

Boussinesq 方程式と非線形長波方程式を結合した 砕波・遡上の数値モデルの開発

関 克 己*・水 口 優**

近年砕波を対象とした数値波動方程式モデルが開発されているが、その多くは重複もしくは平面波浪場に素直に適用することは困難である。本研究では、局所的な物理量を用い、個々波の定義を不要とする砕波モデルを提案する。基本方程式として Boussinesq 方程式を採用し、その分散項を局所鉛直加速度を用いてコントロールして連続的に非線形長波方程式に接続するというものである。ついで遡上境界を組み込み、孤立波および単一波群の実験結果と比較する。特に単一波群のケースにおいては砕波帯内の長周期波の挙動についても詳細に検討を行う。さらに重複波浪場への適用を試みる。

1. はじめに

砕波帯内および砕波帯近傍に建造される海岸構造物の設計および安定性の議論を行うに当たり、重要な物理現象として非線形性および砕波が挙げられる。近年のコンピュータの高性能化に伴い、非線形性まで取り扱い可能な方程式系、さらに砕波をも計算可能なさまざまな数値モデルが開発されてきている。しかしその多くが個々波（平面計算においては波向き）を定義する必要があり（Boussinesq 方程式を対象としたものでは例えば片山・佐藤, 1993, Madsen ら, 1997）、多方向不規則波浪場の計算に対しては、砕波判定・パラメータの決定方法等に任意性・不確定性が残る。

また、最近の研究により浅海域から極浅海域にかけて長周期波の重要性が指摘されてきており、砕波を扱う数値モデルに対しても、長周期波の挙動を精度良く見積もることが求められる。岡安ら (1996) は surface-roller モデルを組み込んだ Boussinesq 方程式に汀線移動境界を設けて、砕波帯内の長周期波の挙動について不規則波の実験結果と比較して妥当な結果を与えているが、個々波の砕波については解析を行っていない。

本研究では、非線形性および砕波、さらに長周期オーダの計算を広範囲な条件のもとで精度よく行うための数値波動方程式モデルの開発を目的とする。また、砕波帯内の長周期現象（特に反射）を扱うためには遡上（汀線移動）境界を採用する必要があるため、既存の遡上モデルと結合することにより、長周期オーダまで含めた数値実験を試みる。さらに既往の砕波モデルでは取り扱いが困難であった重複波浪場の数値実験を行う。

2. 砕波モデルの提案

本研究において想定する砕波モデルは、個々波の定義を不要とするものである。つまり各時間ステップにおいて計算される局所的な物理量のみを用いて砕波状況を計算するものである。浅海域の波動を精度良く計算可能な

Boussinesq 方程式は弱非線形仮定の下に導出される方程式系であり、砕波直前の非線形性の強い場合には適用できない。一方砕波直前および砕波後の強非線形の状態を shock 面として (Bore モデルと同等の) エネルギー減衰を伴いながら計算可能な方程式として非線形長波方程式がある (Whitham, 1974)。2 つの方程式系には分散項の有無の違いしかなく、本研究で提案する砕波モデルは、2 つの方程式系を接続するものである。現実の流体の波動運動も非線形項と分散項の適当なバランスの間で生じていると考えられる。Boussinesq 方程式と非線形長波方程式とを接続するモデルは既往の研究においても使われているが (Watson ら, 1994)、本研究ではある地点において切り替えるのではなく、分散項の寄与をコントロールしながら空間的にも時間的にも連続的かつ自動的に接続するモデルを開発する。

(1) 支配方程式

先に示したように本研究で提案する砕波モデルは Boussinesq 方程式を基本方程式として、分散項を局所パラメータでコントロールするものである。支配方程式を断面 1 次元で示すと以下ようになる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = F \left\{ \frac{h}{3} \frac{\partial}{\partial t} \left(h \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{dh}{dx} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで η : 水面変動, P : x 方向線流量, D : 全水深, h : 静水深, g : 重力加速度である。また F は 0~1 の重み関数であり、0 で非線形長波方程式, 1 で Boussinesq 方程式と一致する。

(2) 重み関数のパラメータと砕波条件

式 (2) に用いる重み関数 F のパラメータとしては、分散項が局所鉛直加速度の影響による補正項の役割を持つことから、本研究では（水表面での）局所鉛直加速度を用いる。局所鉛直加速度 a_z の計算は連続式より鉛直流速を求め、時間に関して後退差分により計算する。

* 学生会員 工修 中央大学大学院理工学研究科土木工学専攻
** 正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科

$$a_z \equiv \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \dots\dots\dots (3)$$

本研究では、数値計算スキームに Adams-Bashforth-Moulton の予測子修正子法を用いる。また、以下全ての計算において計算格子は $\Delta x = 1 \text{ cm}$ 、 $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ とする。

砕波条件について Boussinesq 方程式を用いて検討を行う。まず孤立波に関して検討を行うが、その方法は一樣勾配斜面 (1/50) に波を入射させて、各時間の空間波形と孤立波の砕波条件とで比較する。なおここでは遡上モデルを組み込まないで一樣勾配斜面終了後に一樣水深部を設ける。

図-1 に $t=8\sim 10 \text{ s}$ における空間波形と局所鉛直加速度の空間分布を示す。また図-2 に各時間における空間波形より読み取った波高 (ここでは $\eta_{\max}$) および $\eta_{\max}$ の地点における水深とで求めた波高水深比と局所鉛直加速度の関係をプロットしたものを示す。図から砕波限界 $H/h=0.83$ と局所鉛直加速度の絶対値が重力加速度を超える点と対応していることがわかる。

同様に規則波についても空間波形に対してゼロダウncross法により定義した個々波諸量と局所鉛直加速度の関係を調べた結果を合田の砕波指標と比較すると、孤立波の場合と同様に砕波条件を満たす個々波は局所鉛直加速度が重力加速度を越える点と対応していた。

孤立波と規則波による検討から、本モデルにおいては

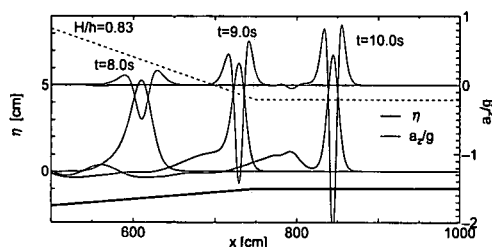


図-1 空間波形 (下段) と局所鉛直加速度 (上段)

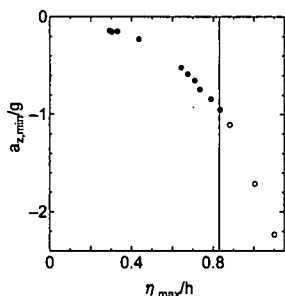


図-2 孤立波の砕波限界と局所鉛直加速度 (白ぬきは重力加速度を越えた点)

砕波条件を局所鉛直加速度の絶対値が重力加速度と一致することとし、 $|a_z| > g$ の地点においては $F=0$ として非線形長波方程式とする。重み関数 F の形状は本モデルにおいては第一次近似として a_z の線形関数として以下の式のように定義する。

$$F(a_z) = \begin{cases} 1 - |a_z|/g & 0 < |a_z| < 1 \\ 0 & |a_z| > 1 \end{cases} \dots\dots\dots (4)$$

(3) 砕波モデルの妥当性の検討

式 (4) を組み込んで孤立波の砕波の様子を計算する。水槽形状は $h_1 = 10 \text{ cm}$ 、 $h_2 = 1 \text{ cm}$ とし、一樣勾配斜面 ($s = 1/50$) で接続する。造波波高は 2 cm である。また計算中は時間に関して 100 ステップに 1 回の割合で η および P に対して平滑化を行う。

各時間における空間波形および重み関数の空間分布を図-3 に示す。孤立波が浅水変形し、shock 面を形成した砕波後は $H/h=0.83$ に沿って減衰していることが再現されていることから、本モデルの妥当性が確認できる。重み関数については shock 面近傍において 0 となり非線形長波方程式と接続している様子が伺える。

3. 遡上モデルとの結合

既存の遡上モデルを大きく分けると、ポラリス領域を用いるものと汀線位置での流速を外挿により求め移動させるものがある。本研究で提案する砕波モデルは図-3 に見られるように shock 面を有する波形となるため、空間的に値を外挿すると計算に不安定が生ずる可能性がある。そこで本研究においては Madsen ら (1997) によるポラリス領域を用いるモデルを採用することにする。

(1) 遡上モデルの概要

Madsen ら (1997) による遡上モデルは斜面上において全水深 D を間隙率 γ を用いて定義することにより、汀線より岸側において全水深が 0 となるのを避けるものである。これにより微小の水深を設け、波を汀線より岸側へと透過させ、静水深と水面変動との交点を各時間における汀線とするものである。砕波モデルと結合した形で支配方程式を示すと以下ようになる。

$$\alpha \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

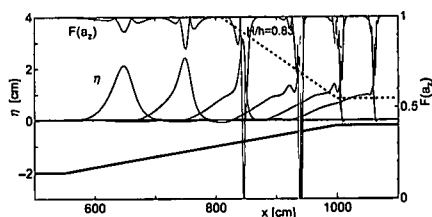


図-3 空間波形と重み関数

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P^2}{A} \right) + gA \frac{\partial \eta}{\partial x} = F(a_x) \left\{ \frac{h}{3} \frac{\partial}{\partial t} \left(h \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{dh}{dx} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$$A(x, t) = \int_{-h_0}^{\eta(x, t)} \gamma(z) dz \dots\dots\dots (7)$$

$$\alpha(x, t) = \gamma(\eta) \dots\dots\dots (8)$$

$$\gamma(z) = \begin{cases} 1 & -h(x) \leq z \\ \varepsilon + (1-\varepsilon) \exp \left(-\beta \frac{z+h(x)}{h_0-h(x)} \right) & -h_0 \leq z \leq -h(x) \end{cases} \dots\dots\dots (9)$$

ここで ε, β は間隙率を支配する定数, h_0 は基準となる水深であり, 今回の計算においては一様水深部の水深とする。

ε および β は A を支配する定数であり, Madsen ら, (1997) は非砕波の場合について非線形長波方程式の理論解と比較することにより, $(\varepsilon, \beta) = (0.01, 100)$ という値を使用している。本研究においては以下に示す孤立波による計算結果から $(0.01, 50)$ という値を採用する。なお岸側の境界条件はポーラス領域を十分に長く取ったあとに完全反射の条件としている。

(2) 孤立波の砕波・遡上の計算結果

本モデルの定量的な評価のために, ここではまず一様水深 15 cm, 斜面勾配 1/20 とした場合の孤立波の計算を行う。波高については非砕波から砕波のケース含めて 7 ケース行う。図-4 に非砕波のケース ($H=1$ cm) を, 図-5 に砕波のケース ($H=7.5$ cm) の計算結果を示す。なお x 座標の原点は斜面法先位置とし, 岸向きを正とする。

非砕波のケースにおいては shock 面が形成されず, 孤立波の斜面による反射が再現されている。反射した波の波高が小さく, 負の水面変動を伴うが Synolakis (1987) の実験結果も同様の傾向を示しており, 孤立波の遡上が再現されていることが確かめられた。

砕波のケースでは $x=1.8 \sim 2.2$ m の間で砕波条件を満たし shock 面が形成されていることがわかる。反射波については砕波に伴うエネルギー逸散により波高が減衰し, 反射率にして 0.2 程度となっている。

次に打ち上げ高に関して Synolakis (1987) の実験と比較する。非砕波の場合は半解析的に, 砕波する場合は実験データより孤立波の最大打ち上げ高 $R_{\max}$ の算定式を提案している。

$$\text{非砕波} \quad \frac{R_{\max}}{h} = 2.831 s^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{H}{h} \right)^{\frac{5}{4}} \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{砕波} \quad \frac{R_{\max}}{h} = 0.918 \left(\frac{H}{h} \right)^{0.606} \dots\dots\dots (11)$$

式 (10)・(11) と今回の計算結果との比較を図-6 に示す。

ここで H は造波波高とした。全体的に Synolakis (1987) の提案式に比べて小さい値となっている。非砕波・砕波の定性的な傾向は妥当な結果となっている。

4. 単一波群の砕波・遡上実験との比較

これまでは基本波の砕波に着目した検討であったが, 以下では基本波の挙動のみならず長周期波も含めた砕波・遡上モデルの検討を行う。ここでは比較対象としての単一波群の砕波・遡上実験によるデータを用いる。

(1) 実験概要

実験はピストン型造波機を有する断面水槽に斜面勾配 1/20 の斜面 (一様水深 15 cm, 斜面法先造波板より 9.7 m) を設置して行った。計測は水面変動 6 点, 流速 2 点および遡上計を用い, サンプルング周波数 100 Hz で行った。

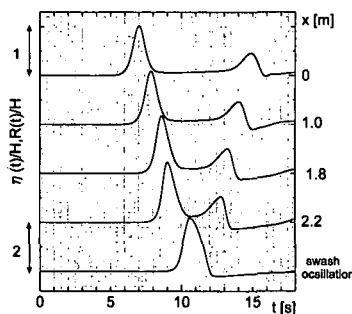


図-4 孤立波の砕波・遡上 (非砕波)

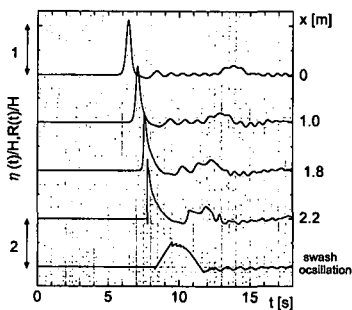


図-5 孤立波の砕波・遡上 (砕波)

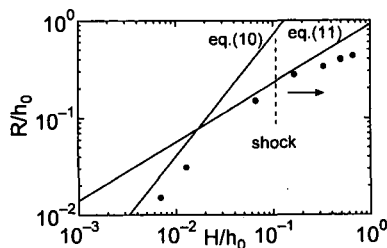


図-6 孤立波の打ち上げ高

ここでは基本波を1次オーダのクノイド波とし、造波に伴い発生する自由長周期波を抑える造波方法のケースについて取り扱うことにする。造波波群諸量は、基本波の最大振幅 $A_{\max}=1.5$ cm, 基本波周期 $T=1.4$ s, 波群中の波の数 $N_w=8$ である。実験の詳細およびデータ解析結果については関ら (2001) に詳しい。

(2) 水面変動時系列レベルでの比較

まずは水面変動時系列での比較を行う。図-7に実験結果および計算結果を示す。実験では砕波点は $2.3\text{ m} < x < 3.1\text{ m}$ の間に存在した。砕波点以沖で計算結果の方が多少大きくなっているのは実験データが水槽底面および壁面の摩擦による減衰を受けているためである。

砕波点以岸では計算結果は shock 面を形成し、波高減衰している様子が再現されている。ただし, shock 面近傍にスパイクノイズ的な変動が発生していることがわかる。その結果として砕波帯内の波高および打ち上げ高の振幅が見かけ上大きくなってしまふ。特に砕波帯内の計算結果を個々波解析などする際には何らかの方法でノイズをカットするような手順が必要となると思われる。

(3) 長周期波オーダの比較

続いて長周期波オーダの比較を行う。長周期成分は得られた水面変動データに対して数値ローパスフィルターを施すことにより抽出する。図-8に実験結果と計算結果の比較を示すが遡上波形も含めて精度良く実験結果を再現していることがわかる。

ここで岡安ら (1996) と同様に砕波点の変動に伴い発生する自由長周期波について検討を行う。そこで数値計算結果を各地点において水面変動および水平流速の値を用いて疑似非線形長波理論に基づいて入反分離を行った結果を図-9に示す。 $x=2.3\text{ m}$ の岸向き成分には拘束長周期波に対応する負の水面変動が存在するが砕波点以岸の $x=3.1\text{ m}$ においては拘束波分の水面変動がキャンセルされていることから、砕波点の変動に伴い正の水面変動を持つ長周期波が岸向きに発生していることがわか

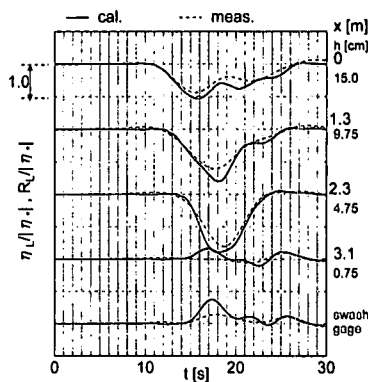


図-8 長周期波の時系列の比較
($|\eta^*|$ は拘束長周期波理論解)

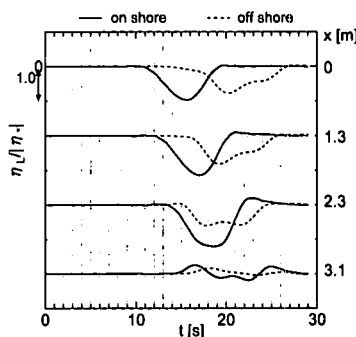


図-9 斜面上の岸向き・沖向き長周期波 (計算)

る。同様に沖向き成分に着目すると、 $x=3.1\text{ m}$ では汀線で反射する岸向き成分がほとんど存在しないために沖向き成分はほぼ0であるが、 $x=1.3, 2.3\text{ m}$ では岸向きの拘束波とほぼ同程度の負の水面変動を持つ沖向き成分が発生していることがわかる。つまり、砕波点の変動に伴い拘束波と同程度の振幅を持つ自由波が岸向きには正の水面変動、沖向きには負の水面変動として発生することが確認できる。これは関ら (2001) と同様の結論である。

5. 重複波浪場への適用

本砕波モデルの一般性を示すために、この章では重複波浪場への応用を試みる。ここでは両端より造波した孤立波の衝突について数値実験を行う。

図-10に一樣水深 (10 cm) において波高 5 cm の孤立波を衝突させた場合の計算結果を示す。衝突し水面変動が最大となる時間における重み関数 F の値も合わせて示す。図からわかるように、一樣水深の場合では衝突した瞬間においても $F=0.5$ 程度、つまり局所鉛直加速度が重力加速度に対して半分となり、砕波しない (shock 面を形成しない) ことがわかる。

次に、図-11(a)~(c)に示すように一樣勾配斜面を水

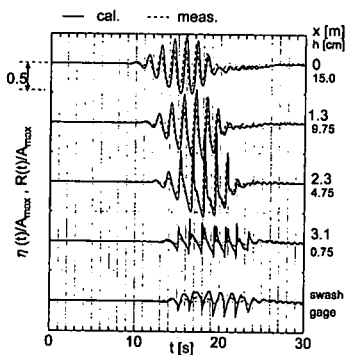
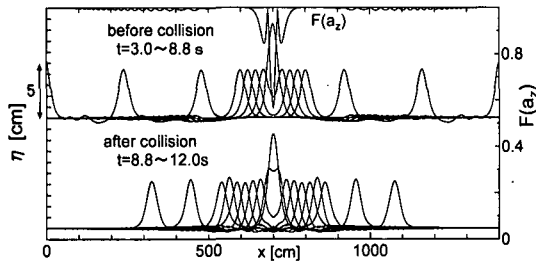
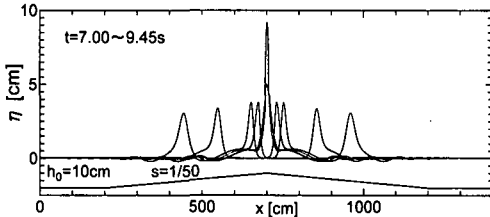


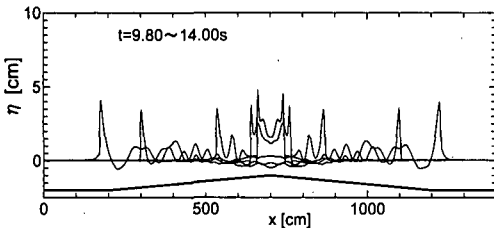
図-7 単一波群の砕波・遡上



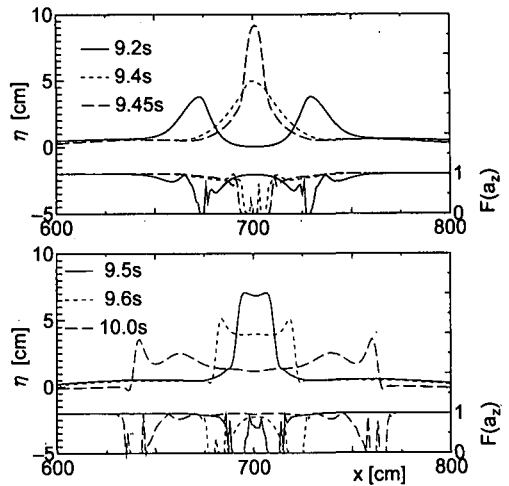
図一10 孤立波の衝突 (一様水深)



図一11(a) 孤立波の衝突前～衝突 (斜面有り)



図一11(b) 孤立波の衝突後 (斜面有り)



図一11(c) 衝突中の空間波形と重み関数

ii) 遡上モデルと結合することにより孤立波および単一波群の砕波・遡上変形を長周期波の挙動を含めて精度良く再現可能である。

iii) 特別に仮定を必要とせず重複波浪場への拡張が可能である。

今後の課題としては、式(4)の関数形の検討、shock面近傍に発生するスパイクノイズ状の変動の緩和方法、さらに平面波浪場への拡張が挙げられる。

参考文献

- 岡安章夫・上野慎一郎・鈴木康之 (1996): 砕波帯内長周期波の特性と数値波動モデルの適用性の検討, 海岸工学論文集, 第43巻, pp. 176-180.
- 片山裕之・佐藤慎司 (1993): Boussinesq 方程式を用いた不規則波の浅水・砕波変形の計算法, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 16-20.
- 関 克己・寛田博章・水口 優 (2001): 長周期波を考慮した波群性入射波の遡上の実験とモデル化, 海岸工学論文集, 第48巻, pp. 276-280.
- Madsen, P. A., O. R. Sørensen and H. A. Schäffer (1997): Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq type model. Part I: Model description and cross-shore motion of regular waves, Coastal Eng., Vol. 32, pp. 255-287.
- Synolakis, C. E. (1987): The runup of solitary waves, J. Fluid Mech., Vol. 185, pp. 523-545.
- Watson, G., T. C. D. Barnes and D. H. Peregrine (1994): The generation of low-frequency waves by a single wave group incident on a beach, Proc. 24th ICCE, ASCE, pp. 776-790.
- Whitham G. B. (1974): LINEAR AND NONLINEAR WAVES, John Wiley & Sons, Inc. 636 p.

6. おわりに

本研究では新たな砕波モデルを提案し、その有効性について調べてきた。以下に得られた結論をまとめる。

i) Boussinesq 方程式と非線形長波方程式とを連続的に接続する砕波モデルを開発し、既存の砕波指標と比較して妥当な結果を得た。