

極値波高分布の形状特性に対する汎用指標の提案

北 野 利 一*

期間最大波高に対する極値の漸近理論に基づけば, Gumbel プロットにおける確率点曲線の勾配が一般化極値分布の尺度母数となり, 裾長さパラメータが尺度母数の汎用指標としての意義をもつことを示した。さらに, 確率点曲線の曲率を用いて, 形状母数の汎用指標を新たに提案した。Weibull 分布に対するその指標の値を検討した結果, 極値III型分布を母分布の候補としない従来の母分布推定法は, Weibull 分布を母分布に含めるため, 実際には極値III型分布に類似した確率分布を間接的に含めた検討になっていることを示した。

1. はじめに

長期波浪統計解析においては, 極値分布に加えて, フィッティングに柔軟な 3 母数 Weibull 分布も, 母分布の候補として用いられる。しかし, 極値分布とワイブル分布は関数系が異なるため, 推定された尺度母数や形状母数を直接比較することは意味がない。合田 (2002) は, 分布の関数系の相違や形状母数の値に依存しにくい指標として, 裾長さパラメータ γ_{50} を導入した。裾長さパラメータは, いかなる分布形に対しても算定できる確率波高を 2 つ用いて定義されるため, 汎用的に比較可能な指標であるといえる。ただし, 裾長さパラメータの意義に対する合田 (2002) の検討は主として事例に基づくものであり, 年最大波高の変動係数と裾長さパラメータの関連性や, 2 つの裾長さパラメータ γ_{50} と γ_{100} の関係を示すにとどまり, 極値理論における裾長さパラメータの意義を示すものではない。

本研究では, 期間最大波高に対する極値の漸近理論に基づき, Gumbel プロットにおける確率点曲線の微係数を用いて, 位置, 尺度および形状母数のそれぞれの理論的な意味を整理する。その結果として, 裾長さパラメータの理論的な意義を検討し, 極値分布ではない Weibull 分布に対しても, 一般化極値分布と同列に分布関数の裾形状が比較できる汎用指標を提案する。

2. R 年確率波高と L 年最大波高

確率波高とは基準値を表わし, 想定する再現期間 R 年間に, その基準値を平均的に 1 回超える。この定義により, 年最大波高の累積確率関数 F を用いて, R 年確率波高 x_R は, 次式を満足する。

$$F(x_R) = 1 - 1/R \quad \dots\dots\dots (1)$$

一般に分布関数 F には, 位置, 尺度および形状を表わす母数が含まれるので, 確率波高 x_R にそれらの母数が含まれる。波浪資料が具体的に与えられる場合には, 母数および確率波高は標本により推定すべき量となるが, いずれの量も統計量ではなく, 母数が既知であれば単なる定

数であることに注意する。

L 年最大波高は L 年最大統計量ともよばれ, L 年間に発生する波高の最大値であり, その名称のとおり統計量である。年最大波高の標本の各々の値は, 1 年最大波高である。年最大波高の累積確率関数 F を用いれば, L 年最大波高 x_L を確率変数とする累積確率関数 F_L は

$$F_L(x_L) = F(x_L)^L \quad \dots\dots\dots (2)$$

と表わされる。

極値の漸近理論から, 高波の発生独立性および等質性を前提に, 高波の 1 年間ににおける発生数が十分に多ければ, 年最大波高は次式に示す一般化極値分布 (GEV) に従う。

$$F(x) = \exp \left\{ - \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで, ξ は形状母数であり, (μ, σ) は位置および尺度母数である。式 (3) を式 (1) に代入することにより, R 年確率波高 x_R は

$$x_R = \mu + \sigma \frac{\{-\log(1-1/R)\}^{-\xi} - 1}{\xi} \quad \dots\dots\dots (4)$$

と得られる。また, 式 (3) を式 (2) に代入して得られる L 年最大波高 x_L の確率分布は, 極値分布の性質から必然的に, 形状母数が等しい GEV となり, その位置および尺度母数 (μ_L, σ_L) は, 期間 L 年および毎年最大波高の母数 (μ, σ, ξ) を用いて,

$$\mu_L = \mu + \sigma \frac{L^\xi - 1}{\xi}; \quad \sigma_L = \sigma L^\xi \quad \dots\dots\dots (5)$$

と表わされる。

以上で得られる結果において注目すべき点は, L 年最大波高の位置母数 μ_L は再現期間を L 年とする確率波高に近似されることである。式 (4) において, 再現期間 R が十分大きいとすれば,

$$-\log(1-1/R) \cong 1/R \quad \dots\dots\dots (6)$$

と近似できて, 式 (5) で $L=R$ とすれば,

$$\mu_L|_{L=R} \cong x_R \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。

以上のような確率波高と期間最大波高の位置母数との関連性は, 発生確率の視点からも説明することができる。

すなわち、再現期間 R 年間の内に確率波高 x_R を超える波高の発生数 k の確率分布 $P(k)$ はPoisson分布で表われ、その平均発生数が1回であるから、

$$P(k) = e^{-1}/k! \dots\dots\dots (8)$$

となる。したがって、再現期間内に確率波高を超える波の発生数がゼロとなる確率は、

$$P(k=0) = e^{-1} \dots\dots\dots (9)$$

である。その一方、GEVにおいて、位置母数と同じ大きさの波高に対する非超過確率は、式(2)の F に式(3)のGEVを用い、 $x_L = \mu_L$ を代入することにより、

$$F_L(\mu_L) = e^{-1} \dots\dots\dots (10)$$

と得られる。その確率は形状母数 ξ の値に関わらず一定であり、式(9)の確率に等しい。ここで、期間 L 年を再現期間 R 年と置き換えれば、 R 年間に発生する最大波高が、その位置母数 $\mu_L|_{L=R}$ および確率波高 x_R を超えない確率がともに e^{-1} に一致することになり、結果として、これら2つの波高に対して以下の関係を得る。

$$\mu_L|_{L=R} = x_R \dots\dots\dots (11)$$

なお、式(7)に至る議論では、式(6)において近似を用いるのに対し、発生確率による式(11)に至る議論では、近似が表面的には現れない。しかし、後者の議論では、発生数の確率分布 $P(k)$ をPoisson分布とする時点で近似がすでに入っていることに注意する。

また、式(9)の発生数ゼロの確率は、Poisson分布を用いなくとも導出できる。その場合は、式(2)において期間 L 年の最大波高の確率分布をGEVとして具体的に与えなければよい。すなわち、期間 L 年間における再現期間 R 年の確率波高 x_R を超える波高に遭遇する確率として、次式のように超過確率 P_L が与えられる。

$$1 - P_L = (1 - 1/R)^L \approx e^{-L/R} \dots\dots\dots (12)$$

したがって、上式で $L=R$ とすることにより、式(10)で得られる確率の値は得られる。

以上の議論から、確率波高 x_R は、その再現期間 R 内に発生する最大波高の漸近分布(GEV)の位置母数に近似的に一致することが理解できる。その点で、確率波高は、位置母数の概念を拡張した汎用指標であるといえる。ここで汎用とは、毎年最大波高の確率分布がGEVとはならない分布(たとえば、Weibull分布)であっても適用できるという意味として用いている。

3. 裾長さパラメータ

合田(2002)は、極値波浪分布の裾の広がりを表わす指標として、10年確率波高 x_{10} と50年確率波高 x_{50} の比

$$\gamma_{50} = \frac{x_{50}}{x_{10}} \dots\dots\dots (13)$$

を裾長さパラメータ γ_{50} と定義した。裾長さパラメータ γ_{50} と確率波高の1つを固定すれば、もう1つの確率波高

は一意的に定まる。これら2つの確率波高 x_{10} および x_{50} を固定(たとえば、 $x_{10}=6.0$ mと $x_{50}=7.5$ m)し、各種母分布関数における波高の超過確率を描くことにより、合田(2002)は、「波高が5 m以下および9 m以上では分布による差異が目立つけれども、防波堤の最適設計に影響する中央部分では、分布関数の差異が僅かである」ことを示した。図-1に合田(2002)が示したものと同様の図を示す。

図-1の縦軸は、波高の超過確率を対数スケールでとっている。波高をその超過確率と対応させて、分布形の違いによる波高の差異を見るという観点では、確率の対数を軸とするのはあまりよい方法とはいえない。なぜなら、等しい確率を適切に表現するためには、確率を求め軸を等間隔の目盛りにとる必要がある。そこで、図-1に示す母分布関数における年最大波高と、それをもとに式(2)により得られる10年最大波高および50年最大波高について、波高の累積確率を等間隔の目盛りで描いたものを図-2に示す。波高が5 m以下あるいは9 m以上となる毎年最大波高や50年最大波高の確率分布では、分布関数による差異は顕著であるのに対し、10年最大波高においては、確率の主要な範囲($P=0.3\sim 0.8$)において、分布関数による差異が僅かであることが確認できる。したがって、合田(2002)のモンテカルロ・シミュレーション例から示唆される防波堤の設計に影響する波高とは、10年最大波高がとりうるおよその範囲に相当しているともいえる。

合田(2002)では、図-1に示した波高と超過確率の関係の他に、裾長さパラメータを意義づける特性として、毎年最大波高の変動係数と裾長さパラメータの関連性や2つの裾長さパラメータ γ_{50} と $\gamma_{100}(=x_{100}/x_{10})$ の関係を示すにとどまり、極値理論における裾長さパラメータの意義を示していない。本論文では、確率波高が位置母数の汎用指標となることを示した1.での考察と同様に、再現期間内に発生する最大波高の確率分布を用いて、裾長さパラメータの意義づけを行う。

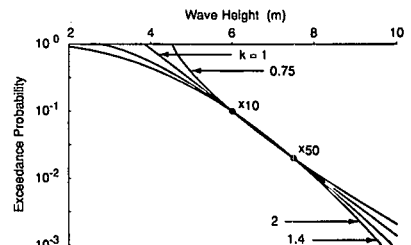
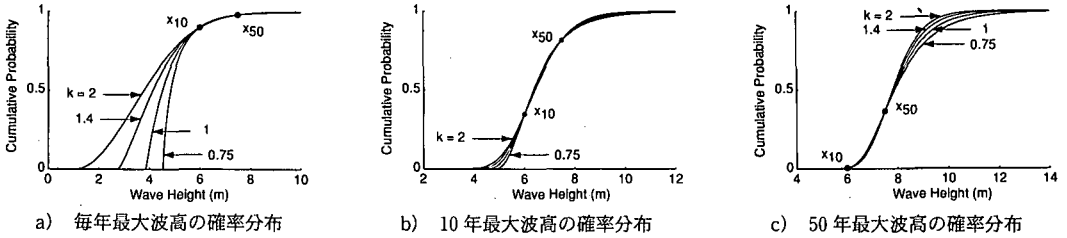


図-1 Weibull 分布における波高の超過確率(対数確率目盛り)



図一 二 Weibull 分布に対する期間最大波高の確率分布 (等確率間隔目盛り)

4. Gumbel プロット

毎年最大波高のような期間最大値資料が、極値分布の 1 つである Gumbel 分布に適用できるか否かの判断の 1 つとして、Gumbel プロットを行って検討する。すなわち、毎年最大波高を順序統計量として、

$$x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_N \quad (14)$$

のように波高の小さいもの順に並び替え、基準化変量 y_i と対応させた点 (y_i, x_i) を図示し、その直線性を検討するものである。なお、基準化変量 y_i は

$$y_i = -\log(-\log \hat{F}_i) \quad (15)$$

と表わされる標準 Gumbel 分布の逆関数に、プロット・ポジション公式により決まる割り付け確率 $\hat{F}_i$ を代入して得られる。点 (y_i, x_i) の直線性から、その切片および勾配を最小自乗法により求め、位置および尺度母数を推定することができる。その場合には、推定量として不偏性を満足するために、母分布の形状に応じたプロット・ポジション公式を用いるべきである。しかし、母数の推定に関与しないのであれば、順序統計量の累積確率関数 $F_i(y)$ に対して、

$$\hat{F}_i = E\{F_i(y)\} \quad (16)$$

となる不偏性を満足し、母分布に依存しない Weibull 公式が簡便である。その場合、昇順の順位 i 番目の基準化変量 y_i に対して、次式の確率を割り付ける。

$$\hat{F}_i = \frac{i}{N+1} \quad (17)$$

次に、年最大波高が GEV となる場合の確率波高を Gumbel プロット上に図示することを考える。Gumbel プロットの横軸は基準化変量 y_i であるので、式 (15) における割り付け確率 $\hat{F}_i$ を累積確率 P と置き換え、式 (15) を

$$\exp(-y_P) = -\log P; \quad P = 1 - 1/R \quad (18)$$

と表わす。これを用いれば、式 (4) の確率波高は

$$(x_R) = x_P = \mu + \sigma \frac{\exp(\xi y_P) - 1}{\xi} \quad (19)$$

と変形できる。ただし、Gumbel プロットにおける確率波高 x_R の連続な曲線を確率点曲線とよび、 x_P の記号を用

いる。また、確率点曲線上のある 1 点を示す確率波高については x_R の記号を用いる。

式 (18) および (19) を用いて、 $R=10$ とした時の点 $(y_P, x_P (= x_R))$ を (y_0, x_0) とおいて、式 (19) で表わされる確率点曲線 x_P を変形すれば、

$$x_P = x_{10} + \sigma_{10} \frac{\exp(\xi y_P) - 1}{\xi} \quad (20)$$

となる。ここで、定数 x_{10} および σ_{10} は

$$x_{10} = \mu + \sigma \frac{\exp(\xi y_0) - 1}{\xi}; \quad \sigma_{10} = \sigma \exp(\xi y_0) \quad (21)$$

であり、式 (20) の軸変数 y_P は、式 (18) における軸変数 y_P を平行移動したもの、

$$y_P' = y_P - y_0; \quad y_0 = y_P|_{R=10} \quad (22)$$

となる。また、式 (21) に含まれる $\exp(y_0)$ を

$$L = \exp(y_0) (\cong 9.49) \quad (23)$$

と置き替えることにより、式 (21) の x_{10} および σ_{10} は式 (5) の μ_L および σ_L に一致することが確認できる。以上の結果より、Gumbel プロットの軸を平行移動すれば、9.49 年最大波高の確率点曲線は毎年最大波高の確率点曲線に一致し、その位置母数は 10 年確率波高となることがわかる。確率波高 x_{10} および尺度母数 σ_{10} を固定し、 $\xi = -0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4$ の確率点曲線 x_P を Gumbel プロット上に描いたものを図一 3 に示す。なお、式 (20) において $\xi \rightarrow 0$ の極限をとることにより、

$$x_P = x_{10} + \sigma_{10} y_P' \quad (24)$$

となることから、 $\xi=0$ の確率点曲線は直線である。確率波高 x_{10} を固定しているので、任意の ξ についての確率点曲線は点 (y_0, x_{10}) を通過する。さらに、式 (20) を y_P' について微分することにより、

$$\left. \frac{dx_P}{dy_P} \right|_{x_P=x_{10}} = \sigma_{10} \quad (25)$$

となるので、全ての確率点曲線は点 (y_0, x_{10}) で $\xi=0$ の確率点曲線と接する。したがって、尺度母数とは、位置母数における確率点曲線の微係数であることが明らかになった。式 (25) を離散的な表現で書き直せば、

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \sigma_{10} \quad (26)$$

となる。ここで、 Δy を

$$\Delta y = \frac{\exp(\xi y_p^2) - 1}{\xi}; \quad y_p^2 = y_p|_{R=50} - y_p|_{R=10} \quad \dots\dots\dots (27)$$

とみなすことにより、

$$\Delta x = x_{50} - x_{10} \quad \dots\dots\dots (28)$$

となる。式 (28) を式 (26) に代入して変形すれば、

$$\gamma_{50} = \frac{x_{10}}{x_{50}} \Delta y + 1 \quad \dots\dots\dots (29)$$

となり、式 (13) の裾長さパラメータ γ_{50} が得られる。

裾長さパラメータ γ_{50} は 10 年最大波高の漸近分布 (GEV) の尺度母数を無次元化したものであることと、式 (13) で表わされる定義をみるとおり、一般の母分布関数に対しても適用可能であることの 2 点から、裾長さパラメータ γ_{50} は尺度母数の汎用指標であるといえる。

5. 形状母数の汎用指標 ξ_{10}

図-4 は、2 つの確率波高 x_{10} および x_{50} を固定して、形状母数 ξ の異なる GEV の確率点曲線を描いたものである。位置および尺度母数の汎用指標として、確率波高 x_{10} および裾長さパラメータ γ_{50} を固定しているの、確率波高 x_{10} と x_{50} にはさまれる波高については分布関数による差異は小さい。なお、図中の点は、Kodiak 沖の 18 年間の高波に対する年最大波高資料 (Goda, 2000 を参照) について、式 (15) および (17) を用いてプロットしたものである。Kodiak 沖の毎年最大波高に対する GEV を用いた形状母数の推定値 $\hat{\xi}$ は $\hat{\xi} = -0.2$ である。図-4 から、Kodiak 沖の波高資料の標本値と $\xi = -0.2$ の確率点曲線とは、Gumbel プロット上で類似した変化を示している。その一方、残りの確率点曲線は、確率波高 x_{10} より小さい波高において、標本値と異なる傾向を示していることが確認できる。このことは、図-2(a) で、異なる分布関数の互いの差異が顕著であることに相当する。

確率波高 x_{10} における微係数の代わりに、確率波高 x_{10}

の右側で決まる確率波高 x_{50} と x_{10} の差 Δx^+ に対する勾配 $\Delta x^+ / \Delta y$ を用いて、裾長さパラメータ γ_{50} は定義されている。これに対し、確率波高 x_{10} の左側で決まる勾配 $\Delta x^- / \Delta y$ は、右側の勾配 $\Delta x^+ / \Delta y$ に一致しない ($\xi = 0$ の例外を除く)。このために、標本値は、標本から推定される値とは異なる形状母数をもつ確率点曲線と乖離するのである。この分布関数による差異を考慮に入れるためには、形状母数の汎用指標が必要である。

式 (20) の 2 階の微係数を、その 1 階の微係数で無次元化をすれば、

$$\left(\frac{d^2 x_p}{dy_p^2} / \frac{dx_p}{dy_p} \right) \bigg|_{x_p=x_{10}} = \xi \quad \dots\dots\dots (30)$$

となる。したがって、形状母数とは、位置母数における確率点曲線の曲率であることがわかる。式 (30) の左辺は、

$$\frac{d^2 x_p}{dy_p^2} / \frac{dx_p}{dy_p} = \frac{d}{dy_p} \log \frac{dx_p}{dy_p} \quad \dots\dots\dots (31)$$

と対数を用いて変形できる。そこで、式 (30) の左辺を離散的な表現に改めたものを、形状母数の汎用指標 ξ_{10} として以下のように定義する。

$$\xi_{10} = \frac{1}{\Delta y} \Delta \left(\log \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) = \log_b \frac{\Delta x^+}{\Delta x^-} \quad \dots\dots\dots (32)$$

なお、上式の最左辺で用いられる対数の底 b は、式 (27) における y_p^2 を用いて、

$$b = \exp(y_p^2) \cong 5.22 \quad \dots\dots\dots (33)$$

となる。また、 Δx^+ および Δx^- を確率波高を用いて表現することにより、式 (32) の汎用指標 ξ_{10} は

$$\xi_{10} = \log_{5.22} \frac{x_{50} - x_{10}}{x_{10} - x_{2.37}} \quad \dots\dots\dots (34)$$

となる。汎用指標 ξ_{10} は、その定義の導出から明らかなように、母分布が GEV であれば、その形状母数に一致するものである。なお、GEV ではない母分布 (特に、Weibull 分布) を用いる場合に汎用としての意味をもち、その値の意味は、確率波高 x_{10} の近傍で母分布を GEV に近似させた時の GEV の形状母数の値となる。

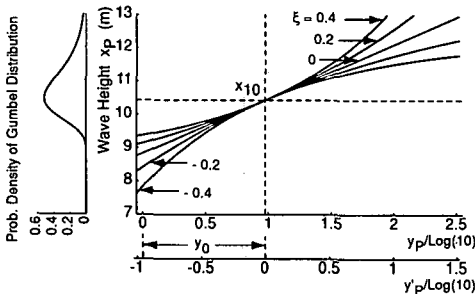


図-3 Gumbel プロットにおける確率点曲線 (10 年確率波高のみを固定)

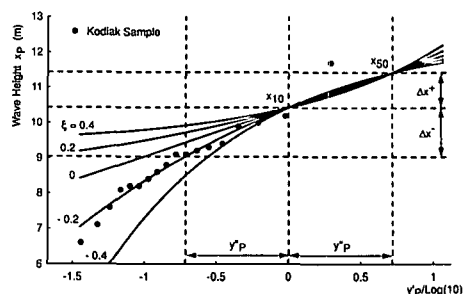


図-4 Gumbel プロットにおける確率点曲線 (10 年および 50 年確率波高を固定)

Weibull 分布の極限分布は Gumbel 分布である。しかし、形状母数が $k \geq 1$ である場合を除き、その収束性は穏やかであり、年最大値分布が Weibull 分布の場合に、10 年最大波高の確率分布は、Gumbel 分布とはみなせない。このような状況に対して、確率波高 x_{10} の近傍で Weibull 分布の確率点曲線の曲率を指標 ξ_{10} で算定し、それを GEV の確率点曲線の曲率とみなすのである。同じことが確率点曲線の勾配についてもいえ、Weibull 分布を母分布とする裾長さパラメータは、それを確率波高 x_{10} の近傍で近似した Gumbel 分布（勾配を考える時には曲率を含めないため、曲率ゼロの GEV）の裾長さパラメータとなっている。

年最大波高資料ではなく、部分極大波高資料を対象とする場合には、一般化パレート分布 (GPD) が用いられる。この時、再現期間を R 年とする確率波高 x_R は、次式のように表わされる（北野ら，2002）。

$$1 - G(x_R - u) = \frac{\tau_u}{R} \quad (35)$$

ここで、 τ_u は閾値 u を超える波高の発生する平均発生周期であり、確率分布 G は、尺度および形状母数を (σ, ξ) とする一般化パレート分布

$$G(y) = 1 - (1 + \xi y / \sigma)^{-1/\xi} \quad (36)$$

である。式 (35) において、平均発生期間 τ_u が 10 年となる閾値を x_{10} と記し、式 (36) と組み合わせれば、再現期間を R 年とする累積確率 $P = 1 - 1/R$ の確率点曲線 x_P は、式 (20) の表現に一致する。また、GPD と GEV の母数の関係（間瀬ら，2000）を用いれば、両者の位置母数 x_{10} および尺度母数 σ_{10} が一致することが示される。なお、ここで得られる式 (20) の表現における y_P は、以下に示す y_P を式 (22) に代入して得られるものである。

$$\exp(-y_P) = 1 - P = 1/R \quad (37)$$

ここで、上式の y_P と式 (18) の y_P の定義がわずかに異なる点に注意する。この相違点は、形状母数の汎用指標 ξ_{10} を定義における y_P^* および Δx^- に影響するため、部分極大波高資料の母分布に対する汎用指標 ξ_{10} は、式 (34) を若干修正することにより、以下のように定義される。

$$\xi_{10} = \log_5 \frac{x_{50} - x_{10}}{x_{10} - x_2} \quad (38)$$

表-1 Weibull 分布の形状母数に対する汎用指標

k (Weibull)	0.75	1	1.4	2	(3)
AMS	0.21	0.07	-0.05	-0.15	(-0.22)
POT: $\lambda v = 2$	0.12	0.00	-0.10	-0.18	(-0.24)
4	0.09	0.00	-0.08	-0.14	(-0.19)
8	0.08	0.00	-0.07	-0.12	(-0.16)

毎年最大値資料 (AMS) および部分極大値資料 (POT) の母分布を Weibull 分布とする場合に、汎用指標 ξ_{10} の値を表-1 に示す。POT に対しては、汎用指標 ξ_{10} が平均発生率 λ と採択率 v の積に依存することに注意する。また、形状母数が $k > 1$ の Weibull 分布に対しては、 ξ_{10} が負となる。 ξ_{10} は GEV が母分布であれば、その形状母数 ξ に一致することから、極値 III 型分布 (GEV において形状母数 ξ が負の場合) を母分布の候補としない従来の母分布推定法において、Weibull 分布を母分布とすることにより、極値 III 型分布に類似した確率分布も間接的に候補に含まれることがわかる。

6. 結 語

本研究では、確率波高 x_{10} および合田 (2002) の提案する裾長さパラメータ γ_{50} が位置および尺度母数の汎用指標であることを示した。また、形状母数の汎用指標として、 ξ_{10} を新たに提案し、以上の 3 つ汎用指標を用いれば、Weibull 分布などの極値分布ではない母分布に対しても、母分布の形状特性が相互に比較可能となることを示した。

一部の図面作成にあたって、池田 充君（名古屋工業大学第 2 部学生）の協力に感謝する。

参 考 文 献

- 北野利一・間瀬 肇・喜岡 渉・矢野陽一郎 (2002): 一般化パレート分布による極値解析—拡張形状母数の推定—, 海岸工学論文集, 第 49 巻, pp. 161-165.
- 合田良実 (2002): 設計波高に係わる極値統計分布の裾長さパラメータとその意義, 海岸工学論文集, 第 49 巻, pp. 171-175.
- 間瀬 肇・北野利一・森岡智史 (2000): 波浪極値統計解析における一般化パレート分布の適用性に関する研究, 海岸工学論文集, 第 47 巻, pp. 221-225.
- Goda, Y. (2000): Random seas and design of maritime structures, World Scientific, 443 p.