

BEM と VOF を結合した波動場解析

鄢 曙 光*・山城 賢**・吉田明徳***・入 江 功****

沖合から汀線までの広範囲にわたる波動現象を、精度良く、且つ、比較的短時間で解析できる数値モデルの開発を目的に、計算精度に優れ、計算機の記憶容量や計算に要する時間が少ない境界要素法 (BEM) と碎波等の強非線形現象を解析できる VOF 法を結合することを考えた。両手法を結合境界における流速と圧力の連続条件をもとに結合し、基本的なアルゴリズムおよびプログラムを構築して試計算を行った。その結果、現段階では幾つかの問題が残されているものの、結合解析法は進行波だけでなく反射波についても両手法間で伝播可能であり、また、VOF 法のみ計算に比べて格段に計算時間が短縮できることを確認し、その有用性を示した。

1. ま え が き

波動現象を解析する主な数値解析手法として、ポテンシャル理論に基づく波動の支配方程式を、有限要素法、境界要素法、差分法などを用いて解く方法がある (例えば井島・永田, 1979; 滝川・田淵, 1980; 大山・灘岡, 1991)。これらの手法は、後述する Direct Simulation に比べて格段に良い精度で解析することができ、しかも、計算時間と計算機の記憶容量が少なく済むという利点がある。しかし、これらの手法に共通していることは、碎波などの極めて非線形性の強い現象が原理的に再現できないということである。これに対し、非圧縮粘性流体を対象とする Navier-Stokes の運動方程式を差分化し、何等の仮定も導入せず計算領域内の流速と圧力を直接解く方法 (Direct Simulation) が近年発達し、現在も多くの研究がなされている (例えば細山田ら, 1998; 川崎, 1998; (財)沿岸開発技術研究センター, 2001)。しかし、Direct Simulation は領域全体を多数の格子で分割し、その格子に設定した流速や圧力などを時間発展的に求めていくため、膨大な計算時間と記憶容量を必要とする。

一方、水理実験等で実際の現象を観察すると、構造物のごく近傍では急激な波浪変形が生じるものの、構造物からある程度離れると、現象はポテンシャル理論に基づく解析法で十分表現できると思われる場合が多い。このような波動場の現象と解析法の現状をふまえ、本研究では、沖合から汀線までの広範囲にわたる波動現象を、海岸構造物近傍の複雑な波浪変形を含めて、十分再現することができ、且つ、計算時間や記憶容量の面で実用に耐えうる数値解析モデルを開発することを目的に、境界要素法 (以下、BEM と記す) と、Direct Simulation の一手法で、自由表面の解析に実績のある VOF 法 (Nichols ら, 1980) を結合し、両手法の利点を十分に活かした数値解析モデルの開発を試みた。

2. BEM と VOF の概要

(1) BEM

まず、BEM による波動の解析法の概略を示す。図-1 に示すように一定水深 h の海域において沖側および岸側の仮想境界面と水表面および海底面で囲まれる閉領域を考える。流体運動は、非圧縮および非粘性の完全流体による非回転運動とすると、速度ポテンシャル $\phi(x, z, t)$ が存在し、 $\phi(x, z, t)$ は次のラプラスの方程式を満足する。

$$\nabla^2 \phi(x, z, t) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

境界線で囲まれた閉領域に対してグリーンの定理と一定水深の海底面に関する鏡像の原理を適用すると、速度ポテンシャル ϕ に関する次の境界積分方程式を得る。

$$\phi(X_P) = \frac{-1}{\alpha} \int_{\Gamma} \left\{ \phi(X_b) \frac{\partial G(r)}{\partial n} - G(r) \frac{\partial \phi(X_b)}{\partial n} \right\} ds \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 $G(r) = \log r + \log r^*$ 、 r は領域内の点 X_P と境界線上の点 X_b との距離、 r^* は点 X_P と海底面に対する X_b の鏡像点 X_b^* との距離、積分境界 Γ は海底面を除く境界面である。また、 α は X_P が境界線を除く領域内の点であるときは 2π 、境界線上の点であるときは要素の内角 α を取る係数であり、 s は積分の方向、 n は境界線の内向き法線ベクトルである。

数値計算においては、図-1 に示すように、境界上に N 個の節点を配置し、 j と $j+1$ 番目の節点で構成される j 番目の線分要素 (境界要素) $\Delta S_j (j=1, 2, \dots, N)$ において、

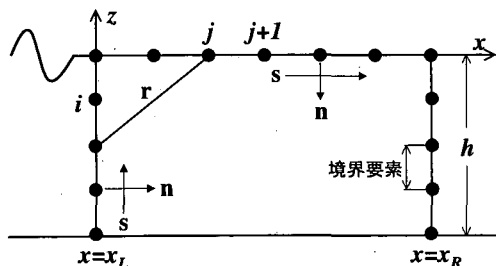


図-1 BEM の計算領域

* 正会員 工 修 九州共立大学 助手 工学部土木工学科
** 正会員 博(工) 九州大学大学院 助手 工学研究院
*** 正会員 工 博 九州大学大学院 助教授 工学研究院
**** 正会員 工 博 九州大学大学院 教授 工学研究院

要素上のポテンシャルとその法線微分を、それぞれ要素の両端におけるポテンシャル ϕ と法線微分 $\phi_n (= \partial\phi/\partial n)$ を用いて線形補間で表す。

$$\left. \begin{aligned} \phi(X_b) &= \left(1 - \frac{s}{\Delta S_j}\right) \phi(j) + \left(\frac{s}{\Delta S_j}\right) \phi(j+1) \\ \phi_n(X_b) &= \left(1 - \frac{s}{\Delta S_j}\right) \phi_n(j) + \left(\frac{s}{\Delta S_j}\right) \phi_n(j+1) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (3)$$

($s: 0 \rightarrow \Delta S_j$)

次いで、境界積分方程式(式(2))を境界要素(式(3))を用いて離散化すると、次の ϕ と ϕ_n に関する連立1次方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^N \{ (\bar{Q}_{ij} - \delta_{ij}) \phi(j) - Q_{ij} \phi_n(j) + \bar{E}_{ij}^* \phi(j+1) \} \\ - E_{ij}^* \phi_n(j+1) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (4)$$

ただし、

$$Q_{ij} = E_{ij} - E_{ij}^*, \quad \bar{Q}_{ij} = \bar{E}_{ij} - \bar{E}_{ij}^*$$

$$E_{ij} = \frac{1}{\alpha_i} \int_{\Delta S_j} (\log r_{ij} + \log r_{ij}^*) ds$$

$$\bar{E}_{ij} = \frac{1}{\alpha_i} \int_{\Delta S_j} \frac{\partial (\log r_{ij} + \log r_{ij}^*)}{\partial n} ds$$

$$E_{ij}^* = \frac{1}{\alpha_i \Delta S_j} \int_{\Delta S_j} s (\log r_{ij} + \log r_{ij}^*) ds$$

$$\bar{E}_{ij}^* = \frac{1}{\alpha_i \Delta S_j} \int_{\Delta S_j} s \frac{\partial (\log r_{ij} + \log r_{ij}^*)}{\partial n} ds$$

この連立1次方程式(式(4))に水面境界条件、沖側境界条件(入射波の ϕ と ϕ_n)、および岸側境界条件を与えて解くことにより境界上の ϕ と ϕ_n が求められ、式(2)より領域内の任意点における ϕ が求められる。従って、 ϕ から水面波形および流速、圧力などを求めることができる。以上の方法をもとに、時間発展的に水面形状を求める非定常解析法と、周波数成分毎に解析を行う定常解析法が開発されており、潜堤上における波の分裂現象などを対象とした問題に適用されている(例えば土木学会「海岸波動」, 1994; 吉田ら, 1996)。

(2) VOF法

VOF法は、図-2に示すように、全計算領域で計算格子(セル)を配置し、各セルでは流速をセル境界上、圧力およびセルに占める流体の割合を表すVOF関数 F をセルの中央に置く staggered mesh を用いて、以下の連立方程式、運動方程式およびVOF関数 F の移流方程式を離散化する。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \cdots \cdots (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \cdots \cdots (6)$$

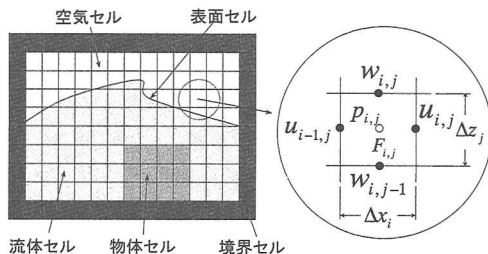


図-2 計算格子の定義

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \cdots \cdots (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial Fu}{\partial x} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \cdots \cdots (8)$$

ここで、 t は時間、 x, z は水平および鉛直座標、 u, w は水平流速および鉛直流速、 ρ は密度、 P は圧力、 ν は動粘性係数、 F は流体の体積率、 g は重力加速度である。

VOF法(SOLA-VOF法)では、まず、境界条件を満足するようにNavier-Stokes方程式(式(6),(7))を解くことにより、次の時間ステップの流速を求める。しかし、運動方程式から得られた流速は必ずしも連続方程式(式(5))を満足せず、連続方程式を満たすまで、流速と圧力を調整する繰り返し計算を行う必要がある。このようにして得られた流速を用いて、VOF関数 F の移流計算(式(8))を行い、自由表面を追跡する。

3. 結合解析法の開発

(1) 結合法の開発

著者らは、当初BEMの通過境界とVOF領域の入射境界セルを重ねる結合法を考案した(エンら, 2003)。その概略は次の通りである。VOFへの入力値として、BEMの通過境界で算定されるポテンシャルの法線微分値からVOFの水平流速の入力値を求め、また、BEM領域内の所定の位置で算定した内点ポテンシャルの差分を取ってVOFの鉛直流速の入力値を求めた。逆にBEMの入力値としては、BEMの通過境界に隣接するVOFのセルで算定される圧力からBEMの境界要素におけるポテンシャルを算定して、これをBEMの境界条件とした。このように、BEMとVOFの接続境界で流速および圧力の連続性を満足する結合法を考案しプログラムを構築して、BEM側から入射した波がVOF領域で反射してBEM領域に伝播するという条件で試計算を行ったところ、BEMからVOFへは波が伝播するものの、VOFからBEMへの反射波の伝播では、BEMの境界条件となるVOFの圧力が異常値を示し計算が破綻するという結果となった。

その後、VOFの圧力異常について調べ、接続境界から

離れるにつれ圧力の異常の程度が小さくなることを確認し、図-3に示すBEMの計算領域とVOFの計算領域をある幅で重複させる結合法を考えた。この場合、VOFへの入力値の算定については、まず、図に示すポテンシャル算定点におけるポテンシャルを求める。そして、鉛直流速については、VOFの鉛直流速入力点と同軸上にある内点ポテンシャルからスプライン関数を求め、その微係数を算定して鉛直流速とする。ただし、水面の鉛直流速は外挿し、水底面の鉛直流速は不透過境界条件より0としている。水平流速については、鉛直方向に2列算定した内点ポテンシャルの差分を取ってVOFの水平流速(図中の水平流速入力点)を求めた。一方、VOFの計算領域で発生する反射波(構造物からの反射波)をBEMの計算領域へ伝播させるためには、当初の方法と同じく、VOFの領域においてBEMとの接続境界に隣接するセル(圧力算定点)の圧力をポテンシャルに換算し、スプライン補間により境界要素節点位置におけるポテンシャルを求める。これに加え、VOFによる接続境界の水平流速から、同様にスプライン補間により境界要素節点位置における水平流速を算定し、これをBEMの接続境界における法線微分(ϕ_n)とする。なお、両手法の計算領域が重複する部分(接続領域)では、両手法ともに計算を行うため、接続領域の水面波形はBEMの計算結果を採用することとした。また、BEMとVOFでは計算の安定と精度の確保に必要な時間分解能が異なるため、両者のタイムステップ間隔は異なり、BEMの1ステップにつきVOFは10から20ステップ程度の計算を行う必要がある。

ここで、波の伝播と計算手順について考える。基本的には、BEM領域を沖側に、VOF領域を岸側に配置することを考えているため、あるタイムステップにおいて、必然的にまずBEM領域の計算を行い、その結果をVOFの入力値とすることになる。この手順では、BEMの計算における接続境界の境界値は、一つ前のタイムステップにおけるVOFの計算結果を用いることになる。したがって、沖から来襲する波についてはあまり問題にならないが、VOF領域からBEM領域に伝播する波(反射波)

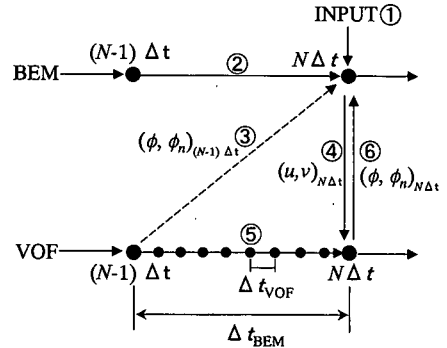


図-4 計算手順

については、BEM領域とVOF領域で反射波の進行に時間的なずれが生じる。

この時間的なずれを解消するため、図-4に示す計算手順を考えた。すなわち、あるタイムステップ $N\Delta t$ における水面波形を求める際に、まずBEMの計算を行うが、ここでは従来通り、 $N\Delta t$ における外力条件(図中の①)、 $(N-1)\Delta t$ におけるBEMの計算値(②)および $(N-1)\Delta t$ でVOFにより求めた圧力と水平流速から得られる境界条件(③)を用いる。そして、BEMの計算結果からVOF領域への入力値を求め(④)、VOF領域のタイムステップを更新する。この時、VOFでは計算の安定性と精度を確保するため、BEMより短いタイムステップ(Δt_{VOF})で入力値を補間しながら、 $(N-1)\Delta t$ から $N\Delta t$ で計算を行う(⑤)。その結果として $N\Delta t$ におけるVOF領域の圧力および水平流速が求められる。本来、 $N\Delta t$ におけるBEMの計算では、この圧力と水平流速が利用されるべきである。そこで、 $N\Delta t$ においてBEMの計算を再度行う。この時、BEMの条件としては、外力等は更新せず、 $N\Delta t$ における外力条件(図中の①)、 $(N-1)\Delta t$ におけるBEMの計算値(②)、そして $N\Delta t$ におけるVOFからの境界値(⑥)となる。以上の手順により、反射波伝播における時間的なずれを解消する。

(2) 計算精度の検証

前述の結合法に従い、計算プログラムを構築し試計算を行った。計算領域は図-5に示すように、水深 h を1m、BEM領域の幅を2.5波長、VOF領域の幅を1.25波長とし、VOF領域端については透過条件(放射条件)と完全反射条件の2通りとした。また、接続領域の幅 B は50セルとした。入射波は $kh=0.5$ 、 $T=4.174$ s、振幅 $A/h=0.01$ の微小振幅波でBEM側から入射させた。計算時間は10周期とし、時間ステップはBEMを $T/100$ 、VOFを $T/2000$ (BEMの1ステップにつきVOFを20ステップ)とした。BEMの要素数は入射境界、水面境界、VOFとの接続境界をそれぞれ10、160、10($\Delta S_x/h=0.2$)とし、VOFの水平方向と鉛直方向のセルの数は242($\Delta x/h=$

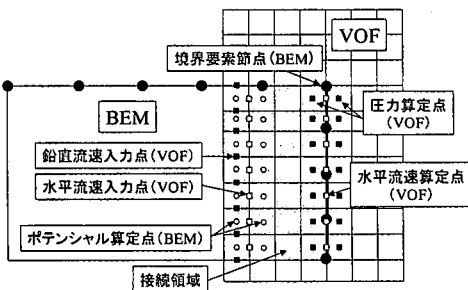


図-3 結合法

0.065) と 52 ($\Delta z/h=0.04$) に設定した。

まず、単純な進行波の伝播(透過条件)を対象に、BEMにより求められる VOF の入力値について調べた。図-6 は、BEM により算定された VOF への入力値(水平流速および鉛直流速)と、その入力値を求めるために必要な BEM 領域内のポテンシャルについて、計算開始後 6 周期における鉛直分布を示したものであり、微小振幅波の理論値を併せて示している。なお、図に示すポテンシャルおよび流速は全て無次元量であり、ポテンシャルは VOF の水平流速入力点を挟んで鉛直方向に 2 列算定しているため、両方の分布を示している。図より、ポテンシャルの分布については、全体的に計算値が小さく、分布形状も若干異なっている。ポテンシャルから算定される流速についてみると、まず水平流速は、特に水面近傍で理論値との差が大きくなっている。水平流速はポテンシャルの差分を取って求めているため、ポテンシャルの差(図中の○と●の差)が大きい水面付近で流速も大きくなる。一方、鉛直流速については、水平流速以上に理論値との差が大きく、算定に用いるポテンシャルの鉛直分布形状からもわかるように、底層付近では逆向きの流れになっている。BEM のみによる計算では、ポテンシャルと流速はともに理論値と良く一致することを確認しており、図に見られるような理論値と計算値との差は、BEM に比べ計算精度が低い VOF の計算結果を境界条件として利用することが主たる原因と思われる。このことは本解析法の開発において極めて本質的な問題であり、何らかの改善が必要である。

図-7 は、図-6 に示したポテンシャルおよび水平、鉛直流速について、水面近傍の 1 点における時間変化を水面変動と併せて示したもので、ポテンシャルや流速は水面の変動に対応して、滑らかに変動している様子がわかる。しかし、水面の振動が始まる前にポテンシャルと鉛直流速が変動していることから、計算開始直後からポテンシャルの算定値に問題があるものと思われる。

VOF に与える流速の算定に問題があるものの、現状における計算精度について検討した。図-8 に透過条件および完全反射条件における空間波形および時間波形の計算結果と微小振幅波理論による理論値との比較を示す。なお、図に示す空間波形は、透過条件では $t/T=8$ 、完全反射条件では $t/T=8.25$ における波形であり、時間波形については、透過条件、完全反射条件ともに $x/h=35.08$ (VOF 領域) における水位変動である。

図より、透過条件では、空間波形および時間波形の計算結果と理論値は比較的良く一致している。一方、完全反射条件では、空間波形をみると接続領域付近の谷の部分を除き、全体的に良く一致しているが、時間波形は乱れており周期にずれが生じていることがわかる。

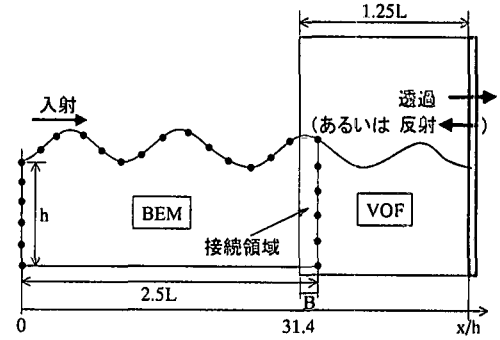


図-5 計算領域

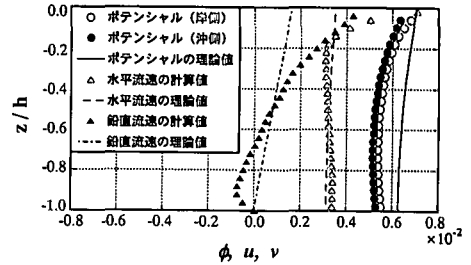


図-6 接続境界におけるポテンシャルと流速の鉛直分布

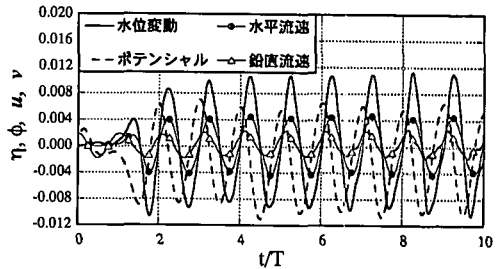


図-7 接続境界におけるポテンシャルと流速の時間変化

図-6 および図-7 に見られるように、VOF への入力値の算定精度には問題がある。しかしながら、実際に計算を行うと、特に透過条件については比較的良い精度で計算できることがわかった。この理由について考察すると、両計算法の領域をある幅で重ねていることが大きな要因であると思われる。すなわち、BEM 領域で求める VOF の入力値(水平流速と鉛直流速)は、鉛直分布等に問題があるものの、流速自体は進行波の周期で振動しているため、VOF の入力セル近傍では波形が乱れるが、波が接続領域を進行するにつれて徐々に滑らかな波動となる。したがって、領域全体において滑らかな波形を描く。このことは、VOF への入力値の算定精度を向上することによって、接続領域を小さくできることを示唆している。

透過条件では本解析法による計算値と理論値との一致の程度が良いことから、具体的に透過条件における計算精度を評価するため、本解析法による計算結果と BEM

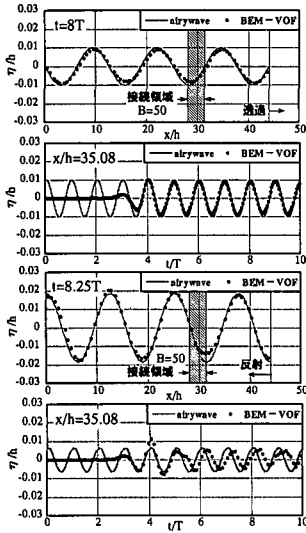


図-8 空間波形と時間波形 ($B=50$ 上: 透過, 下: 反射)

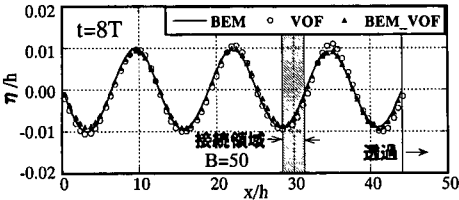


図-9 透過条件における空間波形の比較

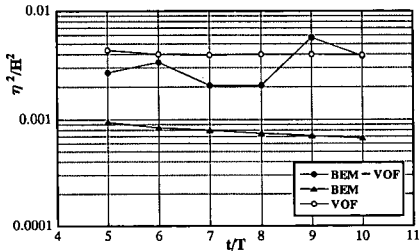


図-10 計算精度の比較

および VOF それぞれ単独での計算結果との比較を行った。図-9 に本解析法による空間波形と BEM および VOF による空間波形の比較を示す。単純な微小振幅波の伝播を対象とした計算であるが、3 手法の計算結果には若干の差が生じていることがわかる。図-10 は図-9 に示す空間波形について計算値と理論値との 2 乗誤差を比較したものである。図より、BEM による計算精度が格段に良いことがわかる。また、この計算条件では、本解析法は計算時間により 2 乗誤差が変動しているが、平均的にみて VOF 法のみ計算より良い精度で計算が行われ

ていると考えられる。このときの計算に要した時間を比較すると BEM が最も短く、VOF では BEM の 5.4 倍、本解析法では 3.1 倍であった。計算条件が異なると、各手法が計算に要する時間も変化するものと思われるが、VOF 法のみで計算を行う場合、計算領域が広く現象が複雑であるほど多大な計算時間を必要とすることから考えると、非線形性の強い現象を対象とする場合には、VOF 法のみによる解析に比べ本解析法が有利であるといえる。

4. あとがき

BEM と VOF を結合し両手法の利点を活かした数値解析モデルの開発を試みたが、現段階では改善の余地が多く、特に BEM で算定する VOF の入力値に問題があり、その原因の一つとして、VOF から BEM に与える境界値の精度が挙げられる。これは本解析法において本質的な問題であり確実に改善する必要がある。しかしながら、本解析法は、現状においても計算条件によっては比較的精度良く計算でき、また、VOF 法のみ計算に比べると格段に計算時間を短縮できることから、接続領域における問題を解消することで優れた解析法になり得るものと思われる。

参考文献

- 井島武士・永田修一 (1979): グリーンの公式による非定常有限振幅波の数値解析, 第 26 回海岸工学講演会論文集, pp. 80-83.
- 鄒 曙光・山城 賢・吉田明徳・鮎川慶一朗・入江 功 (2003): BEM と VOF を結合した波動場解析法の開発, 第 28 回海洋開発シンポジウム論文集, pp. 83-88.
- 大山 巧・灘岡和夫 (1991): 非線形不規則波動場を対象とした数値波動水槽の開発, 土木学会論文集, No. 429, pp. 77-86.
- 川崎浩司 (1998): 潜堤構造物による碎波変形と再生過程に関する基礎的研究, 名古屋大学学位論文, 186 p.
- (財)沿岸開発技術研究センター (2001): 数値波動水路の研究・開発, 296 p.
- 滝川 清・田淵幹修 (1980): 有限要素法による波動解析について—運動する境界面を有する場合, 第 27 回海岸工学講演会論文集, pp. 53-63.
- 土木学会 (1994): 海岸波動, pp. 162-167.
- 細山田得三・吉田 茂・早川典生・犬飼直之・中田芳貴 (1998): SOLA-SURF 法による潜堤周辺の波動場の 3 次元計算, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp. 157-160.
- 吉田明徳・村上啓介・山城 賢 (1996): 多成分不規則波と没水構造物との非線形干渉解析, 海岸工学論文集, 第 43 巻, pp. 791-796.
- Nichols, B. D., C. W. Hirt, and R. S. Hotchkiss. (1980): SOLA-VOF, A Solution Algorithm for Transient Fluid Flow with Multiple Free Boundaries, Los Alamos Scientific Laboratory report LA-8355.