

斜面に連続的に作用する内部波の碎波と残差流

中 山 恵 介*・Jorg Imberger**

本研究は、斜面に連続的に作用する内部波により生じる残差流としての鉛直循環について検討することを目的とする。過去に行われた実験結果を利用して、Carrier と Greenspan により提案されている弱非線形方程式である長波近似された方程式の解を碎波する際の内部波に適用し、その適用性を検討した。理論解による残差流は、実験との比較により良好な再現性を示していることが分かった。これにより、 $B_p=7\sim 8$ 程度の場合、内部波の碎波は 3 次元的な現象ではあるが、鉛直積分された 2 層流方程式を用いても、比較的良好に内部波の斜面上での碎波による流れ場を再現できることが分かった。

1. はじめに

2 成層場の斜面に連続的に内部波が作用した場合の研究に関連するものとして、① 2 成層場の斜面に孤立波が作用した場合、② 連続成層場の斜面に内部波が作用した場合、の 2 種類の研究が挙げられる。前者は、Wallace・Wilkinson (1988) や Kao ら (1985) により行われた実験が主たるものであり、どのように水塊が運ばれてゆくか、内部波により斜面上に発生したボアの挙動を考察し、碎波による残差流の観測を行った。Michallet・Ivey (1999) や Helfrich (1992) は、碎波により生じるエネルギーの損失から斜面上での流れ場のようすを把握しようとした。Lamb (2002) と Saffarinia・Kao (1996) は、数値計算を用いて、上述のボアのより詳細なデータを得ることに成功し、碎波のメカニズムを解明しようとした。

表面波に関する研究であるが、Longuet-Higgins (1983) や Putrevu・Svendsen (1993) により、碎波が生じた場合に残差流として発生する undertow が報告されている。斜面に作用する表面波の役割は、密度差の大きな違いはあるが、2 成層場における斜面の役割と同様な働きをするものとして考えられる。つまり、内部波が碎波する際にも、undertow と同じ現象が現れている可能性がある。

このように、多くの研究が本研究に関係するものとして挙げられるが、残念ながら、2 成層場の斜面上に連続的に内部波が作用した場合の残差流についての研究は少ない。梅山・新谷 (2001) の研究は、連続的に作用した内部波による残差流の影響を調べたものとして挙げることができるが、直接残差流に関して検討されていない。

そこで、本研究では、Nakayama・Imberger (2003) の研究を参考に、Carrier・Greenspan (1958), Carrier (1966a, 1966b, 1966c) の理論を用いて、内部波が斜面上で碎波した場合の理論解を導出し、それをもとに残差流の再現を行う。

2. 理論解

(1) 基礎方程式

これまでの内部波に関する研究で、幾つかの方程式が提案され、様々な問題に適用されてきた。Tomasson・Melville (1992) は、ケルビン波の再現を行うために、2 層モデルに Boussinesq タイプの方程式を用いた。Choi ら (1996) は、より一般的な高次の Boussinesq タイプの方程式を導出している。Kdv タイプの方程式を用いた内部波の研究は、Grimshaw (1970) によるものや、Horn ら (2000) によるものが存在する。後者は、低周波の内部波がどのように高周波成分へと遷移してゆくかを、実験と理論式の比較から検討したものである。本研究では、碎波が生じた際における理論解の導出を目的としているため、Boussinesq タイプの方程式を適用して解を得ることは困難である。そこで、分散項を持たない長波近似された方程式を基礎方程式として、Carrier・Greenspan (1958), Carrier (1966a, 1966b, 1966c) の理論を適用して解の再現を試みた。

Carrier・Greenspan (1958), Carrier (1966a, 1966b, 1966c) の理論は、表面波のための理論であり、内部波で示される方程式に適用するためには、2 層流方程式を修正する必要がある。Nakayama・Imberger (2003) に従い、2 層流における長波近似された方程式を Carrier・Greenspan (1958), Carrier (1966a, 1966b, 1966c) の理論が適用可能な形へと変化させる。2 層流における長波近似された方程式は、式 (1)～式 (4) で示される (図-1)。

$$\beta \frac{\partial \eta_1'}{\partial t} - \frac{\partial \eta_2'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{v_1(\gamma \eta_1 - \delta \eta_2 + h_1)\} = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

$$\frac{\partial v_1'}{\partial t} + \delta v_1 \frac{\partial v_1'}{\partial x} = -\zeta \frac{\partial \eta_1'}{\partial x} \quad \cdots \cdots (2)$$

$$\frac{\partial \eta_2'}{\partial t} + \delta \frac{\partial}{\partial x} (v_2 \eta_2) + \frac{\partial}{\partial x} (v_2' h_2) = 0 \quad \cdots \cdots (3)$$

$$\frac{\partial v_2'}{\partial t} + \delta v_2 \frac{\partial v_2'}{\partial x} = -\zeta \frac{\partial \eta_1'}{\partial x} - \frac{\partial \eta_2'}{\partial x} \quad \cdots \cdots (4)$$

* 正会員 工博 国土交通省 国土技術政策総合研究所 沿岸海洋研究部 海洋環境研究室

** Ph.D. The University of Western Australia, Centre for Water Research

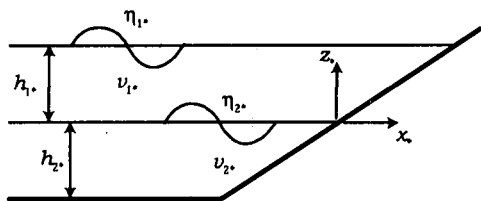


図-1 2層モデルの概略図

$$\begin{cases} \frac{a_1}{\varepsilon a_2} = \zeta, \frac{a_1}{a_2} = \zeta, \frac{a_2}{H} = \delta, \frac{a_1}{H} = \gamma \\ 1 = \zeta \gg \xi, \delta, \text{ and } \gamma \end{cases} \quad (5)$$

ここでそれぞれ無次元化された、 η_1 : 表面波の変動成分、 η_2 : 内部波の変動成分、 v_1 : 上層の流速、 v_2 : 下層の流速、 h_1 : 上層の水深、 h_2 : 下層の水深、 ε : 上層と下層の密度差と下層の密度の比、 x : 水平成分の軸、 t : 時間、有限次元である g : 重力加速度である。式(1)–式(4)に、式(6)で示される無次元化を適用する。

$$\begin{cases} \eta_1 = a_1 \eta'_1, \eta_2 = a_2 \eta'_2, h_1 = H' h'_1, h_2 = H' h'_2 \\ v_1 = (\varepsilon g a_2^2 / H')^{1/2} v'_1, v_2 = (\varepsilon g a_2^2 / H')^{1/2} v'_2, x = l_0 x' \\ t = (\varepsilon g a_2^2 / H')^{1/2} l_0 / (\varepsilon g a_2) t' \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 a_1 : 表面波の変動成分の代表長さ、 a_2 : 内部波の変動成分の代表長さ、 H' : 平均水深の代表長さ、 l_0 : 斜面部の水平距離、である。

式(1)–式(4)に、式(7)–式(10)で示される摂動展開式を用いる。

$$\eta_1 = \eta_{1000} + \xi \eta_{1100} + \delta \eta_{1010} + \gamma \eta_{1001} + \dots \quad (7)$$

$$v_1 = v_{1000} + \xi v_{1100} + \delta v_{1010} + \gamma v_{1001} + \dots \quad (8)$$

$$\eta_2 = \eta_{20} + \delta \eta_{21} + \dots \quad (9)$$

$$v_2 = v_{20} + \delta v_{21} + \dots \quad (10)$$

ここで、式(7)、式(8)における右辺の添え字は、第一番目の1が上層、第2、3、4番目が ξ 、 δ 、 γ に対応する。式(9)、式(10)における右辺の添え字は、第一番目の2が下層、第2番目が δ に対応する。本論文では、界面の動きを追うことが目的であるため、界面の動きを示す δ を中心に方程式を変形させた。1次オーダーと2次オーダーの式をまとめることで、式(11)、式(12)を得る。

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{v_2 (\eta_2 + h_2)\} = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} = & -\frac{\varepsilon g h_1}{h_1 + h_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \\ & + \frac{1}{h_1 + h_2} \frac{\partial E_1}{\partial x} \end{aligned} \quad (12)$$

$$E_1 = \varepsilon g \frac{\eta_2^2}{2} + h_2 v_2^2 + h_1 v_1^2 \quad (13)$$

式(12)において、右辺第1項目のオーダーは、右辺

第2項目の界面変位による項のオーダーに比べて大きい。第1番目の項のオーダーを1とすると、第2番目の項は η_2/h_1 で示される。さらに、斜面付近では下層厚さが全層の厚さに比べて小さい。つまり、流速による右辺第2項目のオーダーは、左辺第2項のオーダーに比べて小さい。本研究では、斜面付近での界面の挙動による残差流を調査することが目的である。そこで、式(12)の第2項で示される値の影響は、式(12)において小さいものとし省略し、最終的に式(14)、式(15)を得る。

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{v_2 (\eta_2 + h_2)\} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\frac{H}{H + h_2} \varepsilon g \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \quad (15)$$

ここで、今後の式展開での簡便さを考慮して、 $H = h_2$ 、 $\eta = \eta_2$ 、 $h = h_2$ 、 $v = v_2$ と置き換えた。

(2) 理論解

Carrier・Greenspan (1958), Carrier (1966a, 1966b, 1966c)の理論を適用するために、表面波の影響は連続関係において界面の動きに比べて小さいという仮定を用いて、内部波の4方程式(式(1)から式(4))を、2方程式(式(14)、式(15))へと変更した。しかし、式(15)の右辺第1項の係数($=H/(H+h)$)は斜面上で変化する変数である。そこで、内部波の波長は斜面長に比べて比較的大きい、つまり、斜面内での内部波の進行速度は一定値であるという仮定を用い、式(15)の一部を式(16)のように変化する。

$$f^2 = H/(H+h) = \text{constant} \quad (16)$$

Nakayama・Imberger (2003)に従い、式(14)、式(15)を解く。式(17)を適用し、式(18)、式(19)を得る。

$$\begin{cases} v = v_0 v, v_0 = (a h \varepsilon g)^{1/2}, \eta = a h \eta, t = T t \\ h = -\alpha x, T = (l_0 / a \varepsilon g)^{1/2}, x = l_0 x \end{cases} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v c^2) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -f^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} - f^2, c^2 = \eta - x \quad (19), (20)$$

ここで、 α : 斜面勾配である。式(21)から式(24)で示される変換を用いることにより、最終的に式(25)が得られる。

$$\alpha = v + 2c + f^2 t \quad (21)$$

$$-\beta = v - 2c + f^2 t \quad (22)$$

$$\alpha - \beta = \lambda \quad (23)$$

$$\alpha + \beta = \sigma \quad (24)$$

$$\sigma \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \sigma^2} \right) - 3 \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} = 0 \quad (25)$$

式(25)の解は、式(26)から式(30)のように得られる。

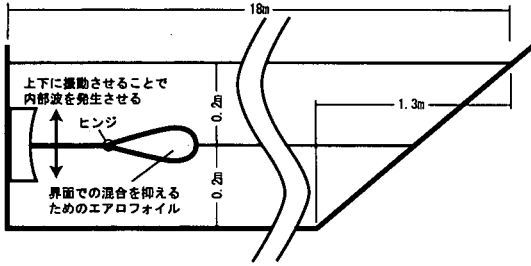


図-2 実験装置の概要図

$$\phi = \int_0^\infty A(\omega) \exp[-i\omega\lambda] J_0(\omega\sigma) d\omega \quad (26)$$

$$v = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}, \quad \eta = \frac{1}{f^2} \left(\frac{\phi}{4} - \frac{v^2}{2} \right) \quad (27), (28)$$

$$t = (\lambda/2 - v)/f^2, \quad \sigma = 4fc = 4f(\eta - x)^{1/2} \quad (29), (30)$$

ここで、 $J_n(Z)$ は第 1 種のベッセル関数である。Nakayama・Imberger (2003) は、式 (26) から式 (30) で示される解を完全反射の場合に適用した。本論文では、碎波をとまなう流れ場の導出が目的であるため、式 (26) から式 (30) を完全反射でない場合に適用する。これまで、梅山・新谷 (2001) が斜面に作用する内部波を進行波として対流項の効果を無視することが出来るとして理論解を適用してきた。本論文は、そのような簡略化を行わず再現性を試みた。斜面が始まる点 ($x = x_L$) において、進行波 (式 (31)) が与えられるとする。

$$\eta|_{\sigma=\sigma_0} = c_0 \exp[-i\omega_0 t + ikx_L] \quad (31)$$

斜面の始点であることを考慮して、 $v \ll 1$ を仮定する。式 (26)、式 (28) と式 (31) の比較から、式 (32) を得る。

$$\eta|_{\sigma=\sigma_0} = c_0 \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2f^2}\lambda + ikx_L\right], \quad \omega = \frac{\omega_0}{2f^2} \quad (32)$$

式 (32) は、式 (26) を式 (28) に代入し、 $x = x_L$ で $v \ll 1$ を用い、Hankel 関数 ($H_n^{(1)}, H_n^{(2)}(Z)$) を用いることで、進行波の組み合わせで表すことが出来る (式 (33))。

$$\eta \simeq \frac{1}{4f^2} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = \frac{1}{4f^2} \left(-i\frac{\omega_0}{2f^2} \right) A_0 \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2f^2}\lambda\right] \cdot \frac{1}{2} \left\{ a_{ref} H_0^{(1)} \left(\frac{\omega_0 \sigma_0}{2f^2} \right) + H_0^{(2)} \left(\frac{\omega_0 \sigma_0}{2f^2} \right) \right\} \quad (33)$$

ここで、 a_{ref} は Nakayama・Imberger (2003) により示されている反射率を示す。反射率は c_0/C_s ($C_s = \sqrt{8/(\pi B_p^2)}$, $B_p = 2\omega_0/f$) : 碎波直前の限界振幅/2) の関数であり、反射率の二乗は、 c_0/C_s が 0 から 2 まで変化する間に線形的に 1 から約 0.02 まで減少する。それ以降は、反射率の二乗をおよそ 0.02 として考えることが出来る。式 (33) の第 1 番目の Hankel 関数は反射波を、第 2 番目の Hankel 関数は斜面へ向かう進行波を示す。式 (32) と

式 (33) より、係数 A_0 を式 (34) のように決定することが出来る。

$$A_0 = i \frac{16f^4 c_0}{\omega_0 |H_0^{(2)}(B_p)|} \quad (34)$$

最終的に、境界条件 (式 (31)) を満たすポテンシャルは、式 (35) となる。

$$\phi = i \frac{8f^4 c_0}{\omega_0 |H_0^{(2)}(B_p)|} \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2f^2}\lambda\right] \cdot \left\{ a_{ref} H_0^{(1)} \left(\frac{\omega_0 \sigma}{2f^2} \right) + H_0^{(2)} \left(\frac{\omega_0 \sigma}{2f^2} \right) \right\} \quad (35)$$

(3) 碎波の発生の判定

理論解の導出において、2 度のスケーリングを行ったため、解が 1 つだけ存在するためには、式 (36) に示される関係を満たさなくてはならない。式 (36) に示される関係が満たされない場合は、解が複数存在することが考えられる。つまり、界面において不安定が発生し、碎波が発生し始める。

$$J = x_{\beta} t a - x_{\alpha} t b \quad (36)$$

式 (36) は、式 (37) のように書き換えられる。

$$\pm \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\phi}{\sigma} \right) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma \partial \lambda} - \frac{1}{2} = 0 \quad (37)$$

最終的に、式 (38)、式 (39) が、碎波条件を示す式として導かれる。式 (38)、式 (39) は、それぞれ実部、虚部が存在するために発生した碎波条件を示す 2 つの式である。両者の式から得られる 4 つの解のうち、もっとも小さな値が碎波限界振幅を示す。

$$\frac{c_0}{\sigma^2 |H_0^{(2)}(B_p)|} \left| \pm (1 - a_{ref}) \{ -\omega_0 \sigma N_0(B_p) + 4f^2 N_1(B_p) + \omega_0 \sigma N_2(B_p) \} - 2\sigma \omega_0 (a_{ref} + 1) J_1(B_p) \right| \leq \frac{1}{2} \quad (38)$$

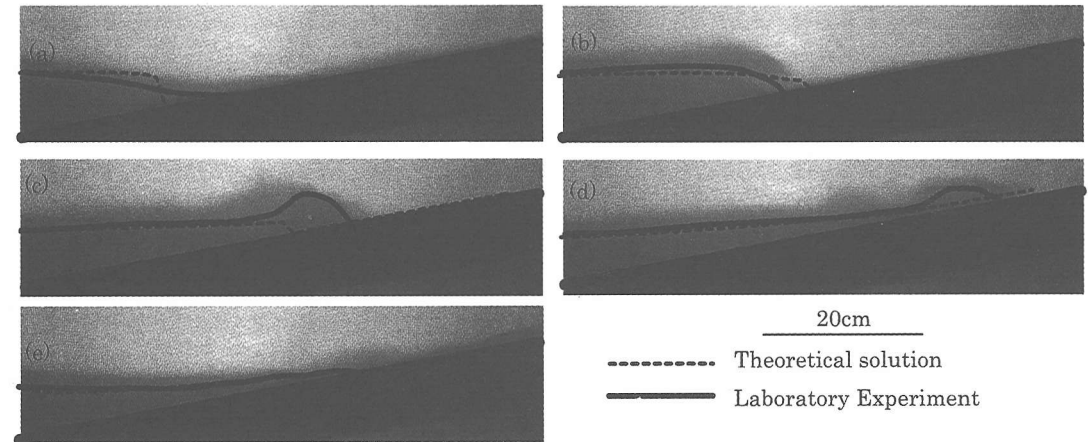
$$\frac{c_0}{\sigma^2 |H_0^{(2)}(B_p)|} \left| \pm (1 + a_{ref}) \{ -\omega_0 \sigma J_0(B_p) + 4f^2 J_1(B_p) + \omega_0 \sigma J_2(B_p) \} - 2\sigma \omega_0 (a_{ref} - 1) N_1(B_p) \right| \leq \frac{1}{2} \quad (39)$$

ここで、 $N_n(Z)$ は第 2 種のベッセル関数である。

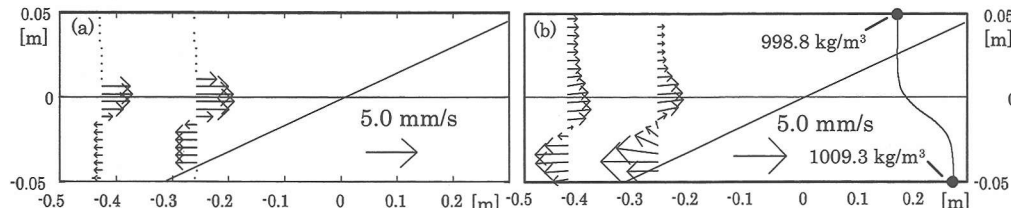
3. 実験

(1) 実験装置と実験結果

図-2 に、実験装置の概要を示す。水路長 18 m、水路幅 60 cm、水深 60 cm の水路であり、水路勾配を変化させることが出来るが、本研究の目的が斜面上での内部波の碎波を検討することであるため、勾配ゼロを与えた。斜面長は、54 cm、73 cm、130 cm の 3 種類が用意されている。ここで斜面長は、20 cm 水深に対応する長さを示す。碎波のメカニズムを解明することが目的であるため、もっともダイナミックな碎波を起こしやすい 130 cm の



図一三 内部波の斜面上での挙動. 任意の時間から5秒毎のイメージ ((a)-(b)) に対応する. 斜面長 130 cm, 上層, 下層水深それぞれ 20 cm を与えた. 上下層の密度差は 10.5 kg/m^3 , 進行波の 0.383 cm , 内部波の周期 $21.07/\text{s}$, $B_F=7.559$, $c_0=0.0419$, $\alpha_{ref}=0.15$. 実線: 結果のイメージにおける R: 162, G: 63, B: 45 を基準値として描画された界面位置. 破線: 理論解.



図一四 内部波の1周期を基準として計算された実験による残差流. 条件は図一三と同じ. (a): 理論解による残差流, (b): レーザ流速計を用いて測定した実験による残差流.

斜面での実験結果を用いることとした. 上層, 下層水深それぞれ 20 cm を与えた. 上下層の密度差は 10.5 kg/m^3 , 進行波の振幅 0.838 cm , 内部波の周期 21.07 s であった. 密度成層は, 最初に純水を注入しておき, その後, 塩水と純水の混合を抑制するために, 楔形の注入装置を用いて注入した. 水路長が 18 m, 幅が 60 cm であったため, 塩水の注入には 8 時間を要した. 実験は, 2 成層が落ち着くまでの間, およそ 2 時間おいた後, 開始された. 界面の厚さは, およそ 2 cm であった. 実験条件は, $B_F=7.559$, $c_0=0.0419$, $\alpha_{ref}=0.15$ であった.

図一三は, 実験により得られた砕波のようすを示す写真である. 撮影範囲は, 横 65 cm, 縦 28.5 cm である. 内部波が進行してゆく際に, 非静水圧効果により, 界面付近よりも大きな流速をもった水塊が, 界面下より進入してきているのが分かる (図一三(b)). 界面下より進入してくる流れは, 密度流のようにフロントを形成し, フロント周辺で顕著な反時計回りの循環を有する (図一三(c)). その後, ボアは斜面を駆け上ってゆき, 全エネルギーが傾圧エネルギーへと変換されるものと散逸により失われるものと消費され, 進行が止まる. 界面は乱れを生じることなく界面位置を下げてゆく (図一三(e)).

界面の挙動の中で注目すべき点は, 砕波後の影響はボアとして斜面を駆け上ってゆくのみで, 下流側に大きな影響を及ぼしていない点である. 砕波による流れ場を理論より再現する際に, この情報は有用である. 砕波の影響は, 砕波点より斜面側にボアとして運ばれるだけで, ボアより沖側における理論解から得られる界面形状の解に, 大きな影響を与えるものではないことを示している.

4. 理論解との比較と残差流

(1) 理論解の適用

実験結果のイメージ図をもとに, 初期状態から得られた R: 162, G: 63, B: 45 を基準値として, 界面形状を推定した (図一三, 実線). 同図に, 理論解による界面変動の推定を行った結果を示す (図一三, 破線). 界面が斜面に接する点での不安定解析の結果 (式 (38), 式 (39): $\sigma \approx 0$, $\alpha_{ref}=1$), 最初に不安定が発生する限界振幅が $C_s=0.0102$ として与えられる. そのため, 理論解を適用する際に解が 2 つ以上発生した場合, 発生した点から斜面までの界面は存在しないものとして扱った. つまり, 砕波の影響により界面が形成されないものとして扱った. 図一三の破線が理論解の適用結果を示しており, 砕波が発

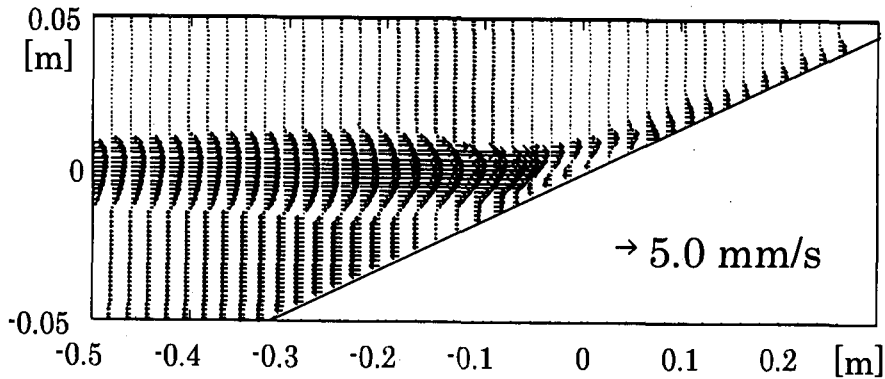


図-5 内部波の1周期を基準として計算された理論解による残差流。

生した後における界面が存在していないのが分かる。碎波後の不一致を除くと、比較的良好に界面位が再現されているのが分かる。

(2) 残 差 流

長期的な時間スケールに基づいて流れの構造を理解するために、残差流に関する検討を行った。実験では、レーザー流速計 (Portable Flux Profiler: PFP) を用いて流速を測定した。実験結果より、界面位置より下の斜面付近に沖へと向かう流れが残差流として現れることが分かる (図-4)。理論解から得られる残差流と比較すると、界面下における戻り流が小さく評価されていることが分かる。これは、戻り流が界面において貫入するという現象であり、水深方向に分布を持った流れであるが、理論では水深方向に一律の流速分布を持つといった仮定を用いているために生じたものであると考えられる。界面付近における進行波ゆえに生じる斜面への流れは、よく再現されている。さらに特徴的な点としては、上層において斜面上で発生している湧昇が挙げられる (図-5)。

5. ま と め

内部波が斜面上で碎波する場合の実験を行い、残差流の測定をレーザー流速計 (PFP) により行った。理論解を導き、内部波が碎波する場合への解の適用を試みた。内部波の碎波条件式を導き、実験において与えられた振幅と比較し、碎波しやすい条件であったことを確認した。理論解を実験結果の再現に適用する際、解が2つ以上発生した場合については、界面が存在しないものとするという仮定を用いて、実験結果による界面位の変動と比較し、良好な再現計算結果が確認された。残差流の比較も行い、再現が良好に行われたことを再度確認するとともに、上層における斜面上での湧昇の発生を確認した。

参 考 文 献

梅山元彦・新谷哲也 (2001): 斜面を遡上する内部波の変形・碎

波に関する可視化実験と k - ε モデルを用いた数値解析, 海岸工学論文集, 第48巻, pp. 136-140.

Carrier, G. F. (1966a): Topics in applied mathematics volume 1, Mathematical association of america.

Carrier, G. F. (1966b): Topics in applied mathematics volume 2, Mathematical association of america.

Carrier, G. F. (1966c): Gravity waves on water of variable depth, J. Fluid Mech., Vol. 24, pp. 641-659.

Carrier, G. F. and H. P. Greenspan (1958): Water waves of finite amplitude on a sloping beach, J. Fluid Mech., Vol. 4, pp. 97-109.

Choi, W. and R. Camassa (1996): Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system, J. Fluid Mech., Vol. 313, pp. 83-103.

Grimshaw, R. (1970): The solitary wave in water of variable depth, J. Fluid Mech., Vol. 42, pp. 639-656.

Helfrich, K. R. (1992): Internal solitary wave breaking and run-up on a uniform slope, J. Fluid Mech., Vol. 243, pp. 133-154.

Kao, T. W., F. S. Pan and D. Renouard (1985): Internal solitons on the pycnocline: generation, propagation, and shoaling and breaking over a slope, J. Fluid Mech., Vol. 151, pp. 19-53.

Horn, D. A., L. G. Redekopp, J. Imberger and G. N. Ivey (2000): Internal wave evolution in a space-time varying field, J. Fluid Mech., Vol. 424, pp. 279-301.

Lamb, K. G. (2002): A numerical investigation of solitary internal waves with trapped cores formed via shoaling, J. Fluid Mech., Vol. 451, pp. 109-144.

Longuet-Higgins, M. S. (1983): Wave set-up, percolation and undertow in the surf zone, Proc. R. Soc. Lond., Vol. 390, pp. 283-291.

Michallet, H. and G. N. Ivey (1999): Experiments on mixing due to internal solitary waves breaking on uniform slopes, J. Geophys. Res., Vol. 104, pp. 13467-13477.

Nakayama, K. and J. Imberger: Residual circulation due to internal waves shoaling on a slope, J. Fluid Mech., Submitted, 2003.

Putrevu, U. and I. A. Svendsen (1993): Vertical structure of the undertow outside the surf zone, J. Geophys. Res., Vol. 98, pp. 22707-22716.

Saffarinia, K. and T. W. Kao (1996): A numerical study of the breaking of an internal soliton and its interaction with a slope, Dynamics of atmospheres and oceans, Vol. 23, pp. 379-391.

Tomasson, G. G. and W. K. Melville (1992): Geostrophic adjustment in a channel: nonlinear and dispersive effects, J. Fluid Mech., Vol. 241, pp. 23-57.

Wallace, B. C. and D. L. Wilkinson (1988): Run-up of internal waves on a gentle slope in a two-layered system, J. Fluid Mech., Vol. 191, pp. 419-442.