

ステップ状海底地形で発生する長周期自由波について

大 橋 正 臣*・濱 中 建 一 郎**

ステップ状海底地形を通過する際、波の非線形性により高次の自由波が発生する。入射波として周波数のわずかに異なる 2 成分を考えれば、周波数の差の成分から長周期自由波が発生する。しかしながら、ステップ前後の解を減衰定在波を含めた級数解で与えると、選点上では解は厳密に連続になるが、選点間では Gibbs の現象により解は不連続となる。このことから本研究では、ステップを内部に含む部分領域を考え、そこでは境界要素法を、その前後ではこれまでと同様級数解を仮定し連続させる方法を提案する。解析精度を上げるために、水面での 1 次波の微係数はスプライン関数法で、セグメント上の特異関数の積分は Legendre-Gauss 法で求めた。

1. はじめに

波の非線形性により発生する高次の自由波に関しては、これまでいくつかの研究が報告されている。合田・岡崎 (1998) は 1 成分の波がステップ上を通過する場合を対象に、拘束波のステップ上での不連続性を補償するように高次の自由波が発生することを示した。このことは 1 次波として周波数のわずかに異なる 2 成分の波を考えれば、差の成分として長周期自由波が発生するであろうことを示唆する。しかしながら、合田・岡崎 (1998) ではステップ上での解の接続に多くの近似がなされており、このままでは正確な議論が出来ない。大橋等 (2000) は拘束波および高次の自由波についても減衰定在波を考慮しつつ、解の接続には何らの近似を設けず直接選点法を適用する解析法を示した。しかしながらこの方法でも、選点上では 1 次波は厳密に連続になるものの、選点間では Gibbs の現象により 1 次波自身が不連続となり、やはり正確な議論は出来ない。一方、関本ら (2000) は radiation stress を強制項に持つ長周期波の波動方程式を用いて、種々の要因による長周期自由波の発生理論を示した。この場合 radiation stress としては微小振幅進行波の解によるものが使われ、ステップ上のような 1 次波自身が進行波だけでは表現できない波動場には適用できない。

このことから本研究では、ステップ上を通過する波を対象に、発生する長周期自由波の解析方法として、ステップを内部に含む部分領域を境界要素法で解き前後の解と接続させる方法を提案する。このことにより、Gibbs の現象による 1 次波の不連続性の発生を避け高次の自由波や長周期自由波の正確な解析が可能となり入射波の種々の条件による長周期自由波の特性に関する議論が可能となる。又、この方法では任意のステップ形状が扱えることから鉛直ステップと同時に斜面ステップの解析も行い斜面勾配の影響も考察する。

長周期自由波を精度良く求めるには、水面での 1 次波

の微係数を精度良く求めることと、境界要素法で用いられるセグメント上の特異関数の積分精度を上げる必要がある。種々の方法を検討した結果、ここでは、1 次波の微係数を求めるにはスプライン関数法を、特異関数の積分には Legendre-Gauss 法を用いた。

始めに解析の妥当性を検証するために、1 成分の入射波に対する実験を行った。比較する解析解は 1 次波と倍周波数の拘束波と自由波である。その結果、実験値と解析解は良く一致し、妥当性が確かめられた。

次に 2 成分の入射波に対して、発生する長周期自由波の振幅を解析解により調べた。2 成分の 1 次入射波の振幅は一定量とし、それぞれの成分の周期と 2 領域の水深を変化させた。

2. 2 成分入射波に対する解析

ポテンシャル流れを仮定する。基礎方程式と境界条件を摂動展開し、1 次のオーダ及び 2 次のオーダでまとめる。1 次のオーダでは 2 つの入射波成分はそれぞれ独立に解かれる。図-1 は解析領域の分割図で、領域 I では入射波、反射波、減衰定在波を考慮し、

$$\phi_1^{(1)} = i \frac{a_1}{2} \frac{g}{\omega_1} \left\{ (e^{-ik_1 x} + C_{R1} e^{ik_1 x}) \frac{\cosh k_1(z+h)}{\cosh k_1 h} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{1n} e^{k_{1n} x} \frac{\cos k_{1n}(z+h)}{\cos k_{1n} h} \right\} + \text{c.c.} \quad \dots\dots\dots (1)$$

のように表し、領域 II では、通過波、減衰定在波を考慮し

$$\phi_1^{(1)} = i \frac{a_1}{2} \frac{g}{\omega_1} \left\{ C_{T1} e^{-ik_1 x} \frac{\cosh k_1(z+h)}{\cosh k_1 h} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{1n} e^{-k_{1n} x} \frac{\cos k_{1n}(z+h)}{\cos k_{1n} h} \right\} + \text{c.c.} \quad \dots\dots\dots (2)$$

のように表す。領域 III では境界要素法を適用し、上記の解と接続する。なお、(1)、(2) は周波数 ω_1 に対する解で、 ω_2 に対する解は下付き添え字を 2 とすれば良い。

2 次のオーダでは、1 次波を以下の (3) で与えると、

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &= \phi_1^{(1)} + \phi_2^{(1)} \\ &= \phi_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} + \phi_2^{(1)} e^{i\omega_2 t} + \bar{\phi}_1^{(1)} e^{-i\omega_1 t} + \bar{\phi}_2^{(1)} e^{-i\omega_2 t} \quad \dots\dots (3) \end{aligned}$$

* 正会員 工博 パブリックコンサルタンツ株式会社
** 正会員 工博 北海道東海大学教授 海洋環境学科

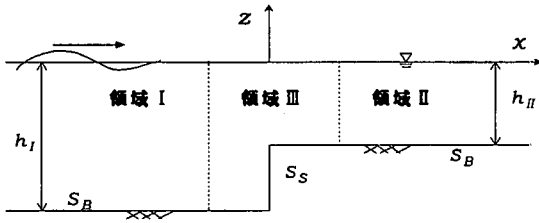


図-1 領域分割図

水面の境界条件の強制項から、

$$e^{2i\omega_1 t}, e^{2i\omega_2 t}, e^{i(\omega_1+\omega_2)t}, e^{i(\omega_1-\omega_2)t}$$

なる周波数成分と定常項が現れる。これらの周波数成分は、それぞれ独立に解析できるから以下では、長周期自由波に関する周波数の差の成分について述べる。

入・反射側 (領域 I, $h=h_1$) の拘束波

$$\begin{aligned} \phi_B^{(2)} = & A_1 e^{-i(k_1-k_2)x} \frac{\cosh(k_1-k_2)(z+h)}{\cosh(k_1-k_2)h} \\ & + A_2 e^{-i(k_1+k_2)x} \frac{\cosh(k_1+k_2)(z+h)}{\cosh(k_1+k_2)h} \\ & + A_3 e^{i(k_1+k_2)x} \frac{\cosh(k_1+k_2)(z+h)}{\cosh(k_1+k_2)h} \\ & + A_4 e^{i(k_1-k_2)x} \frac{\cosh(k_1-k_2)(z+h)}{\cosh(k_1-k_2)h} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_{5n} e^{(k_{2n}-ik_1)x} \frac{\cosh(k_1+ik_{2n})(z+h)}{\cosh(k_1+ik_{2n})h} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_{6n} e^{(k_{2n}+ik_1)x} \frac{\cosh(-k_1+ik_{2n})(z+h)}{\cosh(-k_1+ik_{2n})h} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_{7n} e^{(k_{1n}+ik_2)x} \frac{\cosh(k_2+ik_{1n})(z+h)}{\cosh(k_2+ik_{1n})h} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_{8n} e^{(k_{1n}+ik_2)x} \frac{\cosh(k_2+ik_{1n})(z+h)}{\cosh(k_2+ik_{1n})h} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{9nm} e^{(k_{1m}+k_{2n})x} \frac{\cos(k_{1m}+k_{2n})(z+h)}{\cos(k_{1m}+k_{2n})h} \end{aligned} \quad (4)$$

$$A_1 = \frac{a_1 a_2 g^2}{4 \omega_1 \omega_2} \frac{i \omega_1 k_2^2 - i \omega_2 k_1^2 + C - 2 i k_1 k_2 (\omega_1 - \omega_2)}{g(k_1 - k_2) \tanh(k_1 - k_2)h - (\omega_1 - \omega_2)^2}$$

$$A_2 = \frac{a_1 a_2 g^2}{4 \omega_1 \omega_2} \frac{i \omega_1 k_2^2 - i \omega_2 k_1^2 + C + 2 i k_1 k_2 (\omega_1 - \omega_2)}{g(k_1 + k_2) \tanh(k_1 + k_2)h - (\omega_1 - \omega_2)^2} \bar{C}_{R2}$$

$$A_3 = \frac{a_1 a_2 g^2}{4 \omega_1 \omega_2} \frac{i \omega_1 k_2^2 - i \omega_2 k_1^2 + C + 2 i k_1 k_2 (\omega_1 - \omega_2)}{g(k_1 + k_2) \tanh(k_1 + k_2)h - (\omega_1 - \omega_2)^2} C_{R1}$$

$$A_4 = \frac{a_1 a_2 g^2}{4 \omega_1 \omega_2} \frac{i \omega_1 k_2^2 + i \omega_2 k_1^2 + C - 4 i k_1 k_2 (\omega_1 - \omega_2)}{g(k_1 - k_2) \tanh(k_1 - k_2)h - (\omega_1 - \omega_2)^2} C_{R1} \bar{C}_{R2}$$

$$A_{5n} = \frac{a_1 a_2 g^2}{4 \omega_1 \omega_2} \frac{-i \omega_1 k_{2n}^2 - i \omega_2 k_1^2 + C - 2 k_1 k_{2n} (\omega_1 - \omega_2)}{g(k_1 + i k_{2n}) \tanh(k_1 + i k_{2n})h - (\omega_1 - \omega_2)^2} \bar{S}_{2n}$$

$$A_{6n} = \frac{a_1 a_2 g^2}{4 \omega_1 \omega_2} \frac{-i \omega_1 k_{2n}^2 - i \omega_2 k_1^2 + C + 2 k_1 k_{2n} (\omega_1 - \omega_2)}{g(-k_1 + i k_{2n}) \tanh(-k_1 + i k_{2n})h - (\omega_1 - \omega_2)^2} \cdot C_{R1} \bar{S}_{2n}$$

$$A_{7n} = \frac{a_1 a_2 g^2}{4 \omega_1 \omega_2} \frac{i \omega_1 k_2^2 + i \omega_2 k_{1n}^2 + C + 2 k_1 k_{1n} (\omega_1 - \omega_2)}{g(-k_2 + i k_{1n}) \tanh(-k_2 + i k_{1n})h - (\omega_1 - \omega_2)^2} S_{1n}$$

$$A_{8n} = \frac{a_1 a_2 g^2}{4 \omega_1 \omega_2} \frac{i \omega_1 k_2^2 + i \omega_2 k_{1n}^2 + C - 2 k_1 k_{1n} (\omega_1 - \omega_2)}{g(k_2 + i k_{1n}) \tanh(k_2 + i k_{1n})h - (\omega_1 - \omega_2)^2} \bar{C}_{R2} S_{1n}$$

$$A_{9nm} = \frac{a_1 a_2 g^2}{4 \omega_1 \omega_2} \frac{-i \omega_1 k_{2n}^2 + i \omega_2 k_{1n}^2 + C - 2 i k_{1n} k_{2n} (\omega_1 - \omega_2)}{-g(k_{1n} + k_{2n}) \tan(k_{1n} + k_{2n})h - (\omega_1 - \omega_2)^2} S_{1n} \bar{S}_{2n}$$

透過側 (領域 II, $h=h_{11}$) の拘束波

$$\begin{aligned} \phi_B^{(2)} = & B_1 e^{-i(k_1-k_2)x} \frac{\cosh(k_1-k_2)(z+h)}{\cosh(k_1-k_2)h} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} e^{-(k_{2n}+ik_1)x} \frac{\cosh(-k_1+ik_{2n})(z+h)}{\cosh(-k_1+ik_{2n})h} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} B_{3n} e^{-(k_{1n}-ik_2)x} \frac{\cosh(k_2+ik_{1n})(z+h)}{\cosh(k_2+ik_{1n})h} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{4nm} e^{-(k_{1m}+k_{2n})x} \frac{\cos(k_{1m}+k_{2n})(z+h)}{\cos(k_{1m}+k_{2n})h} \end{aligned} \quad (5)$$

$$B_1 = \frac{a_1 a_2 g^2}{4 \omega_1 \omega_2} \frac{i \omega_1 k_2^2 - i \omega_2 k_1^2 + C - 4 i k_1 k_2 (\omega_1 - \omega_2)}{g(k_1 - k_2) \tanh(k_1 - k_2)h - (\omega_1 - \omega_2)^2} C_{T1} \bar{C}_{T2}$$

$$B_{2n} = \frac{a_1 a_2 g^2}{4 \omega_1 \omega_2} \frac{-i \omega_1 k_{2n}^2 - i \omega_2 k_1^2 + C + 2 k_1 k_{2n} (\omega_1 - \omega_2)}{g(-k_1 + i k_{2n}) \tanh(-k_1 + i k_{2n})h - (\omega_1 - \omega_2)^2} \cdot C_{T1} \bar{Q}_{2n}$$

$$B_{3n} = \frac{a_1 a_2 g^2}{4 \omega_1 \omega_2} \frac{i \omega_1 k_2^2 + i \omega_2 k_{1n}^2 + C - 2 k_1 k_{1n} (\omega_1 - \omega_2)}{g(k_2 + i k_{1n}) \tanh(k_2 + i k_{1n})h - (\omega_1 - \omega_2)^2} \bar{C}_{T2} Q_{1n}$$

$$B_{4nm} = \frac{a_1 a_2 g^2}{4 \omega_1 \omega_2} \frac{-i \omega_1 k_{2n}^2 + i \omega_2 k_{1n}^2 + C - 2 i k_{1n} k_{2n} (\omega_1 - \omega_2)}{-g(k_{1n} + k_{2n}) \tan(k_{1n} + k_{2n})h - (\omega_1 - \omega_2)^2} Q_{1n} \bar{Q}_{2n}$$

ここで、

$$C = \frac{i \omega_1 \omega_2}{g^2} (\omega_1^3 - \omega_2^3 - 2 \omega_1 \omega_2 (\omega_1 - \omega_2))$$

入・反射側 (領域 I, $h=h_1$) の自由波

$$\begin{aligned} \phi_F^{(2)} = & i \left\{ E_0 e^{i k_F x} \frac{\cosh k_F (z+h)}{\cosh k_F h} \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{i k_{Fn} x} \frac{\cos k_{Fn} (z+h)}{\cos k_{Fn} h} \right\} + \text{c.c.} \quad (6) \end{aligned}$$

透過側 (領域 II, $h=h_{11}$) の自由波

$$\begin{aligned} \phi_F^{(2)} = & i \left\{ F_0 e^{-i k_F x} \frac{\cosh k_F (z+h)}{\cosh k_F h} \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-i k_{Fn} x} \frac{\cos k_{Fn} (z+h)}{\cos k_{Fn} h} \right\} + \text{c.c.} \quad (7) \end{aligned}$$

このときの波数 k_F , k_{Fn} は, 各々の水深, 周波数において, 分散関係式により得られる.

$$(\omega_1 - \omega_2)^2 = g k_F \tanh k_F h = -g k_{Fn} \tan k_{Fn} h$$

2 次のオーダでの解析は, 領域 I では (4) と (6) を, 領域 II では (5) と (7) を仮定し, 領域 III に対し境界要素法を適用する.

そのとき拘束波の振幅は, 1 次波によって決定されているから, 自由波の振幅が未知数となって解かれる. また, ここで注意しておきたい事は, (4) から分るように時間的には長周期成分であるにもかかわらず, 空間的には高波数成分 ($k_1 + k_2$) が含まれる事である. これは ω_1 の入射波と ω_2 の反射波との干渉によるものである (又はその逆).

3. 境界要素法の精度

境界要素法では, Green の公式, Green 関数 (特異関数) と速度ポテンシャルの支配方程式 (ラプラス方程式) から, 積分方程式を導出し, これを離散化し直接未知ポテ

ンシャルを数値的に求める. そのとき, 本研究のように高次の有限振幅波まで考えると, 水面の境界条件式の強制項が線形解とその微係数の積で構成されているため, 線形解の精度が 2 次の解に大きく影響すると考えられる. よって, 線形解, 2 次の解共に境界要素法での数値積分は Legendre-Gauss の公式を使用し精度を向上させた (大橋ら, 2001). また, 2 次の水面境界条件式の強制項には, 線形解の微係数 (流速成分) が含まれるが, 流速成分はスプライン関数法を使用し算出した. なお, 流速成分を算出するには, スプライン関数法が Doublet 型 Green 関数を使用した境界要素法より計算精度が良い事を確かめてある.

4. 実験方法

解析方法を検証するために, 幅 0.25 m, 深さ 0.50 m, 長さ 20.0 m の断面 2 次元水槽を使用し, 水槽中央部にステップを設け, 水理実験を行った. 水深は領域 I, II で, 0.30 m, 0.11 m とした. このような規模の水槽では,

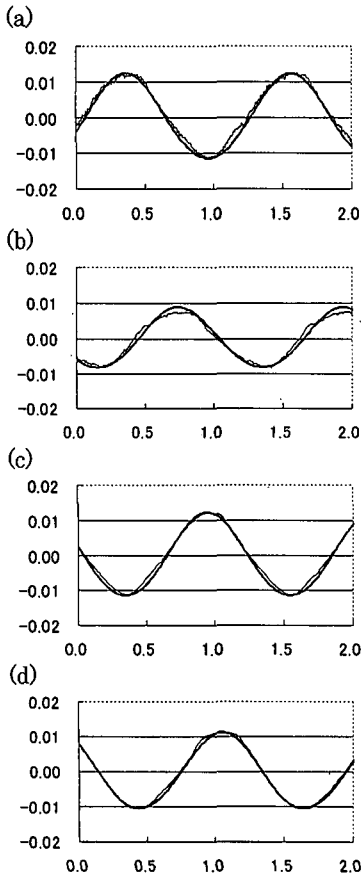


図-2 入射領域の水面変位
(a) -3.62 m, (b) -3.09 m
(c) -2.77 m, (d) -2.56 m

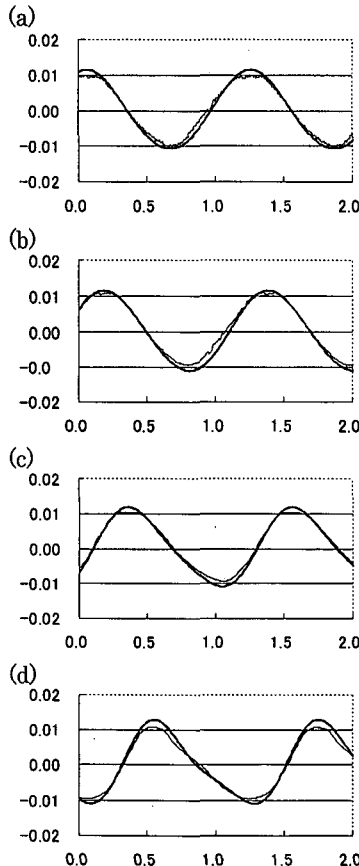


図-3 ステップ近傍の水面変位
(a) -0.20 m, (b) 0.00 m
(c) 0.20 m, (d) 0.40 m

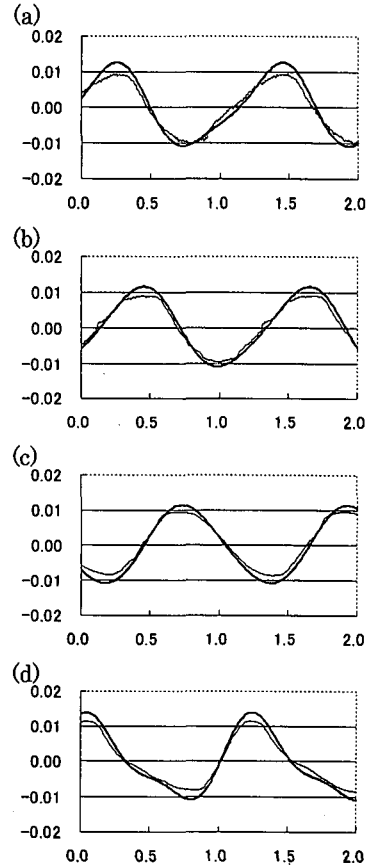


図-4 通過領域の水面変位
(a) 2.56 m, (b) 2.77 m
(c) 3.09 m, (d) 3.62 m

長周期自由波が発生する実験（2成分入射）を行った場合、自由波波長が長い場合、自由波が造波装置で再反射し、観測が非常に困難になると考えられる。従って、この実験では入射波は1成分とした。この場合、倍周波数成分の拘束波と自由波が発生するがそのメカニズムは長周期自由波の場合と同じであるから、解析方法の妥当性の検証にはなると考える。

図-2, 図-3, 図-4 は入射周期 1.2 秒, 入射振幅 1 cm の場合の水面変位を示す。横軸は時間 (s) であり、太線は解析解、細線は実験値を表す。実験値に対し、時間軸の原点を定めることは困難であるから、時間方向に平行移動し、解析解との誤差が最小となるよう位相を定めた。図の脚注の (a)-(d) は測定点の x 座標を表す。これらの結果から実験値と計算値はほぼ一致しており、解析方法の妥当性が確かめられる。

5. 長周期自由波の解析結果

入射波を2成分とし、それぞれの成分の周波数（又は周期）と、領域 I, II の水深を種々変えて発生する長周期自由波の振幅の特性を調べた。以下、図-5 から図-8 までの1次入射波の振幅は、2成分とも 1.0 cm とした。又、縦軸は全て長周期自由波の振幅 (m) を表す。領域 III の水平距離は 2.0 m に統一してある。

図-5 は、2つの入射周期を固定して、両水深を変化させた時の自由波の振幅である。ただし、水深比は $h_2/h_1 = 2/3$ に固定している。横軸はそのときの領域 I の水深を表す。入射周期は、□は 0.80 s と 0.87 s, ○は 1.00 s と 1.10 s で自由波の周期は共に 10.0 s である。△は 0.80 s と 0.95 s, ◇は 1.00 s と 1.25 s で自由波の周期は共に 5.0 s である。白抜きは領域 I で、黒塗りは領域 II を示す。一般に言える事は、両水深が深くなれば1次波はステップの存在を感じにくくなり、自由波の振幅も小さくなる。同じ周期の自由波を発生させる1次波の周期の組み合わせを比較すると(□と○), 1次波の周期の長い○の方がよりステップを強く感じ、自由波の振幅も大きくなると

予想されるが、図-5 の大部分の範囲で○の方が小さい。このことは2成分の干渉の強さは周期の長いもの同士が強いとは限らない事を意味する。

図-6 は、入射波の組み合わせは図-5 と同じ(□, ○, △, ◇の1次波の周期は図-5 と同じ)であるが、領域 I の水深を 30 cm と固定し、ステップ高さを変化させた場合である。横軸はステップ高さを示す。一般にステップが高くなるほど、1次波はステップの存在を強く感ずるから発生する自由波も大きくなる。しかしながら、同じ周期の自由波を発生させる1次波の周期の組み合わせの比較(□と○, 又は△と◇)では、図-5 の場合と同様、干渉の強さは複雑であり、必ずしも一定の特性とはならない。実際、2つの曲線は途中で交差し、傾向が逆となっている。

図-7 は、海底地形を固定し($h_1 = 30$ cm, $h_2 = 20$ cm)、同時に1成分目の周期も 0.8 s (太線) と 1.0 s (細線) に固定した上で、2成分目の周期を変えることにより発生する自由波の周期を変化させたものである。横軸は自由波の周期である。これによれば、発生する自由波の周期が長いほど振幅は小さい。しかしながら、1次波の周期に対する依存性は、これまでと同様必ずしも一定しない。

図-8 は、1次波の2成分の周期は変化させるが、発生する自由波の周期は一定となるようにした場合である。横軸は1成分目の周期を示す。自由波周期は△は 5.0 s, ○は 7.5 s, ◇は 10.0 s で、白抜きは領域 I, 黒塗りは領域 II を示す。この図では、発生する自由波の周期に対する依存性がより明確に示されている。これによれば、1成分目の周期が 1.0 s 付近で領域 II の自由波振幅は極小値をとる。このことがこれまでの図で示されたような自由波振幅の複雑な特性を生じさせている。

図-9 は、ステップ前面を傾斜させた場合で、横軸は傾斜角を示している。縦軸は領域 II で発生する自由波振幅を矩形ステップ時に発生する自由波振幅に対する比で表している。領域 I の水深は全て 30 cm に固定している。実線は自由波周期が 10.0 s の場合で、破線は自由波周期

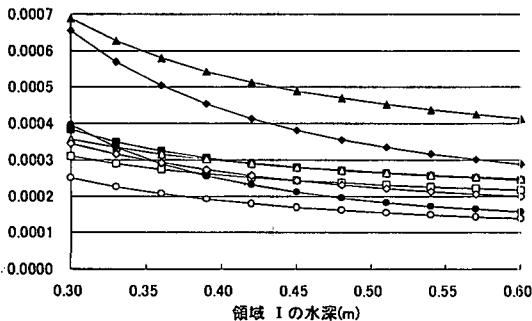


図-5 両領域の水深変化に対する振幅

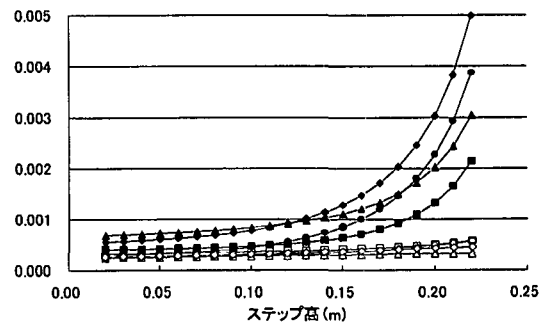


図-6 ステップ高の変化に対する振幅

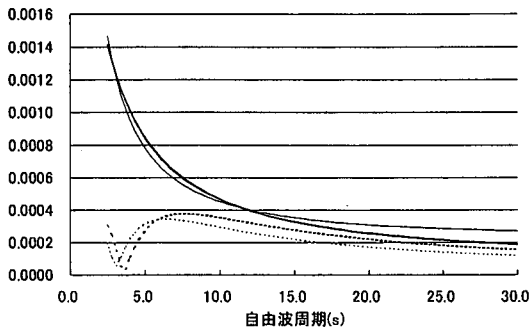


図-7 自由波周期に対する振幅

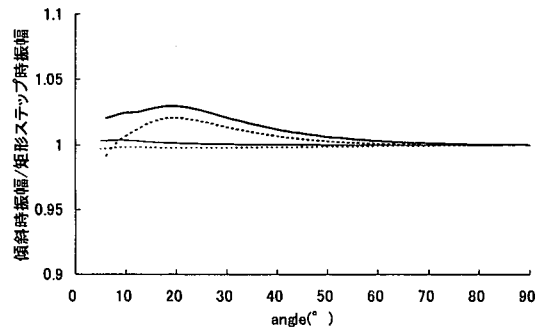


図-9 傾斜ステップ角度に対する振幅比

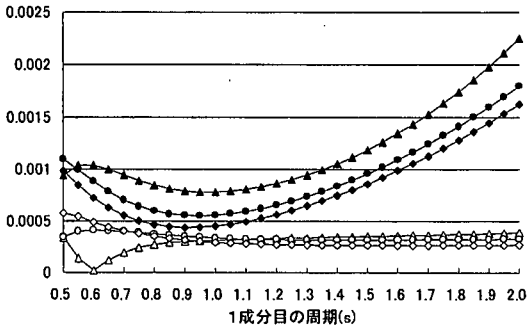


図-8 1次波周期に対する振幅

波の解析方法として、ステップを含む部分領域を境界要素法で解き、前後の解析解と接続させる方法を提案した。この方法を用いて種々の条件のもとで発生する長周期自由波の特性を調べた。しかしながら、現象を支配するパラメータの数が多いことと、1次波同士の干渉の特性が複雑なことから、長周期自由波の特性もかなり複雑となり、簡単な記述には至らなかった。今後の課題としては、整理方法を工夫しより単純な特性を見出すこと、さらに斜め入射の場合の解析や実スケールの場合の解析が挙げられる。

参 考 文 献

- 合田良実・岡崎健一 (1998): 矩形ステップ上の非線形波浪干渉と碎波限界, 海岸工学論文集, 第45巻, pp. 46-50.
 大橋正臣・佐藤幸雄・濱中健一郎 (2000): ステップ状海底地形で発生する長周期自由波の波向と発生限界, 海洋開発論文集, Vol. 16, pp. 363-368.
 関本恒浩・森屋陽一・水口 優 (2000): 自由長周期波の発生とその定量的評価に関する理論的考察, 海岸工学論文集, 第47巻, pp. 236-240.

6. 結 論

ステップ上を通過する波によって発生する長周期自由

が5.0 sの場合である。太線はステップ高が20 cm, 細線はステップ高が10 cmである。いずれの場合もステップ高が低い場合はステップを傾斜させても結果はほとんど変わらないが、ステップ高が高い場合は、明らかに傾斜の影響が現れる。しかしながら、現在のところ細かなメカニズムは明確ではない。