

Level set 法を用いた安定化有限要素法による 自由表面流れの数値解析

桜庭 雅明*・檜山 和男**

本論文は、複雑な地形形状を有する自由表面流れの数値解析を安定かつ高精度に行うことを目的として、非構造格子に対して適用可能となる Level set 法に基づく数値解析手法を提案するものである。具体的には、流れ場の計算には非構造格子に対して適用可能な SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法、自由表面位置の計算には移流方程式の高精度解法である CIP 法に基づく CIVA 法を用いた。また、体積の保存性を向上させるために、体積補正手法を導入した。数値解析例として、二次元の移流問題、水柱崩壊問題、および波浪変形問題を取り上げ、理論解および実験結果等との比較を行い、本手法の有効性を示した。

1. はじめに

近年のコンピュータの飛躍的な性能向上と数値流体力学 (CFD) の飛躍的進歩により、自由表面を有する流れの現象の理解と解明に数値シミュレーションが数多く用いられるようになってきている。自由表面を有する流れの数値解析手法は、非圧縮粘性流体の流れの支配方程式である Navier-Stokes 方程式と連続式を用いる解析が一般的になりつつあり、その手法は大きく二つの方法に分類することができる。一つは固定メッシュを用いて自由表面の運動学的条件を間接的に考慮する Euler 的手法である界面捕捉法 (interface capturing method) であり、もう一つは移動メッシュを用いて自由表面の運動学的条件を直接的に考慮する Lagrange 的手法である界面追跡法 (interface tracking method) である。両者はそれぞれに長所と短所があるが、海岸工学で対象とする自由表面問題の解析においては、砕波等の複雑な自由表面形状を表現することが可能な界面捕捉法が適していると言える。界面捕捉法の代表的な方法としては VOF 法 (Hirt・Nichols, 1981) や Level set 法 (Susman ら, 1994) が挙げられるが、この中でも、Level set 法は高精度な解析手法として期待され、海岸工学の分野にも適用され、その有効性が示されている (例えば由比ら, 1998)。しかしながら、自由表面位置を決定する移流方程式の計算精度、気・液相の体積保存性の問題、および任意地形に対する拡張性に対して問題が残されている。

本論文は、任意の地形形状を有する自由表面流れの数値解析を安定かつ高精度に行うことを目的として、界面捕捉法の代表的な手法である Level set 法による数値解析手法を提案するものである。離散化手法としては、任意形状への適合性に優れかつ高精度な SUPG/PSPG (Streamline Upwind-Petrov Galerkin/Pressure Stabilizing-Petrov Galerkin) 法に基づく安定化有限要素法 (Tezduyar ら, 1992) を用いた。また、自由表面位置

を決定する移流方程式の解法として、三角形要素に対しても CIP 法と同等の高精度な計算が可能である CIVA (Cubic Interpolation Volume/Area Coordinate) 法 (Tanaka, 1999) を用いた。数値解析例として、二次元の移流問題、水柱崩壊問題および波浪変形問題を取りあげ、計算精度について理論解および実験結果等と比較検討を行った。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式と境界条件

本手法の流れ場の解析は、非圧縮性の気液二相流体を考えるものとする。非圧縮粘性流体の基礎方程式は、Navier-Stokes の運動方程式と連続式で表される。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \cdots \cdots (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \cdots \cdots (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \quad \cdots \cdots (3)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad \cdots \cdots (4)$$

ここに、 Ω は解析領域、 $\mathbf{u}$ は流速、 ρ は密度、 $\mathbf{f}$ は物体力、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル、 p は圧力、 μ は粘性係数である。また、Dirichlet 型、Neumann 型境界条件は、次のように与えられる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma_g \quad \cdots \cdots (5)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h} \quad \text{on } \Gamma_h \quad \cdots \cdots (6)$$

ここに、 $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ はそれぞれ流速、トラクションの既知量を示し、 Γ_g , Γ_h は流速、トラクションが既知の境界、 $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトルを示す。

また、本研究では気液界面の位置を表現する方法として界面位置とその周辺距離の関係を表す関数 (Level set 関数) を用いている。Level set 関数は次式に示すような移流方程式で支配される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \phi) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \cdots \cdots (7)$$

ここに、 ϕ は自由表面からの距離を表現する Level set 関

* 正会員 工修 日本工営(株)総合情報技術部
** 正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科

数であり液体であれば正、気体であれば負、自由表面上であれば0となる。なお、Level set 関数は $|\nabla\phi|=1$ となるような等距離関数としての性質を持つ。

(2) 安定化有限要素法

非圧縮粘性流体の基礎方程式に対する空間方向の離散化には、流線風上化法 (SUPG 法) / 圧力安定化法 (PSPG 法) に基づく安定化有限要素法 (Tezduyar ら, 1992) を適用した。基礎方程式 (1), (2) に対する重み付き残差方程式は式 (8) のようになる。左辺第 1～3 項は通常の Galerkin 項, 第 4 項は移流卓越に対して安定化を施す SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) 項および圧力振動を回避するための安定化項である PSPG (Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin) 項, 第 5 項は自由表面の数値不安定性を回避する安定化項である衝撃捕捉 (Shock-Capturing) 項である。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{w}) : \sigma d\Omega + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left\{ \tau_{supg} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} + \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \nabla q \right\} \\ & \cdot \left\{ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \sigma \right\} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{cont} \nabla \cdot \mathbf{w} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma_h} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma \quad \cdots \cdots (8) \end{aligned}$$

ここに、 $\mathbf{w}$, q は流速, 圧力の重み関数, τ_{supg} , τ_{pspg} , τ_{cont} は安定化パラメータである (Guler ら, 1999)。式 (8) に対して、三角形 1 次要素を用いて補間を行うと、次のような有限要素方程式を得る。

$$\begin{aligned} & (M + M_{\delta}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (K(\mathbf{u}) + K_{\delta}(\mathbf{u})) \mathbf{u} \\ & - (C - C_{\delta}) \mathbf{p} + S \mathbf{u} - (N + N_{\delta}) \mathbf{f} = 0 \quad \cdots \cdots (9) \end{aligned}$$

$$C^T \mathbf{u} + M \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + K_{\delta}(\mathbf{u}) \mathbf{u} - N_{\delta} \mathbf{f} + C_{\delta} \mathbf{p} = 0 \quad \cdots \cdots (10)$$

ここに、 M , K , C , S , N は係数行列であり、添字 δ , ε は SUPG 項, PSPG 項に起因するものを表す。時間方向の離散化には、2 次精度を有するクランク・ニコルソン法を用い、有限要素方程式 (9), (10) の解法には Element-by-Element に基づく GMRES 法を用いた。

(3) Level set 法の概要

Level set 法は、界面位置と液相と気相の関係を Level set 関数として表すことにより界面上の不連続点を平滑に捉えることが可能とする方法である。任意の時間における Level set 関数 ϕ から次式に示す近似 Heaviside 関数を用いることにより界面近傍の平滑化を行う。

$$H = 0.5 \max \left[-1.0, \min \left\{ 1.0, \frac{\phi}{D} + \frac{1}{\pi} \sin \left(\frac{\pi \phi}{D} \right) \right\} \right] \quad \cdots \cdots (11)$$

ここに、 H は Heaviside 関数, D は界面から平滑化を行う幅であり、格子幅の 1～5 倍程度の値を用いる。なお、Heaviside 関数を用いることにより気液相の密度と粘性係数は次式のように表すことができる。

$$\rho = 0.5(\rho_{Liq} + \rho_{Gas}) + (\rho_{Liq} - \rho_{Gas})H \quad \cdots \cdots (12)$$

$$\nu = 0.5(\nu_{Liq} + \nu_{Gas}) + (\nu_{Liq} - \nu_{Gas})H \quad \cdots \cdots (13)$$

ここに、添字 Liq および Gas は液相, 気相であることを示す。Level set 法は基礎方程式 (7) を解き、式 (11) により界面の平滑化を行い、密度および粘性係数を求めることにより気液二相流体を時々刻々と表現することが可能である。しかしながら、自由表面形状の変化に伴う液相と気相の流速の変化により Level set 関数の性質 ($|\nabla\phi|=1$) の維持は保証されなくなり、計算精度の低下が懸念される。このため、各時間ステップにおいて、界面の移動の計算を行った後に level set 関数としての性質を回復される必要がある。Level set 関数の性質の回復させるための再初期化手法としては移流方程式で表現される方法 (姫野・渡辺, 1999) を用いるものとする。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{w}_s \cdot (\nabla \phi) = 2H \quad \cdots \cdots (14)$$

$$\mathbf{w}_s = 2H \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad \cdots \cdots (15)$$

ここに、 $\tilde{t}$ は無次元時間を表す。また、流体または気体の体積変化を補正して体積の保存性を高めるために体積補正の計算を行う。体積補正の計算は、以下に示す移流方程式の形により表現できる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{w}_h \cdot (\nabla \phi) = 0 \quad \cdots \cdots (16)$$

$$\mathbf{w}_h = \delta_D \left(1 - \frac{V(t)}{V_{init}} \right) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad \cdots \cdots (17)$$

ここに、 V_{init} , $V(t)$ はそれぞれ液体または気体の初期体積と任意時間ステップの体積, δ_D は近似 Delta 関数であり、 $\partial H / \partial \phi$ で表現することができる関数である。

(4) CIVA 法による Level set 関数の計算手法

自由表面を表現する Level set 関数の基礎方程式および再初期化および体積補正の基礎方程式は、全て移流方程式で記述される。これらの基礎方程式の解析には CIVA (Cubic Interpolation Volume/Area Coordinate) 法 (Tanaka, 1999) を用いた。CIVA 法は、移流方程式に対する高精度解析法である CIP (Cubic Interpolation Pseudo-particle) 法 (Yabe・Aoki, 1991) を三角形要素 (三次元解析の場合は四面体要素) に対して適用が可能になるように、要素内の座標系 (面積座標系) を導入して計算できるように拡張した方法である。具体的な CIVA 法による計算方法は、移流方程式の厳密解である式 (18) を用いて、次の時間ステップの解を求めるために現在の

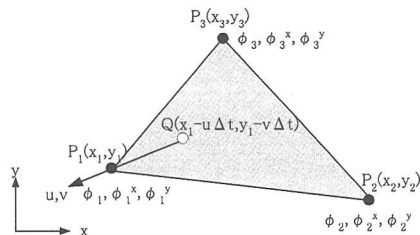


図-1 CIVA法による風上点の評価方法

計算ステップの上流側の値を用いるものとする。図-1に示すように上流側の点に位置する ϕ の値は三角形要素の補間により求める。上流側の要素に対する多項式は式(19)のように面積座標を用いて表現する。

$$\phi^{n+1}(x, t) = \phi^n(x - u\Delta t, t - \Delta t) \dots (18)$$

$$\phi^n(L_1, L_2, L_3)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i + d \sum_{j,k=1}^3 \beta_{jk} [L_j^2 L_k + c L_1 L_2 L_3] \dots (19)$$

ここに、 (L_i) は三角形要素内の面積座標であり、 d は1次補間と3次補間のパラメータで、 $d=0$ のとき1次、 $d=1$ のときは3次補間になる。なお、 c はTanaka(1999)の研究で最適値として示された0.5を用いた。 α_i 、 β_{jk} は係数であり、上流側の三角形要素との節点のLevel set関数とその空間微係数を用いることにより次式のようになる。

$$\alpha_i = \phi_i \dots (20)$$

$$\beta_{jk} = \phi_j - \phi_k + (x_k - x_j) \phi_j^x + (y_k - y_j) \phi_j^y \dots (21)$$

ここに、 ϕ^x 、 ϕ^y はLevel set関数に関する x 、 y 方向の微係数を表す。

CIVA法の解析精度を検証するために、二次元の移流問題の検討を行った。計算条件として、1m×1mの正方形の解析領域に対して水平方向0mの位置で鉛直方向0~0.2mの区間に $\phi=1$ の条件を与えるものとする。流速条件としては、水平方向から30°傾けた流速を与えて $|u|=1$ m/sとなるようにした。有限要素分割として水平・鉛直方向共に40分割(要素総数3200、節点総数1681)として、時間増分量を $\Delta t=1.0 \times 10^{-3}$ とした。また、計算

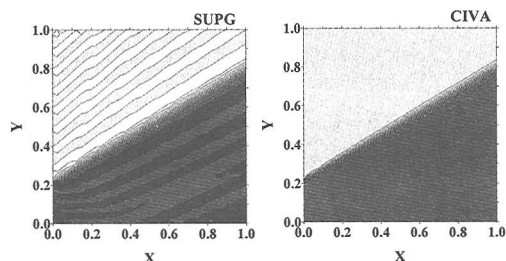


図-2 斜め移流問題における計算結果の比較(1)

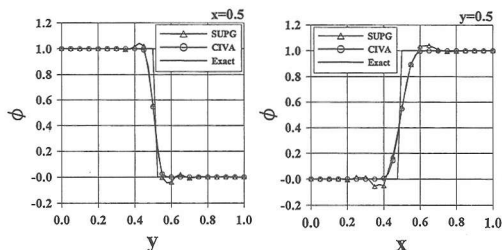


図-3 斜め移流問題における計算結果の比較(2)

結果の比較を行うために流線風上化法(SUPG法)に基づく安定化有限要素法(Brooks・Hughes, 1991)と比較を行った。定常状態に達した際の ϕ の分布を図-2に示す。これより、SUPG法の結果は ϕ が0から1になる境界付近に拡散傾向がみられ、また全体に不安定に振動解を持つ結果となっているが、CIVA法は ϕ の0~1の境界での数値拡散が少なく、また全体に安定した結果が得られている。図-3に中心断面における各手法と厳密解を含めた結果の比較を示す。この結果よりSUPG法はオーバーシュート、アンダーシュートが見られた結果になるが、CIVA法は厳密解により近い値となっている。この結果よりCIVA法は移流問題に対して高精度な計算法であることが確認された。

3. 数値計算例

(1) 水柱崩壊問題の解析

本手法の計算精度を検証するために、水柱崩壊問題の計算を行った。初期条件として水柱幅 $L=14.6$ cm、水柱高さ $2L=29.2$ cmとして水槽の幅 $4L=58.4$ cmの中での水柱の崩壊挙動を考えるものとする。計算に用いた有限要素分割は、水平方向84分割×鉛直方向78分割であり総要素数13104、総節点数6715である。時間増分量は $\Delta t=5.0 \times 10^{-4}$ とし、密度および粘性係数は20°Cにおけ

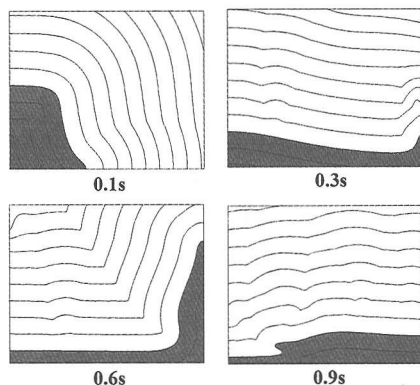


図-4 水柱崩壊問題における水面形状の変化

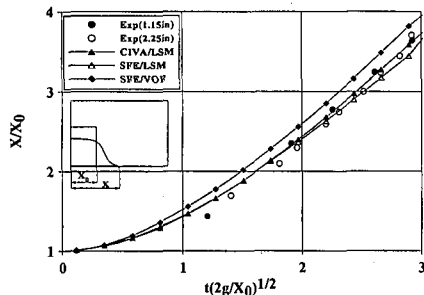


図-5 水柱先端位置の比較

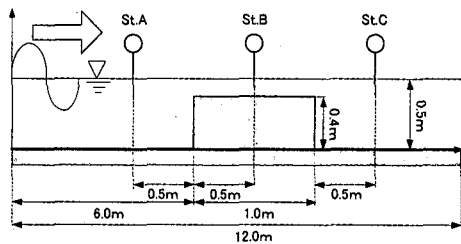


図-7 潜堤と数値水槽の諸元



図-8 潜堤周辺における有限要素分割図

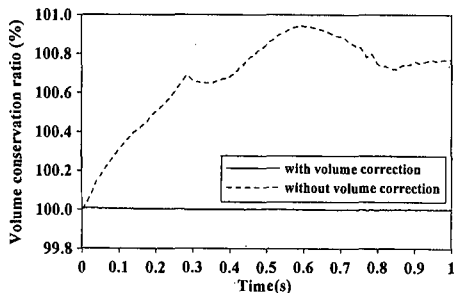


図-6 体積保存率の時系列変化

る水と空気の数値を用いた。図-4に時刻0.1~1.0秒後における水面形状の変化 (Level set 関数値で示したもの)、図-5に、水際線移動の時系列変化を既往の実験結果 (Koshizuka ら, 1994) と流れ場と界面位置の計算に安定化有限要素法を用いた VOF 法 (SFE/VOF) および Level set 法に基づいた手法 (SFE/LSM) と本手法 (CIVA/LSM) の比較を示す。この結果より、本手法が最も実験値に近い値を示している。以上より、本手法は自由表面形状を的確に捉えて実験値とも良い一致を示す計算手法であることが確認できた。また、体積補正手法の妥当性を検討するために、体積補正を行う場合と行わない場合について、計算開始から1秒後までの体積保存率の比較を行った。この結果を図-6に示す。体積補正を行わない場合は、液体体積が増加傾向になっているのに対して、本手法は、殆ど初期の体積を保持したまま計算を行うことが可能になっている。

(2) 波浪変形問題の解析

次に、本手法を波浪変形の問題に対して適用を行った。図-7に示すように長さ12m、水深0.5mの数値水槽に沖から6mの位置に幅1m×高さ0.5mの潜堤を設置することを仮定して、沖側から入射波を与えるものとする。計算に用いた有限要素分割は図-8に示すように自由表面の周辺に対して要素が細くなるような非構造格子を用いるものとして、要素総数36983、節点総数18895である。時間増分量は 1.0×10^{-4} として密度および粘性

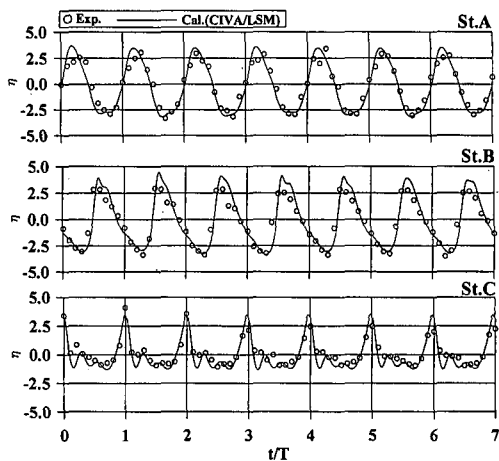


図-9 水面の時間波形 (case 1)

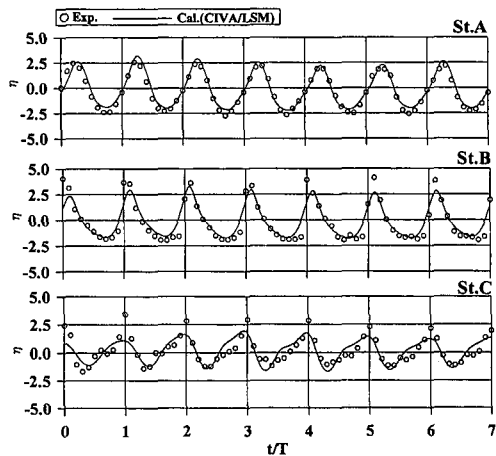
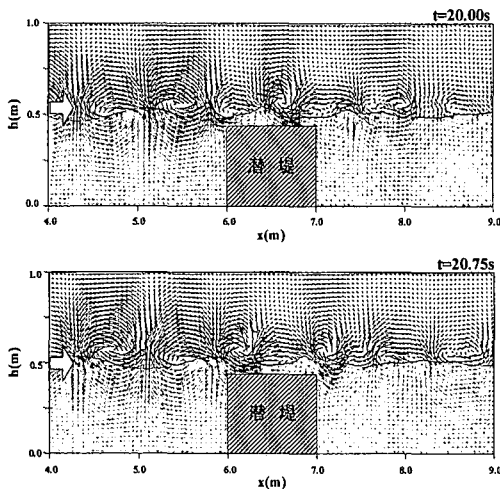


図-10 水面の時間波形 (case 2)



図一11 数値解析結果 (case 2 波高および流速ベクトル)

係数は 20°C における水と空気の数を用いた。沖側境界として3次クノイド波による流速と振幅を与え、岸側にはエネルギー減衰帯を設け、岸側境界には Sommerfeld の放射条件を適用した。また、沖側・岸側を除く境界には slip 条件を与えた。波浪条件は、波高 5.0 cm, 周期 2.0 秒 (case 1) および波高 7.5 cm, 周期 1.0 秒 (case 2) として2ケースの計算を実施した。図-9, 図-10 に各ケースにおける St. A~C での本手法による水位変化の計算結果と滝川らの実験 (1996) の比較を示す。この結果より潜堤の前後においても本手法は実験値と比較的良好一致を示している。また、case 2 の場合における潜堤周辺の $t=20\sim 20.75$ 秒後の水位変化と流速ベクトルを図一11 に示す。この結果より潜堤周辺の水面形を良く表現できていることがわかる。以上より、本手法は波浪変形問題に対しても安定かつ高精度に解析を行えることが確認できた。

4. おわりに

本論文では、自由表面流れを高精度かつ安定に計算を行うことが可能な Level set 法による自由表面流れ解析手法の提案を行った。数値解析例として、二次元移流問題、水柱崩壊問題および波浪変形問題の解析を行い、本解析手法の妥当性および有効性を検討した。その結果、以下の結論が得られた。

- ・ Level set 法に基づく界面捕捉手法に、SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法と CIP 法に基づく

CIVA 法を適用することにより、自由表面流れの計算を高精度にかつ安定に行うことが可能となった。

- ・ 体積補正手法を導入することにより、気・液相の体積を増減させることなく計算を行うことが可能になった。
- ・ 本手法を波浪変形問題に適用した結果、構造物周辺の際波等を含む波浪現象を精度良く捉えられることが分かった。

以上より、本手法は自由表面流れ解析に対して有効な手法であるといえる。今後は、任意の地形形状を有する自由表面問題に対して本手法を適用するとともに、本手法の三次元化を行う予定である。

参考文献

- 滝川清・山田文彦・松本健作 (1995): 潜堤上碎波変形の内部特性とその数値解析, 海岸工学論文集, 第 42 巻, pp. 66-70.
- 姫野武洋・渡辺紀徳 (1999): 微小重力下で気液境界を有する流れの数値解析, 日本機械学会論文集(B編), No. 65/635, pp. 2333-2340.
- 由比正年・石田啓・保智正和 (1998): 界面の大変形を伴う気液二相流体場の数値解析—衝突碎波および上昇気泡解析への適用—, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp. 61-65.
- Brooks, A. N. and T. J. R. Hughes (1991): Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 87, pp. 364-384.
- Guler, I., M. Behr and T. E. Tezduyar (1999): Parallel Finite Element Computation of Free-Surface Flows, Comput. Mechanics, Vol. 23, pp. 117-123.
- Hirt, C. W. and B. D. Nichols (1981): Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries, J. Comp. Phys., Vol. 14, pp. 201-225.
- Koshizuka, S., H. Tamako and Y. Oka (1994): A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation, Comput. Fluid Dynamics J., Vol. 4, No. 1, pp. 29-46.
- Sussman, M., P. Smereca and S. Osher (1994): A Level Set Approach for Computing Solutions for Incompressible Two-Phase Flow, J. of Comput. Physics, Vol. 144, pp. 146-159.
- Tanaka, N. (1999): The CIVA Method for Mesh-Free Approaches: Improvement of the CIP Method for n-Simplex, Comput. Fluid Dynamics J., Vol. 8, No. 1, pp. 121-127.
- Tezduyar, T. E., S. Mittal, S. E. Ray and R. Shih (1992): Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 95, pp. 221-242.
- Yabe, T. and T. Aoki (1991): A universal solver for hyperbolic equation by cubic-polynomial interpolation, Comput. Phys. Commun., Vol. 66, pp. 219-242.