

MPS 法による砕波解析のための自由水面境界条件の改良

後藤 仁志*・五十里洋行**・八木 哲生***・酒井 哲郎****

粒子法は、水塊分裂を伴う激しい水理現象に対して柔軟かつ安定した解を得るために有効な手法であり、この利点を生かして、近年、砕波・越波に対する適用性の検討が進んでいる。巻き波型砕波では、ジェットが発生・着水・分裂、飛沫の発生といった水塊分裂現象が支配的であり、水塊分裂（液滴の生成）過程では、表面張力の影響が重要となる。そこで、粒子法における標準的表面張力モデルである体積力型のモデルを、砕波・越波過程に適用する際の問題点を検討し、その改良案として、粒子数密度の偏りを考慮した水面判定の高精度化の方法を提案する。

1. 緒 言

砕波・遡上域を Navier-Stokes 式に基づいて解析する手法の発展は、近年、目覚ましいものがあるが、この種の解析において鍵を握るのは自由表面の取り扱いである。多くの商用コードにも適用されて実績の豊富な VOF 法の他にも、密度関数法、GAL 法（二瓶・灘岡, 2000）などの計算格子を用いる方法、さらには、SPH (Gingold・Monaghan, 1982)、MPS 法 (Koshizuka・Oka, 1996) といった粒子法（グリッドレス解析）が提案・改良され、より激しい水塊分裂の存在下での解析に道が拓かれつつある。

諸手法の中でも、粒子法は計算格子に依存しないことから、移流慣性項の離散化に伴う数値拡散に煩わされることがなく、飛沫の発生など複雑かつ活発な水塊分裂・再合体にも柔軟な対応が可能である。粒子法の砕波の数値解析への適用は端緒に着いたばかりであり、一様勾配斜面を対象にした MPS 法による計算 (Koshizuka ら, 1998; 後藤ら, 1998)、SPH による急勾配斜面の遡上過程の計算 (Monaghan・Kos, 1999)、直立壁前面の砕波とその後の飛沫の発生過程の計算 (Gotoh・Sakai, 1999; 後藤ら, 2003a) などが行われているに過ぎない。

一般に水理学上の対象となるのは重力波である（表面張力が支配的となるのは波長数 cm 以下の領域に限定される）ので、表面張力が考慮されることは稀であり、従来の粒子法による波浪変形解析においても表面張力の影響は考慮されてこなかった。しかし、粒子径（通常規模の計算を一般的なパーソナルコンピュータで実施する場合、1.0 cm 程度）スケールの凹凸に対しては、表面張力が無視できない。ところで、粒子法では、計算点が相互に他を排斥しあって一定の数密度で分布することにより、所定の空間解像度を維持しつつ計算を実行している。つまり、計算点配置を維持するには粒子スケールの揺らぎが不可避であり、その結果、水面付近にも粒子スケー

ル程度の揺らぎが生じて、局所的な水面の突起が出現する。このことが、局所的かつ小頻度ではあるが、水面からの粒子の飛び出しの発生へと繋がり、水面の挙動に精度上必ずしも充分ではない点を生じさせていた。なお、この影響が限定的なものであり、表面張力項の導入を行わなくても、重力波レベルの水面変動および越波量等への定量面の再現性には問題がないことは、確認されているが（後藤ら, 2003a）、水面擾乱の抑制には表面張力項の導入が一定の効果を示すものと期待できる。

さらに、砕波過程では、ジェットの発生を伴うことも少なくないが、薄かつ曲率が大きい水脈の先端部における水塊分裂の発生（いわゆるジェットブレイクアップ）においては、表面張力が支配的となり、気液界面を正確に記述するためには、表面張力の影響は無視できない。粒子法における表面張力モデルとしては、粒子数密度から表面曲率を推定し、表面張力を体積力に換算して、水面粒子に与える方法が、Nomura ら (2001) により提案されている。そこで、本研究では、Nomura らの体積力型の表面張力モデルを海岸工学で対象とする砕波・遡上問題に適用する場合の問題点を考察して、その改善策を提案し、直立堤の越波過程を例に、改良型の表面張力モデルの妥当性を検討する。

2. MPS 法の概要と表面張力モデル

(1) MPS 法の概要

MPS 法 (Koshizuka・Oka, 1996) では、計算領域に配置された多数の粒子（計算点）間の相互作用として基礎式の各項が離散化されるため、計算格子が不要である。まず、均一で質量が変化しない粒子を用い、粒子数を一定に保つことで、質量保存（連続式）は厳密に満足され、粒子数密度（単位体積あたりの粒子数）を一定値 n_0 に保つことにより、非圧縮条件が満足される。

一方、運動方程式 (Navier-Stokes 式)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} + \frac{\sigma \kappa}{\rho} \mathbf{n} \cdots (1)$$

($\mathbf{u}$: 流速ベクトル, p : 圧力, ρ : 流体の密度, $\mathbf{g}$: 重力加速度ベクトル, ν : 渦動粘性係数, σ : 表面張力係数, κ :

* 正会員 工博 京都大学助教授 工学研究科都市環境工学専攻
** 学生会員 京都大学大学院 工学研究科土木工学専攻
*** 正会員 工修 国土交通省
**** フェロー 工博 京都大学教授 工学研究科都市環境工学専攻

表面曲率, δ : デルタ関数, $\mathbf{n}$: 法線方向の単位ベクトル) については, 粒子周囲の影響円内の他の粒子との相互作用を通じて離散化される(越塚, 1997). 移流項は粒子移動の追跡を通じて計算されるため, 移流項の差分化に起因する数値拡散が生じない.

粒子 i の圧力項 (gradient) および粘性項 (Laplacian) は,

$$-\frac{1}{\rho} \langle \nabla p \rangle_i = -\frac{1}{\rho} \frac{D_0}{n_0} \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{p_j - p_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{w}(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \right\} \quad (2)$$

$$\nu \langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i = \frac{2\nu D_0}{n_0 \lambda} \sum_{j \neq i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \mathbf{w}(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (3)$$

のように, 粒子周囲の影響円内の他の粒子との相互作用としてモデル化される (D_0 : 次元数, λ : モデル定数). 粒子間相互作用が生じる範囲 (影響円) は, 重み関数

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & \text{for } r \leq r_e \\ 0 & \text{for } r > r_e \end{cases} \quad (4)$$

により規定される (Koshizuka・Oka, 1996). また, 粒子数密度は重み関数を用いて

$$n_i = \sum_{j \neq i} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (5)$$

と定義される. なお, MPS 法の詳細に関しては, 越塚 (1997) による解説が有用である.

(2) 表面張力モデル

MPS 法では, 粒子数密度の条件式

$$n_i < \beta n_0 \quad (6)$$

を満足する粒子を自由表面粒子と判定し, 圧力 $p=0$ を与える (Koshizuka・Oka, 1996). Nomura ら (2001) の表面張力モデルでは, 条件式 (6) を満たす粒子に対して, 以下の手順で表面張力を計算する.

図-1 に示すように, 式 (6) を満たす自由表面粒子を中心に検索円 (半径 r_e^{st}) を描く. 流体の存在する領域内には粒子が等数密度で配置されているから, 検索円内には存在する粒子の個数を数えれば, 検索円内の流体の占有体積を計算できることとなり, 流体が検索円内の 1 箇所に集まっているとすれば, 占有体積から水面の曲率が推定できる. 曲率は,

$$\theta = \frac{n_i^{st2}}{n_0^{st1}} \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{2 \cos \theta}{r_e^{st}} \quad (8)$$

と書ける. ここに, n_i^{st2} : 検索円内の粒子個数 (表層粒子中最も表面にある粒子以外の粒子については厳密な定義を後述), n_0^{st1} : 水面が平面であるとき (曲率ゼロ) の際の検索円内粒子個数である. ここでは Nomura らに従い, $r_e^{st} = 3.1 l_0$ とした (l_0 : 初期配列における隣接粒子間

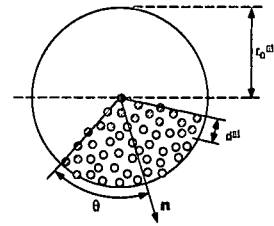


図-1 表面張力モデル

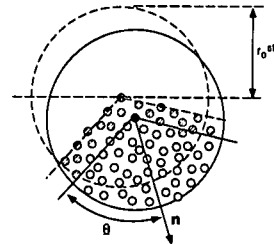


図-2 外側粒子の影響排除

距離, 粒子径 d_0 に一致).

検索円内の粒子個数 n_i^{st1} は, 階段関数型の重み関数 w^{st1} を用いて以下のように書ける.

$$n_i^{st1} = \sum_{j \neq i} w^{st1}(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (9)$$

$$w^{st1}(r) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < r \leq r_e^{st} \\ 0 & \text{for } r > r_e^{st} \end{cases} \quad (10)$$

表層粒子中で最も表面にある粒子については, 以上で検索円内の粒子個数が算定できるが, それ以外の表層粒子については, 当該粒子より外側の粒子の影響を排除する修正が必要となる (図-2 参照). この点を考慮すると, 検索円内の粒子個数 n_i^{st2} は, 階段関数型の重み関数 w^{st2} を用いて以下のように書ける.

$$n_i^{st2} = \sum_{j \neq i} w^{st2}(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (11)$$

$$w^{st2}(r) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < r \leq r_e^{st} \text{ and } n_j^{st1} > n_i^{st1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

表面張力は, 水面の法線方向に作用する. 水面が等数密度面であることから, 粒子数密度 (検索円内粒子数; 式 (9)) の勾配を基準に, 法線方向の単位ベクトルは,

$$\mathbf{a}_i = \frac{n_i^{stx} - n_i^{stx}}{2 l_0} \mathbf{n}_x + \frac{n_i^{sty} - n_i^{sty}}{2 l_0} \mathbf{n}_y \quad (13)$$

$$\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{|\mathbf{a}_i|} \quad (14)$$

と書ける. 式中では, 当該粒子の周囲 4 点の粒子数密度を $n_i^{stx}(\mathbf{r}_i \pm l_0 \mathbf{n}_x)$, $n_i^{sty}(\mathbf{r}_i \pm l_0 \mathbf{n}_y)$ と表現している.

図-1に示したように、MPS法の水表面は、厚さ d^{st} を有しているため、以上の方法で算定された表面張力を d^{st}/l_0 で除して規格化する必要がある。水表面厚さ d^{st} は、水面判定条件式(6)のパラメータ β に依存し、Nomura らによると、 $\beta=0.97$ に対して、 $d^{st}=1.55 l_0$ とされている。

3. 自由表面粒子判定の改良

(1) 自由水面境界条件の修正

標準型 MPS 法では、式(6)で水面を判定し、自由水面と判定された粒子の全てに表面張力を作用させる。すなわち、式(1)の δ 関数として、

$$\delta_0 = \begin{cases} 1 & \text{for } n_i < \beta n_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (15)$$

を用いる。標準型 MPS 法の条件で、直立堤の越波過程(後藤ら, 2003a)を対象に計算を実施し、個々の瞬間像について、水面粒子(式(15)で $\delta_0=1$)と流体粒子を区別して表示したのが、図-3である。水面は、粒子径の3~5倍程度の厚さを呈し、水面粒子(図中には濃色で表示)が水中に及ぶ領域が散見される(以下では、この場合を『標準型』と呼ぶ)。

MPS 法において、この境界条件は2つの役割を担っている。第1は、文字通りの水面における力学的境界条件である。標準的 MPS 法コードを用いた計算で条件式(6)による水面判定を行うと、水面は粒子径の数倍の厚さの層となり、この層中に存在する粒子において圧力 $p=0$ が課されることとなる。境界条件の第2の役割は、圧力の初期化(ゼロに設定する)操作である。MPS 法では、粒子数密度を全領域で一定に保つことにより非圧縮条件を満足しているため、粒子が偏ることによって粒子数密度が局所的に低下した領域が生じると、その領域内にある粒子の圧力の初期化を行って、その領域に粒子を引き込む操作が必要となる。つまり、MPS 法では、水面と水中の両方で圧力 $p=0$ となる場合があるが、水面での圧力 $p=0$ は力学的境界条件としての物理的な意味を持つものに対して、水中での圧力 $p=0$ は粒子数密度の制御という計算手続上の意味を担っている。水面での圧力 $p=0$ は、粒子が水面に留まる限り、持続的に課されるが、水中での圧力 $p=0$ は、数密度変動によって間欠的に成立する条件であって、特定の水粒子が持続的に圧力 $p=0$ を課されることはない。何れにせよ、式(15)の判定法では、水中の粒子上で圧力 $p=0$ が成立する場合にも表面張力が課されることとなるため、水面付近粒子のみを抽出するため、以下に示す修正を行った。

図-4に示すように、正方形セル(辺長 d^{st})を対象粒子を取り囲むように配置する。はじめに対象粒子を取り

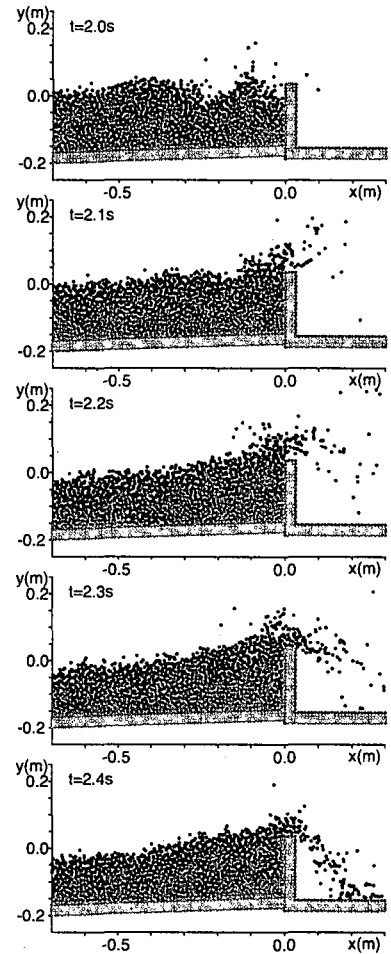


図-3 標準型 MPS 法のシミュレーション結果 ($\delta = \delta_0$ の場合)

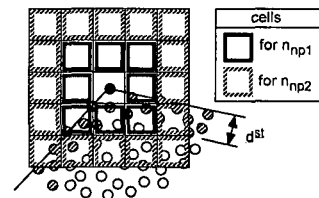
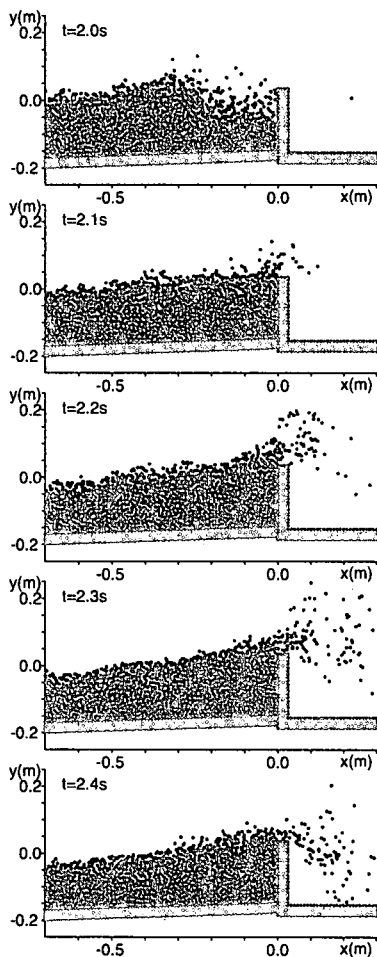


図-4 粒子偏在化指標の導入

囲む8個のセルに注目し、8個のセルの中で1個以上の粒子を含むセルが7セル以下のとき、対象粒子を水面粒子とする ($\delta = \delta_0 \delta_1$)。以上を数式で表現すると、

$$w_{pc}(i_x, i_y, x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{for } \left(d^{st} i_x < x_j \leq d^{st}(i_x+1) \right) \\ & \text{and} \\ & \left(d^{st} i_y < y_j \leq d^{st}(i_y+1) \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$



図一五 越波過程のシミュレーション結果 ($\delta = \delta_0 \delta_1$ の場合)

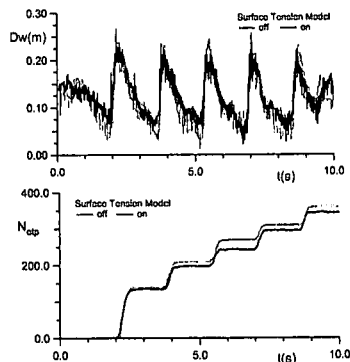
$$n_p(i_x, i_y) = \min(\sum_j w_{pc}(i_x, i_y, x_j, y_j), 1) \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$n_{np1} = \sum_{(k,l) \in \{(0,0)\}} n_p(i_x+k, i_y+l) \quad k, l \in \{-1, 0, 1\} \dots\dots\dots (18)$$

$$\delta_1 = \begin{cases} 0 & \text{for } n_{np1} \geq 8 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \dots\dots\dots (19)$$

となる (以下では、『補助セル8型』と呼ぶ)。

直立堤の越波過程に対する補助セル8型の場合の結果を図一五に示す。標準型(図一三)の場合と比較すると、補助セルを導入した本論文の判定法で、水面付近の粒子の効果的な抽出が可能となっていることが分かる。水面粒子層は粒子径の1~2倍程度の厚さに制限されており、目標通りのコントロールがなされていることが分かる。水面の概形、碎波・越波のタイミングなど、現象の概略には、標準型・補助セル8型で共通した傾向が認められるが、越波後の水脈の挙動には相違が見られる。表面張力の作用域が水面付近の薄い層に限定される補助セル8型の場合が飛沫の飛散範囲が最も広がっており ($t=2.3$



図一六 表面張力の影響

s), 越波時の沖側への跳ね返り ($t=2.3$ s) に直立堤より沖側で見られる孤立粒子) が抑制されている。このような飛沫特性は、水理実験の際のビデオ画像の示す特性と概ね一致する。飛沫(液滴)の生成過程であるジェットブレイクアップには表面張力が支配的であるので、飛沫特性の再現には、表面張力の作用を適正な領域で考慮することが重要であると考えられる。

パーソナルコンピュータベースの数値造波水槽では、粒径1 cm程度が解像度の限界であるので、粒径の数倍の厚さの水面となると表面張力の作用域が厚さ数 cm に及ぶこととなる。この問題に対応するため、できる限り粒径程度の幅(体積力換算するのでこれ以下には設定できない)に表面張力の作用域を限定する必要があり、標準型 MPS 法の粒子数密度のレベルのみによる基準(δ_0)に加えて、粒子数密度の空間的偏在性指標(δ_1)を導入する必要がある。

次に、表面張力の作用による越波量への影響に関して、表面張力モデルを導入しない場合と補助セル8型の表面張力モデルを導入した場合を比較した結果を図一六に示す。上の図は、直立堤前面の水位変動を、下の図は越波柵内に流入した水量(累積越波量)を示している。直立堤前面水位については、表面張力の作用によって、僅かながらピーク付近での水位変動が小さくなっており、累積越波量も表面張力を考慮した場合に、考慮しない場合と比較して5%程度減少する傾向を示している。

(2) 飛沫粒子の区別

MPS法の計算を実行する上では、表面張力の作用対象となる粒子が適正に判別できれば充分であるが、計算結果のCGを作成するポストプロセッシング(後藤ら, 2003b)に際しては、水面粒子と飛沫粒子で大きく表相が異なる。このことに配慮して、さらに条件を加えて、先の8個のセルの外周を成す16個のセルに注目し、相互に隣接する5個のセルが成す集合を N_{np2} と定義する(N_{np2} の要素数は16である)。集合 N_{np2} の要素(各要素は5個)

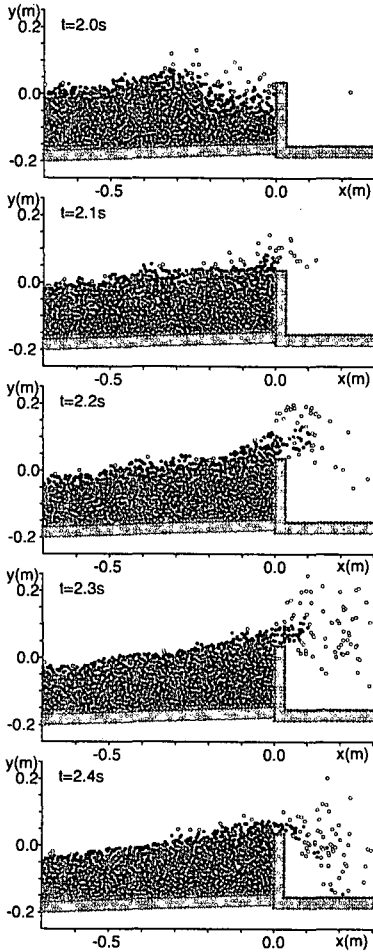


図-7 越波過程のシミュレーション結果 ($\delta = \delta_0 \delta_2$ の場合)

の何れかが、4セル以上で少なくとも1個以上の粒子を含むとき、 $2 \leq n_{np1} < 8$ の粒子についても水表面粒子から除外する ($\delta = \delta_0 \delta_2$ ；以下では、『補助セル24型』と呼ぶ)。

$$n_{np2} = \sum_{N_{np2}} n_p(i_x + k, i_y + l) \quad (k, l) \in N_{np2} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\delta_2 = \begin{cases} 1 & \text{for } \left(\begin{array}{l} n_{np1} \leq 7 \\ \text{and} \\ (n_{np1} \geq 2 \text{ and } n_{np2} < 4) \end{array} \right) \dots\dots\dots (21) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

補助セル24型の場合の結果を図-7に示す。補助セル24型の判定は、補助セル8型の条件で抽出された粒子から飛沫粒子を抽出するために適用され、補助セル8型で抽出された全ての粒子に表面張力が課されているので、図-7と図-5の粒子分布は完全に同じである。補助セル24型で抽出された粒子を白色の円で示したが、ビデオ画

像から判断できる飛沫の存在域との対応はほぼ良好であり、ポストプロセッシングの骨格データとして有効であることが確認できた。

4. 結 語

本稿では、Nomuraらの体積力型の表面張力モデルを海岸工学で対象とする砕波・遡上問題に適用する場合の問題点を考察して、その改善策として、粒子数密度の偏在性を補助指標とする方法を提案した。直立堤の越波過程を対象に、改良型の表面張力モデルの妥当性を検討し、補助セルの導入による粒子数密度の局所的な偏在性を指標とする方法が粒子径程度の厚さの水面検出に有効であることを示した。

さらに越波量に関して表面張力の導入の有無による相違を検討したが、表面張力の導入による影響は限定的なものであり、越波量推定を対象とするなら表面張力を考慮しないモデルでも対応可能である。一方、飛沫の飛散範囲に関しては、表面張力モデルの相違による明確な相違が確認された。砕波表情など、現象のディテールを問題にする場合には、表面張力の適正な記述が重要である。

参 考 文 献

- 越塚誠一 (1997): 数値流体力学, インテリジェントエンジニアリングシリーズ, 培風館, p. 223.
- 後藤仁志・酒井哲郎・沖 和哉・芝原知樹 (1998): 粒子法による巻き波型砕波を伴う斜面遡上過程の数値シミュレーション, 海岸工学論文集, 第45巻, pp. 181-185.
- 後藤仁志・林 稔・目見田 哲・酒井哲郎 (2003a): 粒子法による直立堤前面砕波の数値シミュレーション, 土木学会論文集, 第726号/II-62, pp. 87-98.
- 後藤仁志・橋本麻未・五十里洋行・酒井哲郎 (2003b): 砕波表情表現のための粒子法ポストプロセッシングの提案, 海岸工学論文集, 第50巻 (投稿中).
- 二瓶泰雄・瀬岡和夫 (2000): GALモデルに基づく移動境界流れ解析法の構築とその応用, 土木学会論文集, No. 642/II-50, pp. 19-30.
- Gingold, R. A. and Monaghan, J. J. (1982): Kernel Estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics, J. Comput. Phys., Vol. 46, pp. 429-453.
- Gotoh, H. and Sakai, T. (1999): Lagrangian simulation of breaking waves using particle method, Coastal Eng. Jour., Vol. 41, Nos. 3 & 4, pp. 303-326.
- Koshizuka, S. and Oka, Y. (1996): Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, Nuclear Science and Engineering, Vol. 123, pp. 421-434.
- Koshizuka, S., Nobe, A. and Oka, Y. (1998): Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method, Int. J. Numer. Mech. Fluids, Vol. 26, pp. 751-769.
- Monaghan, J. J. and Kos, A. (1999): Solitary waves on a cretan beach, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, Vol. 125, pp. 145-154.
- Nomura, K., Koshizuka, S., Oka, Y. and Obata, H. (2001): Numerical Analysis of Droplet Breakup Behavior using Particle Method, Jour. Nucl. Sci. and Tech., Vol. 38, No. 12, pp. 1057-1064.