

長波計算における数値分散性を利用した擬似 Variable Grid System の提案

嶋 原 良 典*・今 村 文 彦**

数値分散性を利用して物理分散性を表現するための差分計算方法として擬似 Variable Grid System を提案した。まず、線形長波理論の適用範囲について検討し、また、浅海域における伝播問題に関して移流項から生じる数値粘性を除去することによって、浅水理論計算から非線形分散波理論計算を再現することができた。さらに 2 次元伝播問題への拡張により、線形長波理論での差分計算の際に発生する数値分散の方向依存性を解消できることを確認できた。ゆえに従来の線形・非線形長波理論による数値計算によっても、擬似 Variable Grid System を利用することによって、物理的な分散性を精度良く表現できる。

1. はじめに

津波や長周期の波浪変形の数値計算は深海域の場合、線形長波理論による近似ができることはこれまで数多くの研究例が報告されている。しかし、遠地津波のように長距離の外洋を伝播する場合や、近地津波でも 1983 年日本海中部地震津波のように高波数成分を多く含むような場合は波数分散性の効果を無視できなくなり、線形分散波理論を支配方程式として選ぶ必要がある。さらに浅海域に達すると、非線形性を考慮した非線形分散波理論を用いなければならない。

現地適用を目的とした分散波理論の津波数値解析に関する研究例は、2 段階混合差分法 (岩瀬ら, 2002) や高精度計算法 (佐山ら, 1987; 立川ら, 1996) などがあるが、支配方程式中の分散項は高次の物理現象であるため陰解法を必要とした煩雑な計算となり、また、Peregrine 式に代表される分散項は水深が関係するため遡上領域まで安定した計算を一括に行うことは難しい。

一方、Yoon (2002) は線形長波方程式中の数値分散項が物理分散項として一致する空間格子間隔の式 (Imamura ら, 1989) から、その条件を満たすように擬似的に空間格子間隔を変化させる差分計算を行った。これにより、線形長波理論計算で線形分散波理論における物理分散性を表現する数値計算方法を提案し、緩勾配海底地形での津波伝播計算において有用な結果を得ている。ここでは計算時間の短縮やメモリの節約に優れるが、実地形での適用において浅海域での計算精度の低下や、遡上域での計算方法の確立等に課題が残っている。そこで本研究では、Yoon (2002) の数値計算法を改良し、浅水理論計算により非線形分散波理論計算を表現する擬似 Variable Grid System (以下擬似 VGS) の提案をする。そして擬似 VGS の計算精度の比較を行うことで、深海域、浅海域そして遡上領域での計算を一括に行う非線形分散波理論の数値モデル構築の可能性について検討す

る。

2. 数値計算方法

(1) 1 次元浅水理論の打ち切り誤差の性質

摩擦なしを仮定した浅水理論による一次元伝播問題の打ち切り誤差について考える。Staggered Leap-frog 法による浅水理論の差分方程式を Taylor 展開を用いて微分形に戻し、更に x の正方向へ伝播する進行波を仮定し線流量 M を消去することで、水位 μ に関する第 1 近似の擬似微分方程式を以下のように求めることが出来る。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \left\{ \left(1 + \frac{3}{2} \eta \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{24} (1 - K^2) \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} - |\eta| \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{|\eta|}{\eta} \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right\} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

ここで η : 水位, g : 重力加速度, h : 静水深, c_0 : 線形長波の波速 $\sqrt{gh}$, Δx : 空間格子間隔, Δt : 時間格子間隔, $K (= c_0 \Delta t / \Delta x)$: Courant 数, である。移流項には風上差分を用いている。式中で η の 2 階微分は数値粘性を、3 階微分は数値分散性を意味している。また、数値粘性および左辺第 5 項は移流項から、数値分散性は移流項以外の線形項から生じている。一方、鉛直方向に積分した Peregrine の式について進行波を仮定し、線流量 M を消去することで式 (2) を得る。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \left\{ \left(1 + \frac{3}{2} \eta \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right\} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

式 (1) 中の数値粘性を消去し、数値分散項の係数が物理分散項と一致すれば式 (2) に一致することになる。そこで、両分散項の係数が等しいとすると、

$$\Delta x^* = \sqrt{gh \Delta t^2 + 4h^2} \dots \dots \dots (3)$$

よって空間格子 Δx^* を設定した差分計算で物理的な分散効果を得ることが期待できる。しかし、実際の海底地形では格子点によって水深が異なるため Δx^* が変化してしまい、差分計算を行うことは困難である。

(2) 浅水理論への擬似 VGS の適用と数値粘性の除去

線形長波理論において Leap-Frog 差分での連続の式

* 学生会員 修(工) 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻

** 正会員 工 博 東北大学教授大学院工学研究科附属災害制御研究センター

と運動の式中の空間差分を行う際に擬似的な空間格子 Δx^* を仮定し、擬似格子上的での流量・水位を本来定義した格子上の値から補間することにより、通常の空間差分で発生する数値分散を物理分散として数値モデルに取り込む方法を提案する(図-1)。これは Yoon (2002) の考えと同じであり補間方法に違いがある。修正された差分式は連続の式を例として以下の様に表される。

$$\frac{\eta_i^{k+1} - \eta_i^k}{\Delta t} + \frac{M_{i+1/2}^{k+1/2} - M_{i-1/2}^{k+1/2}}{\Delta x^*} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで (i, k) はそれぞれ (x, t) 軸方向の格子点番号を意味する。上式中の空間差分は、本来差分する2点の変数とその外側2点で決定される3次関数から補間値を求める(Yoon, 2002)、即ち、

$$\frac{M_{i+1/2}^{k+1/2} - M_{i-1/2}^{k+1/2}}{\Delta x^*} + \frac{\alpha^2 - 1}{24\Delta x} (M_{i+3/2}^{k+1/2} - M_{i-3/2}^{k+1/2}) + \frac{3(9 - \alpha^2)}{24\Delta x} (M_{i+1/2}^{k+1/2} - M_{i-1/2}^{k+1/2}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\alpha = \Delta x^* / \Delta x \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。式(5)よりパラメータ α の範囲は $0 < \alpha \leq 3$ と制限される。しかし、 Δx^* は対象領域中の静水深に強く依存し、 α は制限されることから、実格子間隔 Δx を細かく設定することは難しい。ゆえに、津波が浅海域で伝播する過程において水深が大きく変化するような場合、波数分散性を考慮した数値計算では、設定した格子間隔の荒さのために高周波数成分の波長が十分に分割できず除かれてしまう可能性がある。

そこで、本研究では $3 \leq \alpha$ の外挿補間の場合で適用するため、3次 Spline 関数を利用する。Spline 関数は解析対象の波形に対して一度に関数を決定するため、外挿の大きさに関係なく補間が可能となる。以上の手法を本研究では擬似 VGS とする。

一方、浅水理論計算では移流項の風上差分から数値粘性が発生し、これが浅海域では波高減衰させる原因となる。数値粘性は運動の式の差分の中心点について Taylor 展開し、第1項目のみを考慮すると以下に表される。

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) \right|_{FD} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) \mp \frac{\Delta x}{2} \left(1 - \sqrt{gD} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{M^2}{D} \right) \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで $D(=\eta+h)$: 全水深であり、 $M \geq 0$ で負、 $M < 0$ で正、左辺は差分式を意味する。この数値粘性を打ち消すために、式(7)右辺第2項目と同じ大きさで逆符号の項を誤差抑制項(岩瀬ら, 1998)として運動の式に加える。以上より、線形の空間微分には擬似 VGS を適用して分散項を考慮し、移流項には、誤差抑制項を加え数値粘性を除去することで、浅水理論計算により非線形分散波理論計算の結果を得ることが可能となる。浅水理論によ

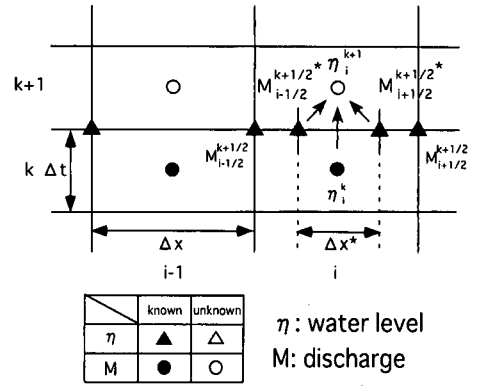


図-1 擬似 VGS の適用 (連続の式)

る運動の式の差分方程式を式(8)に示す。

$$\frac{M_{i+1/2}^{k+3/2} - M_{i+1/2}^{k+1/2}}{\Delta t} + g D_{i+1/2}^{k+1/2} \frac{\eta_{i+1}^{k+1} - \eta_i^{k+1}}{\Delta x^*} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) \Big|_{i+1/2} + \frac{\Delta x}{2} \left(1 - \sqrt{g D_{i+1/2}^{k+1/2}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) \Big|_{i+1/2} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

(3) 2次元線形問題での擬似 VGS の適用と数値分散の方向依存性の解消

2次元伝播の数値計算の場合、対角方向の分散性が弱く働く数値分散の方向依存性が発生する。Cho ら(1998)は運動の式の空間微分に補正を加えることで計算精度を向上させているが、空間格子長が $\Delta x = \Delta y$ の場合に限定されている。そこで、ここでは打ち切り誤差の理論から任意の格子上で計算可能なスキームを導く。

方向依存性の発生原因は、線形分散波理論式と線形長波理論の擬似微分方程式中の方向分散項の係数が異なるためである。そこで対角方向の数値分散を考慮するため、運動の式中の重力項を図-2に示すような隣の地点での差分を利用する。 x 方向の運動の式で、 y 方向の地点 $j-1, j, j+1$ で空間差分を行い、これらを差分の中心 $(i+1/2, j)$ について Taylor 展開し、打ち切り誤差を含んだ微分形に戻す。そして重み付けをすることで点 $(i+1/2, j)$ での差分とする。重み係数を β とすると、1次近似として以下の式になる。

$$(1-2\beta) \frac{\eta_{i+1,j}^{k+1} - \eta_{i,j}^{k+1}}{\Delta x} - \beta \frac{\eta_{i+1,j+1}^{k+1} - \eta_{i,j+1}^{k+1}}{\Delta x} + \beta \frac{\eta_{i+1,j-1}^{k+1} - \eta_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{24} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \beta \Delta y^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial y^2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで j は y 軸方向の格子点番号を意味する。また y 方向についても同様にする。以上の操作を施すことで、新たに方向性の数値分散 η_{xyy} が生じる。これらを線形長波理論の運動の式中の空間差分とし、本来の2次元の擬似微分方程式に式(9)を用いて、水位の波動方程式に変形すると、

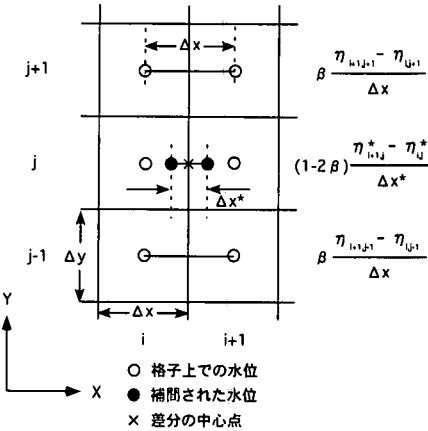


図-2 方向依存性を除去した擬似 VGS の重力項差分への適用 (x 方向)

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) - \frac{gh\Delta x^2}{12} (1 - K_x^2) \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - \frac{gh\Delta y^2}{12} (1 - K_y^2) \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^4} + \left[\frac{(gh)^2 \Delta t^2}{6} - \beta gh (\Delta x^2 + \Delta y^2) \right] \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \dots (10)$$

が得られる。K_x, K_y はそれぞれ x 方向, y 方向の Courant 数である。一方で、2 次元問題の積分形 Peregrine 式から導かれる線形分散波理論式の物理分散項は以下のように表される。

$$-\frac{gh^3}{3} \left[\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \dots (11)$$

式 (10) と式 (11) の方向分散項を比較すると、η_{xxyy} の係数が等しくなるような重み係数 β は次のようになる。

$$\beta = \frac{gh\Delta t^2 + 4h^2}{6(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \dots (12)$$

ゆえに、運動の式について重力項を式 (9) で示した差分を行うことにより、差分計算で生じる数値分散の方向依存性を除去することができる。これに組み合わせる二次元問題の擬似 VGS 計算は、式 (10), (11) の軸方向分散項の比較から 1 次元問題を拡張するだけでよい。水平床の場合、式 (9) に対し差分中心の j 列に擬似 VGS を適用することで x 方向の運動の式は以下ようになる。

$$\frac{M_{i+1/2,j}^{k+3/2} - M_{i+1/2,j}^{k+1/2}}{\Delta t} + gh_{i+1/2,j} \left[(1-2\beta) \frac{\eta_{i+1,j}^{k+1} - \eta_{i,j}^{k+1}}{\Delta x^*} + \beta \frac{\eta_{i+1,j+1}^{k+1} - \eta_{i,j+1}^{k+1}}{\Delta x} + \beta \frac{\eta_{i+1,j-1}^{k+1} - \eta_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta x} \right] = 0 \dots (13)$$

3. 数値解析結果

(1) 線形問題での擬似 VGS の適用と計算精度の検討

はじめに 1 次元線形問題について、両補間法による数

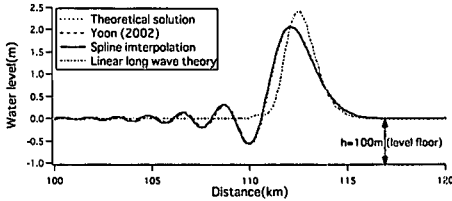


図-3 擬似 VGS 計算結果と理論解との比較 (α=2.1)

表-1 各種数値モデル計算時間の比較

数値モデル	線形長波理論	Yoon (2002)	Spline 補間	陰解法計算
計算時間の比	1.0	3.0	10.9	14.0

値計算を Fourier 変換で解いた微小振幅表面波の理論解と比較することで線形長波計算に対する擬似 VGS 適用の妥当性とその精度について調べた。水深 100 m の水平床に波高 2.5 m, 波長 3.5 km の第 1 近似の孤立波を正方向に伝播させ、伝播開始一時間後の空間波形を比較する。計算格子は Δt=2.0 s, Δx=100 m (α=2.1) とした。図-3 に結果を示す。擬似 VGS 計算結果は波高と分裂波列の位相が理論解とほぼ一致していることがわかる。また、補間法による差は見られずほぼ同程度の精度であるといえる。ゆえに、擬似 VGS を線形長波計算に適用することで理論解の物理分散性を精度良く表現できる。なお、計算時間の比較を表-1 に示す。Spline 補間は Yoon (2002) に比べ計算時間は大きくなるが、陰解法計算よりも速く計算終了することが分かる。

次に、解析波の波長分割数 (L/Δx) による計算結果の精度について、擬似 VGS 計算結果 (Spline 補間) と理論解との誤差を調べる。ある時刻における空間波形の積分値を考え、理論解の積分値と擬似 VGS 計算の積分値との差を空間波形のずれとし、理論解の積分値で基準化することで誤差の割合を求める。計算条件は先と同様の線形計算とする。図-4 に波長分割数 L/Δx に対する誤差の関係を示す。L/Δx ≤ 10 になると誤差は急激に大きくなり、逆に L/Δx ≥ 10 であると誤差は 1 % 付近を推移する。これは、解析波の分割数を大きくし、Spline 関数による外挿補間 (3 ≤ α) を行っても誤差が小さくなることはない。長谷川ら (1987) によると、津波数値計算を行う場合 L/Δx ≥ 20 程度が望ましいとされている。そこで許容誤差を 1.5% とすると、波長分割数が 20 以下でも許容誤差範囲内となり、L/Δx=14 程度で最も良くなる。線形分散波理論では、高周波数成分は後続波として分裂して伝播する。この場合、津波のエネルギーは低周波数成分である第 1 波および第 2 波がその大半を含むため、L/Δx が小さくても第 1, 2 波を精度良く計算できれば全体の誤差が大きくなることはない。ゆえに擬似 VGS 計算を行う場合、L/Δx ≥ 20 程度を満足すれば線形分散波理論

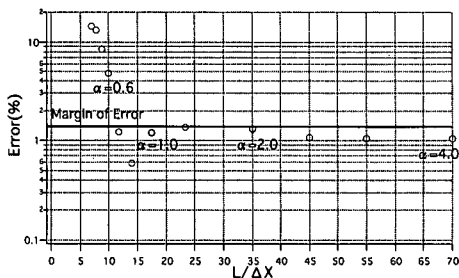


図-4 波長分割数と擬似 VGS 計算の誤差の関係

に関して十分精度良い計算が行えるといえる。

(2) 非線形問題における擬似 VGS 計算結果

非線形問題での擬似 VGS 計算結果を検討するため、浅海域に孤立波を伝播させる 1 次元伝播の数値実験を行う。底面摩擦や砕波などの運動量の損失はここでは考えず、水深 10 m の水平床に波高 2.5 m、波長 3.0 km の孤立波を計算格子 $\Delta t = 0.5$ s、 $\Delta x = 10$ m ($\alpha = 2.0$) の条件で伝播させる。図-5 に計算結果を示す。従来の浅水理論は数値粘性の効果により分散性を打ち消し波形は平滑化されているが、擬似 VGS を適用した結果では誤差抑制項によって数値粘性が抑えられ、分散性と非線形性の相互効果により波先端での分裂が発生している。一方、積分形 Peregrine 式の数値解と擬似 VGS 計算結果を比較すると、最大波高は一致しているものの先端の分裂波の位相に差が出ている。積分形 Peregrine 式は移流項を Crank-Nicholson 法による中心差分で、また擬似 VGS

浅水理論計算では風上差分を採用しているため、両者の非線形項の差分方法の違いが波形の差として現れていると考えられ、このことは波形の前傾化の段階からも判断できる。現時点でどちらの非線形項の計算が精度がよいとは判断はできないが、従来、陰解法計算が求められた非線形分散波理論計算を擬似 VGS を利用した陽解法による浅水理論計算により十分再現可能であることがわかった。

次に、浅海域での補間方法による結果の違いを調べるため、同様な条件の孤立波を勾配 1/50 斜面(水深: $10 \leq h \leq 50$ m)を有する 1 次元水路へ伝播させる数値実験を行った。Spline 補間では $\Delta x = 10$ m ($5 \leq \alpha \leq 10$, $L/\Delta x = 300$)、また Yoon (2002) の補間では $\Delta x = 35$ m ($0.57 \leq \alpha \leq 2.9$, $L/\Delta x = 85$) とし、 $\Delta t = 0.25$ s とする。なお、このケースでは積分形 Peregrine 式による陰解法計算では収束解が得られなかった。図-6 に結果を示す。150 s までは両ケース共に同形であるが、分裂が発生する斜面通過後から概形が大きく異なることが分かる。式 (5) で与えられる Yoon(2002) の補間は、 $3 \leq \alpha$ では計算が発散してしまうため $\Delta x = 35$ m 程度が取りうる最小の格子間隔である。そのため波先端部の高周波数成分を十分に分割できていないと考えられる。一方、Spline 補間による計算結果は空間格子間隔を小さくする事が出来るため、より精度の高い計算結果となっている。このように、 $L/\Delta x \geq 20$ 程度で精度良く計算できた線形分散波理論の場合とは異なり、非線形分散波理論では $L/\Delta x$ は当然大きく、さらに空間格子間隔をできるだけ小さく設定する

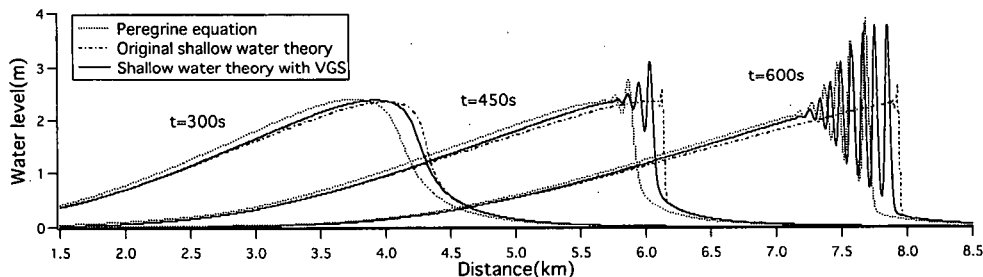


図-5 孤立波の浅海域伝播 (水深 10 m, 水平床)

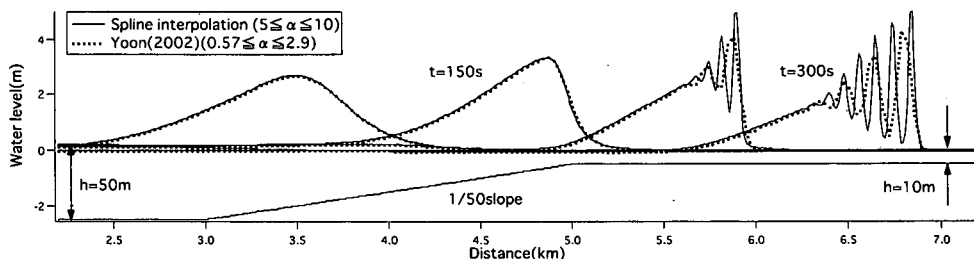


図-6 斜面伝播における補間方法による計算結果の違い

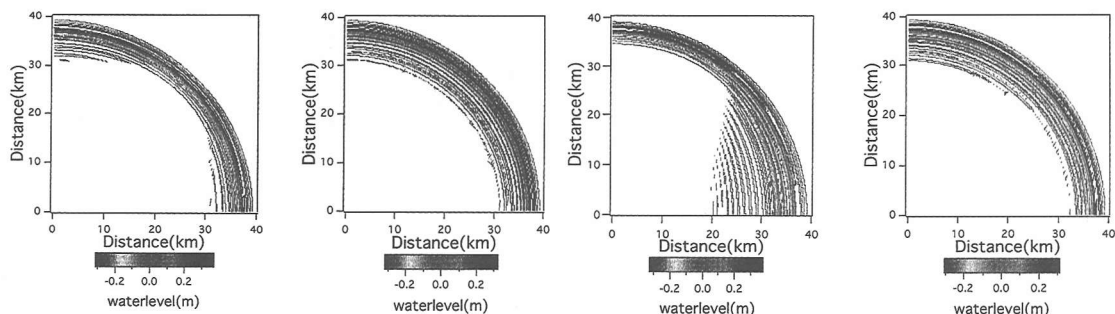


図-7 二次元伝播計算結果 (上図左からそれぞれ (a), (b), (c), (d) に対応)

(a) : 従来の線形長波計算 $\Delta x = \Delta y = 209$ m, (b) : 方向性を除去した擬似 VGS 線形長波計算結果 $\Delta x = \Delta y = 150$ m,

(c) : 従来の線形長波計算 $\Delta x = 300$ m, $\Delta y = 150$ m, (d) : 方向性を除去した擬似 VGS 線形長波計算結果 $\Delta x = 300$ m, $\Delta y = 150$ m

必要があるといえ、また、その際 $3 \leq \alpha$ の外挿補間を行う場合は Spline 補間を利用する必要がある。

(3) 2次元伝播問題の解析結果

水深 100 m の水平床を有する 2 次元水路を考え、その中心に波高 10 m、波長 2.5 km の孤立波を発生させ、 360° 方向に伝播させる数値実験を実施する。 $\Delta t = 2.0$ s とし、格子間隔は下に示すようにした。図-7 に伝播開始 20 分後の空間波形の等高線表示を示す。(a) は式 (3) から設定した格子間隔による線形長波計算の結果である。軸方向の分散の精度は良好であるが、方向依存性の影響により対角方向の分散性が弱くなっている。一方 (b) では、擬似 VGS を適用し重み付けした重力項差分を利用することで分散性を精度良く取り入れており、孤立波が同心円状に伝播している。また (c), (d) は $\Delta x \neq \Delta y$ の場合の計算結果である。従来の線形長波計算 (c) では、格子間隔に依存し伝播する方向で分散性が大きく異なっているが、(d) では精度良く分散性を取り入れることができ、(b) の結果とほぼ同様な波形となっている。ゆえに本計算方法により、設定した格子間隔に関係なく物理分散性を表現できるといえる。

4. 結 論

本研究は、数値分散性を利用して物理分散性を表現するための差分計算方法として擬似 Variable Grid System を提案した。線形長波理論の適用範囲についての検討や、浅海域における伝播問題に関して、移流項から生じる数値粘性を除去することで浅水理論計算により非常に簡易的に非線形分散波理論の再現することができた。また、2次元伝播問題への拡張から、線形長波理論での

差分計算の際に発生する数値分散の方向依存性を解消できることを確認できた。

今後は、2次元伝播問題に関して水深が変化する場合の方向分散性の評価や、浅海域および遡上域への適用、また、領域接続での境界条件の設定等が課題としてあげられ、より実地形への適用を目的とした数値モデルの構築が必要である。

参 考 文 献

- 岩瀬浩之・見上敏文・後藤智明 (1998): 非線形分散波理論を用いた実用的な津波計算モデル, 土木学会論文集, No. 600/II-44, pp. 119-124.
- 岩瀬浩之・藤間功司・見上敏文・柴本秀之・後藤智明 (2002): 波数分散効果を考慮した日本海中部地震津波の遡上計算, 海岸工学論文集, 第 49 巻, pp. 266-270.
- 佐山順二・今村文彦・後藤智明・首藤伸夫 (1987): 外海域における津波の高精度計算法に関する検討, 第 34 回海岸工学講演会論文集, pp. 177-181.
- 立川敬士・後藤智明・服部昌太郎 (1996): 非線形分散波理論を用いた数値解析の高精度化の検討, 海工学論文集, 第 43 巻, pp. 1-5.
- 長谷川賢一・鈴木孝夫・稲垣和男・首藤伸夫 (1987): 津波の数値実験における格子間隔と時間間隔に関する研究, 土木学会論文集, No. 381/II-7, pp. 111-120.
- Cho Y.-S. and Yoon S.B. (1998): A modified leap-frog scheme for linear shallow-water equations, Coastal Engineering Journal, Vol. 40, No. 2, pp. 191-205.
- Imamura, F. and Shuto, N. (1989): Tsunami propagation simulation by use of numerical dispersion, International Symposium on Computational Fluid Dynamics, pp. 390-395.
- Yoon S.B. (2002): Propagation of distant tsunamis over slowly varying topography, J. Geophys. Res., 07(C 10), 3140, doi: 10.29/2001 JC 000791, pp. 4-1-11.