

CIP 法と FEM の組み合わせによる遡上波の 新計算法に関する基礎的検討

石川 忠 晴*・工藤健太郎**・中村 恭 志***・荻 籠 泰 彦****

津波・高潮等の水際境界の移動を伴う流体運動問題に対して, CIP 法と有限要素法を組み合わせた新しい計算法を検討した。この手法によれば, 定型格子を用いながら, 内挿関数により水際位置を追跡しつつ運動方程式を解くことができるので, 水際線の形状が複雑化する場合でも容易に取り扱える可能性がある。本論文では, 検討の第一段階として, この手法を一様斜面の遡上波に対して適用し, Carrier・Greenspan の理論解と比較した。その結果, 比較的大きな空間刻みの定型要素であっても水際位置を正確に追跡でき, また流れ場全体も精度良く計算できることがわかった。

1. はじめに

河川の洪水や津波・高潮などによる氾濫解析を行うには, 水際境界の移動を適切に追跡しつつ流れ場を解析する流体運動モデルが必要とされる。

現在の所, 水際位置の追跡方法は大きく分けて 2 つある。一つは, 計算領域を予め定型の格子で分割し, 水際位置を格子点に一致するよう離散的に移動させながら水域内の運動を解析する方法(岡, 1992; 磯部・藤城, 1997 など), いま一つは水際線をラグランジュ的に追跡して, 時間ステップ毎に要素を再分割する方法(Okamoto ら, 1992; 有川・磯部, 2000 など)である。しかし, 前者の方法では水際位置の運動が不連続的である。また後者の方法では要素再分割の負荷が大きく, スキームによっては 2 次元問題に拡張しにくい場合もある。

そこで本研究では, CIP 法と有限要素法を組み合わせることによって, 定型要素を用いながら内挿関数によって水際位置を正確に追跡する事により運動方程式を解く方法を検討した。本論文では, その基礎的段階として一次元の遡上問題に対して定式化を行い, 計算精度を検討した。

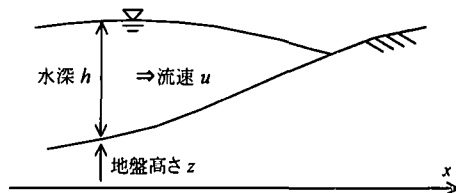


図-1 座標系

ここに, h は水深, u は流速, z は地盤高さ, g は重力加速度である(図-1)。

Time Splitting 法により式(1)(2)を移流項とそれ以外の項に分割すると, 以下の式を得る。

$$\frac{\tilde{h}-h^n}{\Delta t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\tilde{u}-u^n}{\Delta t} + g \frac{\partial(h+z)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{h^{n+1}-\tilde{h}}{\Delta t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{u^{n+1}-\tilde{u}}{\Delta t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

本研究では, 式(3)(4)を有限要素法(ガラーキン法)で, 式(5)(6)を CIP 法で定式化し, これを交互に解くことにより水位・流速の時間発展を解く。この計算を行うにあたって, 水深 h , 流速 u , 地盤高さ z の値とその微係数が連続な三次関数で内挿する。すなわち, ある要素内 ($x_i \leq x \leq x_{i+1}$), ある時間内 ($0 \leq t \leq \Delta t$) における h , u および z を次のように近似する。

$$h = \sum_{j=1}^4 (H_j^n + \tau \Delta H_j) \phi_j(\xi) \quad (7)$$

$$u = \sum_{j=1}^4 (U_j^n + \tau \Delta U_j) \phi_j(\xi) \quad (8)$$

$$z = \sum_{j=1}^4 Z_j \phi_j(\xi) \quad (9)$$

ここで, $\xi = (x - x_i) / \Delta x$, $\tau = t / \Delta t$ である。 ϕ_j は次に示す三次関数である。

2. 計算法

(1) 基礎方程式

一次元浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial(h+z)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

* フェロー 工 博 東京工業大学大学院総合理工学研究科環境理工学創造専攻

** 学生会員 修(工) 東京工業大学大学院総合理工学研究科環境理工学創造専攻

日本学術振興会特別研究員

*** 博(理) 東京工業大学講師大学院総合理工学研究科環境理工学創造専攻

**** 東京大学大学院新領域創成科学研究科環境学専攻

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\xi) &= 1 - \xi^2(3 - 2\xi) \\ \phi_2(\xi) &= \xi(1 - \xi)^2 \\ \phi_3(\xi) &= \xi^2(3 - 2\xi) \\ \phi_4(\xi) &= -\xi^2(1 - \xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

この形状関数に対応する H_j , U_j および Z_j は、つぎの通りである。

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= h_i, H_2 = \Delta x \cdot \partial_x h_i \\ H_3 &= h_{i+1}, H_4 = \Delta x \cdot \partial_x h_{i+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= u_i, U_2 = \Delta x \cdot \partial_x u_i \\ U_3 &= u_{i+1}, U_4 = \Delta x \cdot \partial_x u_{i+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= z_i, Z_2 = \Delta x \cdot \partial_x z_i \\ Z_3 &= z_{i+1}, Z_4 = \Delta x \cdot \partial_x z_{i+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 ∂_x は x 軸方向の一階微分である。

(2) 非移流項の有限要素解析

水際を含む要素では、区間 $(x_i \leq x \leq x_s)$ は水で満たされており、区間 $(x_s < x \leq x_{i+1})$ は陸化しているものとする(図-2)。水際位置は水深 h の内挿関数が $h=0$ の線と交わる点として特定でき、その位置は後述する移流項の解析において移動する。従って、非移流項を解く場合には水際位置は移動しない。有限要素法における重み付き積分は区間 $(x_i \leq x \leq x_s)$ 、すなわち $h > 0$ となる区間に対して実行する。

以上を踏まえ、水で満たされている区間に対して、式

(3) (4) の各項に式 (10) の関数 ϕ_i を用いて重み付き積分を行うと、次式を得る。

$$\int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \frac{\partial h}{\partial t} \cdot \tau \phi_i dx dt = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^4 \Delta H_j \int_0^{\xi_s} \phi_i \phi_j d\xi \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta x} h \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \tau \phi_i dx dt &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 H_j^n U_k^n \int_0^{\xi_s} \phi_i \phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} d\xi \\ &+ \frac{\Delta t}{3} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \Delta H_j U_k^n \int_0^{\xi_s} \phi_i \phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} d\xi \\ &+ \frac{\Delta t}{3} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 H_j^n \Delta U_k \int_0^{\xi_s} \phi_i \phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} d\xi \\ &+ \frac{\Delta t}{4} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \Delta H_j \Delta U_k \int_0^{\xi_s} \phi_i \phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} d\xi \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \tau \phi_i dx dt = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^4 \Delta U_j \int_0^{\xi_s} \phi_i \phi_j d\xi \dots\dots\dots (16)$$

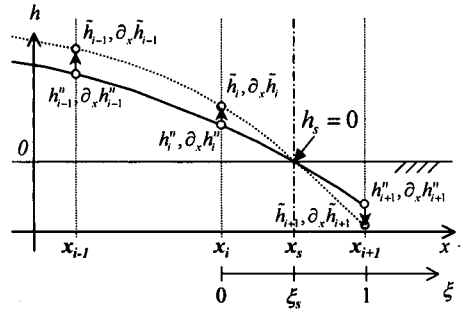
$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta x} g \frac{\partial(h+z)}{\partial x} \cdot \tau \phi_i dx dt &= g \Delta t \sum_{j=1}^4 \left(\frac{H_j^n}{2} + \frac{Z_j}{2} + \frac{\Delta H}{3} \right) \int_0^{\xi_s} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} d\xi \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

ここで、

$$P_{ij}(\xi_s) = C_{ij0}(\xi_s) + \frac{2\Delta t}{3\Delta x} \sum_{k=1}^4 C_{ijk}(\xi_s) \cdot U_k^n \dots\dots\dots (18)$$

$$Q_{ij}(\xi_s) = \frac{2\Delta t}{3\Delta x} \sum_{k=1}^4 C_{ijk}(\xi_s) \cdot H_k^n \dots\dots\dots (19)$$

(a) 非移流項：有限要素法



(b) 移流項：CIP法

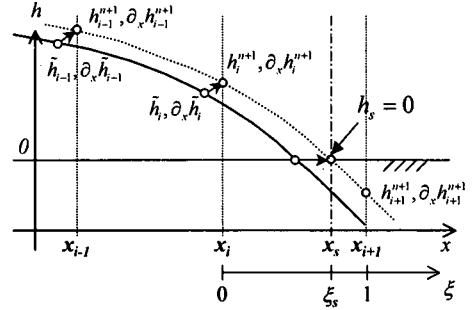


図-2 Time-splitting 法による計算方法 (水深 h の場合)

$$R_{ij}(\xi_s) = \frac{2g\Delta t}{3\Delta x} \sum_{k=1}^4 C_{i0j}(\xi_s) \dots\dots\dots (20)$$

$$S_{ij}(\xi_s) = C_{ij0}(\xi_s) \dots\dots\dots (21)$$

$$\alpha_i = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 C_{ijk}(\xi_s) \cdot \left(H_j^n U_k^n + \frac{\Delta H_j \Delta U_k}{2} \right) \dots\dots\dots (22)$$

$$\beta_i = -\frac{g\Delta t}{\Delta x} \sum_{j=1}^4 C_{i0j}(\xi_s) \cdot (H_j^n + Z_j) \dots\dots\dots (23)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{ij0}(\xi_s) &= \int_0^{\xi_s} \phi_i \phi_j d\xi \\ C_{i0j}(\xi_s) &= \int_0^{\xi_s} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} d\xi \\ C_{ijk}(\xi_s) &= \int_0^{\xi_s} \phi_i \phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

とすれば、要素方程式は次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & Q_{11} & Q_{12} & P_{13} & P_{14} & Q_{13} & Q_{14} \\ P_{21} & P_{22} & Q_{21} & Q_{22} & P_{23} & P_{24} & Q_{23} & Q_{24} \\ R_{11} & R_{12} & S_{11} & S_{12} & R_{13} & R_{14} & S_{13} & S_{14} \\ R_{21} & R_{22} & S_{21} & S_{22} & R_{23} & R_{24} & S_{23} & S_{24} \\ P_{31} & P_{32} & Q_{31} & Q_{32} & P_{33} & P_{34} & Q_{33} & Q_{34} \\ P_{41} & P_{42} & Q_{41} & Q_{42} & P_{43} & P_{44} & Q_{43} & Q_{44} \\ R_{31} & R_{32} & S_{31} & S_{32} & R_{33} & R_{34} & S_{33} & S_{34} \\ R_{41} & R_{42} & S_{41} & S_{42} & R_{43} & R_{44} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta H_3 \\ \Delta H_4 \\ \Delta U_3 \\ \Delta U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (25)$$

完全に水で満たされている要素では、式 (24) におい

て $\xi_s=1$ とすればよい。この要素マトリクスを計算領域全体に対して重ね合わせ、沖側および水際の境界条件を加えれば、計算領域全体の h, u の変化量 $\Delta h, \Delta u$ に対するマトリクスを得られる。本研究では、境界条件式として次式を用い、これを全体マトリクスに組み込んだ。

$$(\text{沖側}) \quad \Delta H_1 = \Delta h_{\text{given}} \dots\dots\dots (26)$$

$$(\text{水際}) \quad \sum_{j=1}^4 \Delta H_j \phi_j(\xi_s) = 0 \dots\dots\dots (27)$$

以上の方法を用い、式 (25) の右辺の係数 a_i における非線形項 $\Delta H_j \Delta U_k$ を逐次更新しながら収束計算を行うことで式 (3) (4) の解 $\tilde{h}, \tilde{u}$ を求めた。

(3) CIP 法による移流項の解析

Yabe・Aoki (1991) によれば、移流方程式 (5) (6) は、さらに2つのフェイズに分割できる。

$$(\text{移流フェイズ}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\partial_x h)}{\partial t} + u \frac{\partial(\partial_x h)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\partial_x u)}{\partial t} + u \frac{\partial(\partial_x u)}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \dots\dots\dots (28)$$

$$(\text{非移流フェイズ}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\partial_x h)}{\partial t} = -\partial_x u \cdot \partial_x h \\ \frac{\partial(\partial_x u)}{\partial t} = -\partial_x u \cdot \partial_x u \end{array} \right. \dots\dots\dots (29)$$

Yabe・Aoki の方法に従い式 (28), (29) を展開した後、式 (10) の関数を用いて書き直すと、次式を得る。

$$\begin{aligned} (\text{移流フェイズ}) \quad & \left\{ \begin{array}{l} h_i^{n+1} = \sum_j \tilde{H}_j \phi_j(\xi) \\ \partial_x h_i^* = \frac{1}{\Delta x} \cdot \sum_j \tilde{H}_j \frac{\partial \phi_j(\xi)}{\partial \xi} \\ u_i^{n+1} = \sum_j \tilde{U}_j \phi_j(\xi) \\ \partial_x u_i^* = \frac{1}{\Delta x} \cdot \sum_j \tilde{U}_j \frac{\partial \phi_j(\xi)}{\partial \xi} \end{array} \right. \dots\dots\dots (30) \\ (\text{非移流フェイズ}) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \partial_x h_i^{n+1} = \partial_x h_i^* - \Delta t \cdot \partial_x u_i^* \cdot \partial_x h_i^* \\ \partial_x u_i^{n+1} = \partial_x u_i^* - \Delta t \cdot \partial_x u_i^* \cdot \partial_x u_i^* \end{array} \right. \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

ただし、

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = -\tilde{u}_i \Delta t / \Delta x, \quad i_{\text{up}} = \begin{cases} i+1 & \text{if } \tilde{u}_i \geq 0, \\ i-1 & \text{if } \tilde{u}_i < 0 \end{cases} \\ \tilde{H}_1 = \tilde{h}_i, \quad \tilde{H}_2 = \Delta x \cdot \partial_x \tilde{h}_i, \\ \tilde{H}_3 = \tilde{h}_{i_{\text{up}}}, \quad \tilde{H}_4 = \Delta x \cdot \partial_x \tilde{h}_{i_{\text{up}}}, \\ \tilde{U}_1 = \tilde{u}_i, \quad \tilde{U}_2 = \Delta x \cdot \partial_x \tilde{u}_i, \\ \tilde{U}_3 = \tilde{u}_{i_{\text{up}}}, \quad \tilde{U}_4 = \Delta x \cdot \partial_x \tilde{u}_{i_{\text{up}}} \end{array} \right.$$

前述の通り、CIP 法により移流項の計算を行うと同時に水際の位置も移動する。その移動速度すなわち水際の流速 u_s は、非移流項の解析結果における流速を水際位置

に対して内挿する事で求めることが出来る。移流項の計算は、非移流項の計算を実施した領域 (重みつき積分を行った区間) についてのみなされるから、次の時間ステップの計算に使用する水際外側の格子点の h, u およびその微係数を外挿により求める必要がある。外挿関数は、水際位置 ($x=x_s$) で $h=0$ 、内側の格子点で h と $\partial_x h$ が指定された値になるという三つの条件を満たす必要がある (u の場合も同様)。そこで本研究では、この条件を満たす二次関数を用いて外側の格子点での値と微係数を求めた。すなわち、

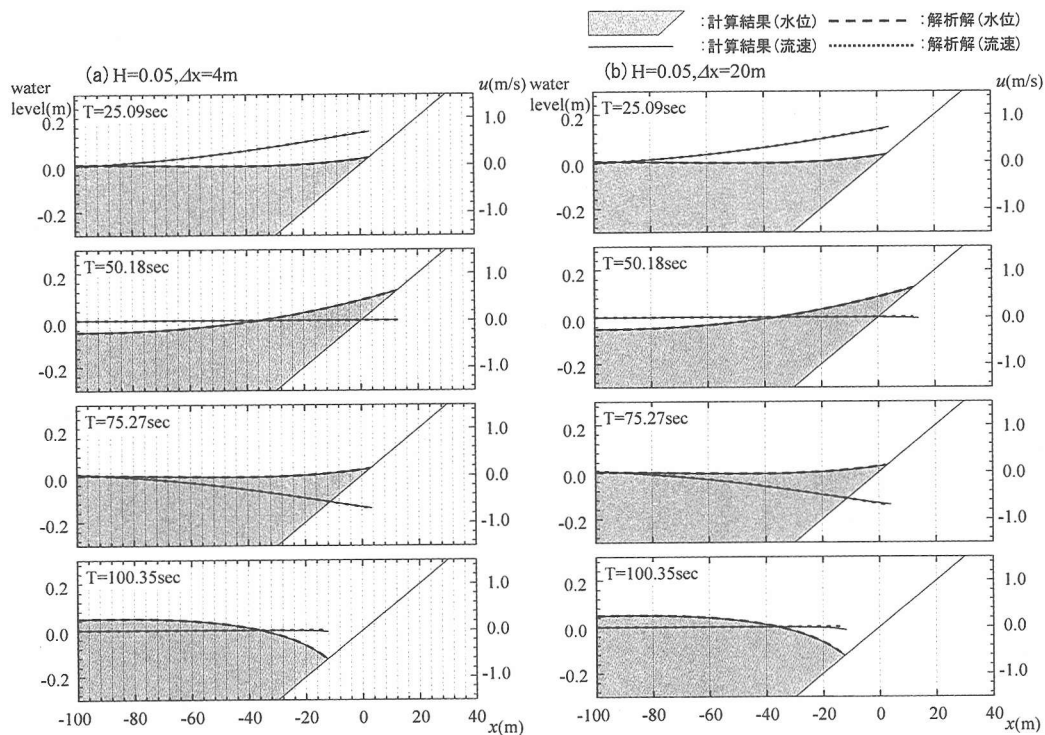
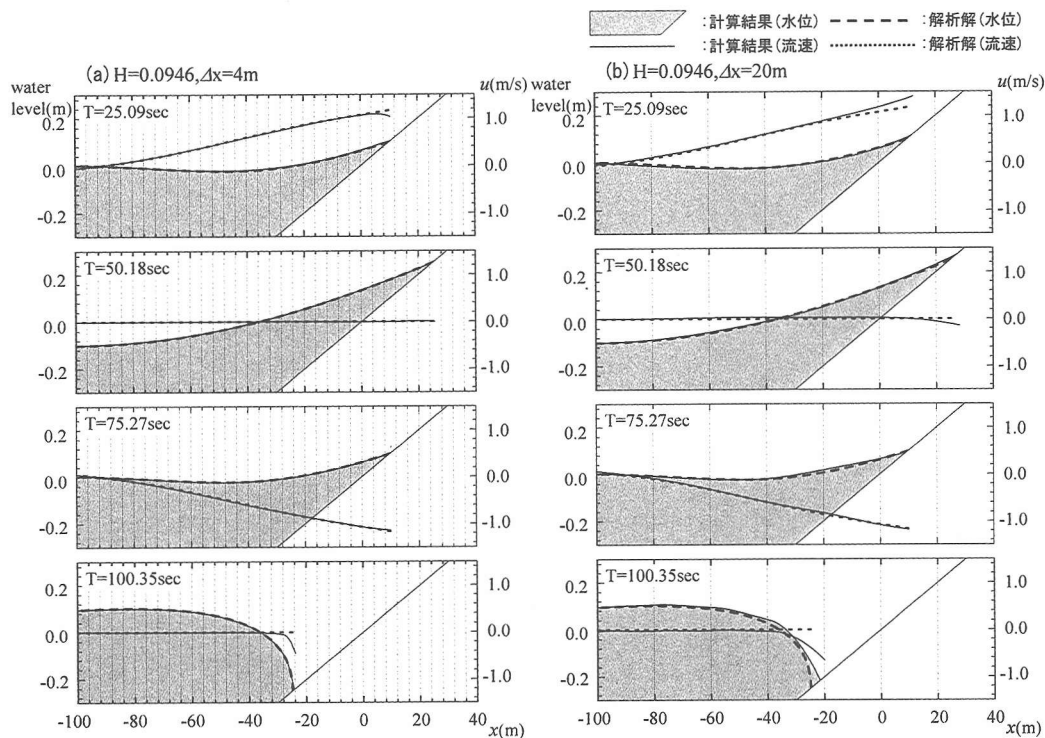
$$\left. \begin{aligned} h_{i+1}^{n+1} &= h_i^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_s^2}\right) + \Delta x \partial_x h_i^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_s}\right) \\ \partial_x h_{i+1}^{n+1} &= -h_i^{n+1} \cdot \frac{2}{\xi_s^2 \Delta x} + \partial_x h_i^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{2}{\xi_s}\right) \\ u_{i+1}^{n+1} &= u_i^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_s^2}\right) + \Delta x \partial_x u_i^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_s}\right) + \tilde{u}_s \cdot \frac{1}{\xi_s^2} \\ \partial_x u_{i+1}^{n+1} &= (\tilde{u}_s - u_i^{n+1}) \cdot \frac{2}{\xi_s^2 \Delta x} + \partial_x u_i^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{2}{\xi_s}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

3. モデルの検証

非線形長波方程式による、非砕波条件における一様斜面上での遡上の解析解は Carrier・Greenspan (1958) により求められている。そこで、本研究の計算モデルの精度を検証するために、一様斜面に対して波を入射させ、その計算結果と解析解とを比較した。計算条件は、斜面勾配 1:100、波の周期 $T=100.35$ s とし、初期水面形は計算領域全体で流速 $u=0$ となる場合の解析解を与え、時間刻み Δt は安定性を考慮して 0.2509 s とした。境界条件は、沖側境界において解析解より求めた波高 H を与えた。

Carrier・Greenspan が示している bore の生じない条件を本計算の形状に適用すると、沖側波高で 0.0946 m となる。そこで、波高 $H=0.05$ m および 0.0946 m、空間刻み $\Delta x=4$ m および 20 m の合計 4 ケースについて計算を行い、水位と流速について Carrier・Greenspan の解析解と比較した (図-3, 図-4)。

$H=0.05$ m のケースでは (図-3(a)(b))、 Δx を変化させても解析解と計算結果はほぼ一致しているが、波の前面の勾配が最もきつくなる位相 ($T=100.35$ s) において、水際先端の流速にわずかな誤差がみられる。一方、 $H=0.0946$ m のケース (図-4(a)(b)) では、 $\Delta x=4$ m の場合には全体的に良い一致が見られるが、 $\Delta x=20$ m の場合には $T=100.35$ s における水際付近の水位・流速の誤差がより顕著になっている。この誤差は、水際外側の値を二次関数で単純に外挿することに起因していると考えられ、この外挿方法についてはまだ改良の余地があると思われる。

図-3 水位と流速の空間分布 ($H=0.05\text{ m}$ のケース)図-4 水位と流速の空間分布 ($H=0.0946\text{ m}$ のケース)

4. 結 論

本研究では, 定型要素内を三次関数で内挿し, CIP 法と有限要素法の組み合わせによって水際境界が移動する場合の1次元浅水長波方程式を解く方法を提案した。一樣斜面に対してこの方法を適用し, Carrier・Greenspanの解析解と比較したところ, 定型要素であっても水際位置を正確に追跡でき, また流れ場全体も精度良く解析できることが分かった。ラグランジュ的に格子を変形させる従来の水際追跡法では, 二次元問題で水際線形状が複雑になった場合の格子設定に困難を生じることがあったが, 定型格子を用いる本手法では, その問題を克服できる可能性がある。ただし, 水際外側の格子点値の外挿方法については, さらに工夫する必要があると考えられる。

参 考 文 献

- 有川太郎・磯部雅彦 (2000): 非線形緩勾配方程式を用いた碎波・遡上計算モデルの開発, 海岸工学論文集, 第47巻, pp. 186-190.
- 磯部雅彦・藤城 透 (1997): ベンガル湾奥における高潮遡上計算, 海岸工学論文集, 第44巻, pp. 346-350.
- 岡 太郎 (1992): ガラーキン・反復型有限要素法による洪水氾濫解析, 水工学論文集, 第36巻, pp. 331-336.
- Carrier, G. F. and H. P. Greenspan (1958): Water waves of finite amplitude on a sloping beach, J. Fluid. Mech., Vol. 4, pp. 97-109.
- Okamoto, T., M. Kawahara, N. Ioki and H. Nagaoka (1992): Two-dimensional wave run-up analysis by selective lumping finite element method, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 14, pp. 1219-1243.
- Yabe, T. and T. Aoki (1991): A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation, Comp. Phys. Commun., Vol. 66, pp. 219-232.