置の水深 $z=b$ において、

$$\frac{\delta_b \rho}{\delta x} = \frac{\bar{\rho}^2(x_i, z_b) - \rho_{i-1,k(z_b)}}{x_i - x_{i-1}} \dots (4)$$

の 2 つが算出される。ここに、 $\bar{\rho}^2(x_{i-1}, z_a)$ 、 $\bar{\rho}^2(x_i, z_b)$ は上下に隣接するグリッドの密度から線形補間して算出した値である。SVK 法では第 n 切片の水平圧力勾配を、式 (3)、(4) で求められる勾配の符号によって場合分けして計算する。その計算方法では水平圧力勾配が小さく見積もられることになるので、Slørðal 法では第 n 切片の水平圧力勾配の定義位置を切片の中心 (図-1 の × 印) とし、水平圧力勾配は $\delta_a \rho / \delta x$ と $\delta_b \rho / \delta x$ を線形補間して求めている。

SVK 法および Slørðal 法の大きな利点は、単に水平圧力勾配を精度良く計算する点だけでなく、水平圧力勾配をデカルト座標系に変換して計算することで、 σ 座標系特有の「hydrostatic consistency condition」を満たす必要がなくなるという点である。また、Slørðal 法の利点は、上で述べた SVK 法における水平圧力勾配の過小評価を避けることができるとともに、図-2 のように計算される値は、結果的に切片の中心 (× 印) の水深における $i-1, i$ の密度の鉛直方向線形補間値の差分に等しくなるという点である。したがって、計算時間も SVK 法に比べて短縮されることになり、通常、水平圧力勾配の算定法に比べて大幅に長くなることはない。

本研究では、Slørðal 法を水平圧力勾配の補正に用いるとともに、拡散方程式中の水平拡散勾配の算定にもその手法を利用することで、さらなる精度向上を試みた。水平拡散勾配の補正手法は同じ Slørðal 法であるが、水平圧力勾配と異なり、式 (2) のように偏差を水表面か

表一 検討ケース (○:補正あり ×:補正なし)

計算ケース	水平圧力勾配補正	
Case-1	×	×
Case-2	○	×
Case-3	×	○
Case-4	○	○
Case-5	密度差による	○

ら積算する必要はない。

(3) 数値誤差の評価のための検討ケース

本研究では、Princeton Ocean Model (POM) に上記の補正を組み込んで表一に示す5ケースで計算を行った。Case-1はPOMをそのまま用いて計算した場合である。Case-2およびCase-3はそれぞれ水平圧力勾配の補正、水平拡散勾配の補正を行った場合、Case-4はその両方を行った場合である。Case-5はのちに詳述するが、密度差によって水平圧力勾配の補正を加えるかどうかの判断を行う場合である。本研究では、汽水域の急勾配地形上を底層へ向かって塩水が流入する現象、密度成層化した急勾配地形をもつ沿岸域において風応力によって流れが生じられる現象の2例について計算を行い、各補正方法の誤差低減効果を検討する。

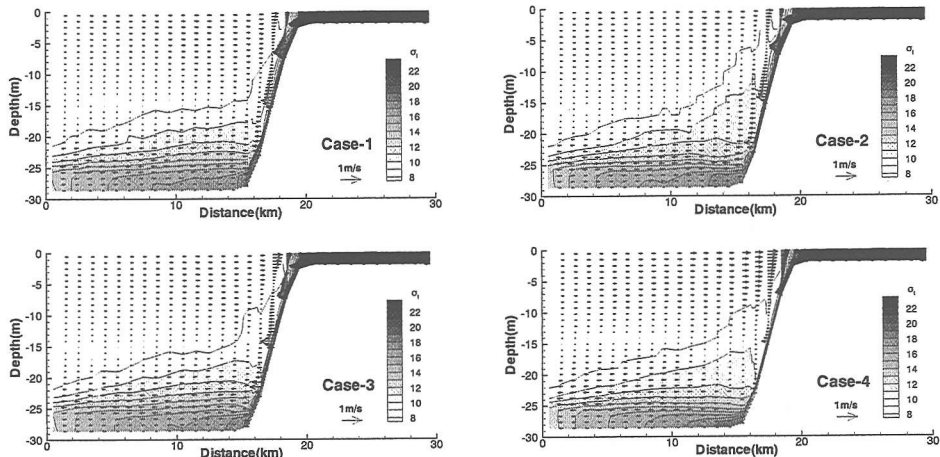
3. 誤差低減効果の検討

(1) 汽水湖に塩水が侵入する現象の再現

汽水域の底層に外海から塩水が侵入する現象の計算を行った。東西30 km、南北20 km、水深30 m、水温25°C、塩分15 psuの汽水域に東側境界から水温19°C、塩分34 psuの塩水が単位幅あたり0.5 m³/s流入する。格子の大きさは1 kmで、鉛直方向には30層に分割した。東側の外海との接続部は水深2 mで、地形は水平方向に4 km移動する間に水深30 mに達する。西側境界は開境界とした。計算時間は48時間である。

図一3に48時間後の σ_t の東西方向の断面分布を示す。水平圧力勾配を補正した場合(Case-2)は、補正をしない場合(Case-1)に比べて、塩水が鉛直方向にあまり拡散せず到底層に侵入していることが分かる。水平圧力勾配の誤差が大きい場合、結果的に水平方向の流速にその誤差が及ぶ。密度差が大きいのは塩水が侵入している水深であるので、とくに塩水の侵入する速度に大きな影響を与える。斜面中央(水深15.5 m)上の流速の東西成分の鉛直分布を図一4に示す。底層密度流の最大流速値は、Case-1の流速が-54 cm/s、Case-2は-51 cm/s、Case-3は-64 cm/s、Case-4は-33 cm/sであった。この再現計算では、一見、Case-1はCase-2と大きな差がないように見える。しかし、より正確に水平圧力勾配の補正の効果を見るために、水平方向の拡散をゼロにして、同様の計算を行うと、Case-2の流速が-56 cm/sであるのに対し、Case-1の流速は-73 cm/sと、大きくなる。これらの数値はPOMのコード自体の精度や不安定性を考えれば一概に評価できるものではないが、この流速の過大評価が鉛直方向シアを大きくし、鉛直方向への過大な拡散を招いているものと推察できる。

水平拡散勾配の補正のみを行った場合(Case-3)は、補正しない場合に比べて、侵入する層厚に大きな変化は見られない。しかし、Case-3はCase-1と比べて、底層における各等密度面先端が東側に位置し、塩水の侵入到達距離が小さくなっている。水平圧力勾配と水平拡散勾配の2つの補正を行った場合(Case-4)には、明らかに侵入する層厚が薄くなっていることが分かる。西側境界より12.5 km地点における σ_t の鉛直分布を図一3に示す。 σ_t が12を示す水深はCase-1で22.39 m、Case-2で23.43 m、Case-3で22.36 m、Case-4で23.56 mとなり、両補正を加えた場合、補正を加えない場合に比べて、約1.2 m深くなることが分かる。



図一3 汽水域への塩水侵入の計算結果

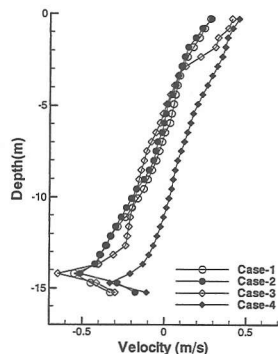


図-4 斜面中央部の水平方向
流速の鉛直分布

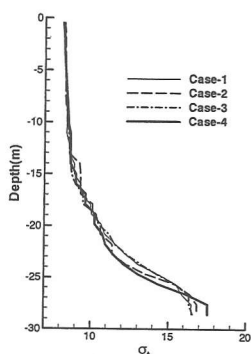


図-5 西岸より 13.5
km における
 σ_t の鉛直分布

一方、上層の等密度線に着目すると、Case-2の方がCase-1に比べて、振動が大きくなっていることが分かる。この振動は急斜面上から発生し、西側へ伝播していく。現時点では、憶測の域を出ないが、再定義後の水平圧力勾配を元の σ 座標系基礎方程式に代入する際に保存性が損なわれている可能性がある。また、Case-3はCase-1に比べて、さらに、Case-4はCase-3に比べて、等密度面が滑らかになっている。数値計算上の等密度面の振動は水平拡散勾配の補正と組み合わせることによってある程度削減できていることが分かる。

(2) 成層密度場への風応力の影響の再現

密度成層場において、風によって等密度面が傾く現象のモデル計算を行った。対象となる水域は両側が急斜面に挟まれた水域で、東西 30 km、南北 20 km、水深 25 m である。西岸には水深 1 m の浅瀬がある。東岸は水深 6 m になっており、風によって下層水がここに遡上することを想定している。初期成層状態は実際にある汽水湖の水温・密度分布を採用し、水表面において、水温 28°C、塩分 0.8 psu、底面において、水温 8.8°C、塩分 13 psu とした。格子の大きさは 1 km 四方で、鉛直方向に 30 層に分割する。風速は、最初の 6 時間で東風 10 m/s まで漸増させ、計 2 日間連吹させた。

風を連吹させると、吹送流が生じ、密度界面が傾き、底層の高密度水が東側急斜面上を遡上する。水平圧力勾配が数値的に過大に評価されているとすると、この遡上がより速く進み、また、底層水がより上層まで到達あるいは拡散するはずである。図-6 に 24 時間後の水温の断面分布を、Case-1、Case-2、Case-4 の順に示す。Case-1はCase-2、Case-4に比べて、東側急斜面中央部(西岸より 23.5 km、水深 10 m 付近)の水温が下がっていることが分かる。東側急斜面中央部における水温が 15°C になる水深は、Case-1 で 8.8 m、Case-2 で 10.0 m、Case-4 で

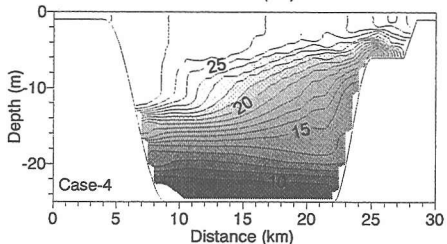
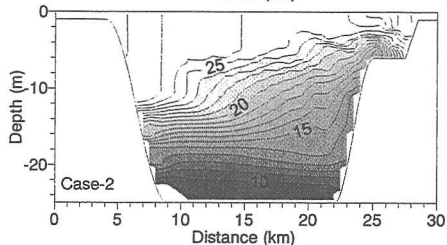
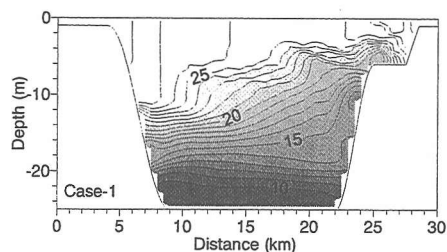


図-6 1 日後の水温分布

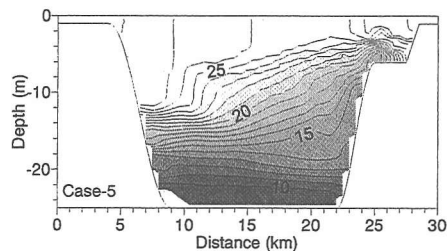


図-7 密度差を閾値とした局所補正による計算結果
(水温分布)

9.2 m となり、Case-1 ではより浅いところまで底層の高密度水が遡上または拡散していることが分かる。また、Case-4 は Case-2 に比べて等密度面が滑らかになっており、この計算結果からも水平拡散勾配の補正の重要性が伺われる。

(3) 水平圧力勾配の局所補正法の提案

水平圧力勾配の補正を用いた場合、等密度面に振動が起きることがある。基本コード自体が有する振動(Slørudal, 1997; Mellor et al, 1997) にも起因するのかもしれないが、他の原因として、水平圧力勾配算定時のグリッドの再定義化にもあると考えられる。そこで、水平圧力勾配の補正を施す領域を限定することで、振動を軽減する試みを行った。本研究では σ 座標系上の、つまり、再定義

する前の水平方向の密度差を閾値にして、補正を加えるか加えないかの判断を行うこととした(Case-5)。ここでは、 σ 座標系上の水平方向密度差が0.5以下の場合には、補正を加えず、0.5より大きくなる場合には、水平圧力勾配の補正を加えることにした。3.(2)で行ったモデル計算と同じ条件の計算結果を図-7に示す。図-6のCase-4に比べて東側急斜面付近の水温分布はほぼ同じでありながら、全体の等密度面はより滑らかになっていることが分かる。したがって、水平圧力勾配の補正は適当な閾値さえ把握できれば、局所的に適用することにより計算がより安定するものと考えられる。

4. ま と め

本研究では既存の水平圧力勾配の補正方法を使い、また、それを拡張した方法を構築し、密度差の大きい流動場のモデル計算を行った。Slørdal法による水平圧力勾配の補正は、汽水域全体の流速の過大評価や鉛直方向への数値計算上の拡散を抑制するのに有効な方法であると言える。Slørdal法を水平拡散勾配の補正に拡張した場合、水平拡散勾配の補正のみでもPOMでの等密度面の振動を抑えるのに貢献する。2つの補正を同時に行うと、水平圧力勾配の補正の際に新たに発生すると推察される等密度面の振動の抑制にも貢献している。以上のことから、両補正手法を用いた数値計算は物理現象をより良く再現するものと考えられる。

また、水平圧力勾配の補正を密度差の大きい領域で限定的に用いることは、流動場の計算の安定性に貢献する。その条件をどのように設定するかについては今後、議論の余地がある。しかし、複雑な地形を有する実水域の計算においては、より計算の安定性が求められるため、限定的に水平圧力勾配の補正を用いることが有効であると考えられる。

本研究では、密度差が大きい現象を対象にした。したがって、水平圧力勾配や水平拡散勾配の補正の効果は比較的明瞭に現れた。しかし、多くの沿岸海域ではこれほどの大きな密度差を持たない。例えば、3(1)の計算において、汽水域の塩分の初期値を変えて計算を行い、感度解析を行った結果、少なくともおよそ25 psuより高くなると、つまり、侵入する海水との塩分の差が9 psuより小さくなると、補正の効果は明らかではなくなる。本研究で用いた補正方法は精度向上に資するものではあるが、沿岸域の流動計算におけるその効果は、流動モデルそのものの精度の評価を含めて、より詳細に検討する必要があると言える。

参 考 文 献

- 北山和典・中西 太・荒川英誠・中辻啓二・白波瀬卓哉・劉 炳義 (2003): 3次元塩水通上モデルの開発と紀の川汽水域環境への評価, 水工学論文集, 第47巻, pp. 1009-1014.
- 佐々木淳(1996): 東京湾における背潮の発生機構に関する研究, 東京大学学位論文, 122 p.
- 佐々木淳 (1997): 東京湾湾奥水塊の湧昇現象と背潮への影響, 海岸工学論文集, 第44巻, pp. 1101-1105.
- 灘岡和夫・吉野忠和・二瓶泰雄 (1999): 高度化した沿岸流動数値計算法を用いた原油流出シミュレーション, 海岸工学論文集, 第46巻, pp. 461-465.
- 灘岡和夫・吉野忠和・二瓶泰雄 (2000): 沿岸海水流動数値計算法の高度化のためのDual- σ 座標系の提案, 土木学会論文集, No. 656/II-52, pp. 138-192.
- 二瓶泰雄・山崎裕介・西村 司・灘岡和夫 (2002): 浅水流場を対象とした三次元数値モデルの近似手法に関する検討— σ 座標系と静水圧近似に着目して—, 海岸工学論文集, 第49巻, pp. 411-415.
- Bijvelds, M. D. J. P., J. A. Th. M. Van Kester and G. S. Stelling (1999): A comparison of two 3 D shallow-water models using sigma-coordinates and z-coordinates in the vertical direction, Estuarine and Coastal Modeling, Proc. of the 6 th Int. Conf., ASCE, pp. 130-147.
- Burchard, H. and O. Petersen (1997): Hybridization between sigma- and z-co-ordinates for improving the internal pressure gradient calculation in marine models with steep bottom slopes, Int. J. Numer. Methods in Fluids, Vol. 25, pp. 1003-1023.
- Haney, R. L. (1991): On the pressure gradient force over steep topography in sigma coordinate models, J. Phys. Oceanogr., Vol. 21, pp. 610-619.
- Janjic (1977): Pressure gradient force and advection scheme used for forecasting with steep and small scale topography, Contrib. Atmos. Phys., Vol. 50, pp. 186-199.
- Mellor, G. L., L. -Y. Oey and T. Ezer (1998): Sigma Coordinate Pressure Gradient Errors and the seamant problem, J. Atmos. and Oceanic Tech., Vol. 15, pp. 1122-1131.
- Phillips, N. A. (1957): A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting, J. Meteorol., Vol. 14, pp. 184-185.
- Pietrzak, J., J. B. Jakobson, H. Burchard, H. J. Vested and O. Petersen (2002): A three-dimensional hydrostatic model for coastal and ocean modeling using a generalized topography following co-ordinate system, Ocean Modelling, Vol. 4, pp. 173-205.
- Slørdal, L. H. (1997): The pressure gradient force in sigma-coordinate ocean models, Int. J. Numer. Methods in Fluids, Vol. 24, pp. 987-1017.
- Spall, M. A. and A. R. Robinson (1990): Regional primitive equation studies of the gulf stream meander and ring formation region, J. Phys. Oceanogr. Vol. 20, pp. 985-1016.
- Stelling, G. S. and J. H. Th. M. Van Kester (1994): On the approximation of horizontal gradients in sigma coordinates for bathymetry with steep bottom slopes, Int. J. Numer. Methods of Fluids, Vol. 18, pp. 915-935.
- Sundqvist, H. (1975): On truncation errors in sigma-system models, Atmosphere, Vol. 13, pp. 81-95.