

空間や時間に関して積分した積分型非線形波動方程式

柿 沼 太 郎*

計算機の能力が向上した現在, 変分法で用いる関数の自由度を比較的大きくとすることが可能である。そこで, 変分法を用いて, 空間の各方向, または, 時間方向に積分した積分型非線形長波方程式を導いた。連続体を対象とし, 未知変数は, 連続関数で仮定した各成分に離散化し, それらを加え合わせた和として表わす。方程式系導出の際の積分操作によって, 数値計算時に, 空間の有限要素分割, または, 時間のステップ刻みを必要としない。数値解析では, 空間積分型及び時間積分型の各長波方程式を適用して, 与えられた初期水面から孤立波が発生する過程をシミュレートした。

1. 序 論

自然や人工物に内在する機構を抽出・解釈し, 総合しながら, 我々は, 物体の運動や場の状態を支配する方程式系を導く。変分法は, そのための一手法である。例えば, 力学系における Lagrange の運動方程式は, 作用量積分が停留値をとるという Hamilton の変分原理を適用し, その結果得られる Euler-Lagrange の方程式から導くことができる。一方, 諸条件に対応する個々の現象を分析・解明するために, こうして得られた方程式を解かねばならない。変分法は, そのためにも有力な方法である。すなわち, 変関数を適当なパラメータを含む試行関数で仮定しておき, ある条件のもとで所与の方程式系を満足するよう, 変関数の関数形を変分法の直接法によって確定する。しかしながら, 計算上の制約から変関数の自由度を大きくとれない場合, 複雑な問題に対して十分な精度の解を得られない可能性がある。

他方, 近年, 計算機の能力が高まり, 各時刻において対象領域を細密に要素分割し, 各要素や格子点・節点に情報を離散的に配して方程式を解く手法が発達してきた。要素毎に連続な多項式等を用いた離散化によって, 対象を区分的に低次とし, 多重対角型の疎な行列を効率的に解く。計算流体力学では, 差分法(FDM), 有限要素法(FEM), 有限体積法(FVM)や境界要素法(BEM)といった偏微分方程式の数値解法が駆使され, より優れた解析精度や任意形状への適合性を得るための様々な工夫と相俟って, 乱流や混相流といった現象を含む流体運動の解明が進んでいる。しかし, プリプロセスにおいて, 差分格子や有限要素の生成及び節点結合情報の作成に多大な作業を要し, また, 自動要素分割のためのコードがメインプロセスから独立しているという欠点があり, 計算機の発達に伴う解析の大規模化につれて, より深刻な課題となっている。

このような問題の対処法として, ボクセル(Hollister・Kikuchi, 1994)や重合メッシュ(Fishら, 1994)等を用いて要素分割を行ない, 空間領域における要素生成に伴

う負担を軽減する方法と, こうした逐次的な要素分割を行なうことなく数値解析を実施する方法とが提案されている。後者は, メッシュレス法と呼ばれ, 解析に纏わる継目を設計現場から取り去ろうとする手法である。メッシュレス法は, 次のように分類されるであろう。

- (1) 節点と一時的な局所要素を用いる方法
- (2) 基本的に節点を連結しない方法
 - (a) 節点が固定されている Euler 的方法
 - (b) 節点が移動する Lagrange 的方法
- (3) 節点を用いない方法
- (4) 混成モデルを含むその他のメッシュレス法

(1) には, FMM (Yagawa・Yamada, 1996) がある。

これは, 中心節点と衛星節点の結合情報という節点単位 of データ構造で要素を一時的に表現する。こうして, 要素を各節点に付随する概念として捉えることにより, 解析者に有限要素を意識させない。

(2) (a) のグリッドレス法 (Batina, 1993) や EFGM (Belytschko ら, 1994) では, 要素の概念を用いない。変数の空間分布は, 各節点から影響半径内に位置する有限個の節点における値より, 移動最小 2 乗法を用いた内挿によって評価する。他方, PAF (Harlow・Meixner, 1961) や SPH (Monaghan・Gingold, 1983) のように粒子の概念を導入する粒子法は, (2) (b) に分類される。

ところで, 計算機の能力向上に伴って変関数の自由度が大きくとれる変分法を適用すれば, 連続体に現れる物理量や状態量を連続な関数によって比較的広領域にわたって精度よく近似することが可能であろう。変分原理直接法, または, 重み付き残差法を全対象領域にわたって適用する方法は, (3) に含まれる。この両者は, 場の問題に対する近似解法の基礎である。試行関数を区分的に与えることにより, これらの拡張形として, FEM, FMM や EFGM が得られる。

そこで, 本研究では, (3) の一手法, すなわち, 変分法を適用することによって, 空間に関する離散化を行なうことなく方程式系を解く方法について考える。ここでは, 水の波の積分型非線形方程式を導出する。平面 2 次元型の方程式系を導出するために鉛直方向に適用された

* 正会員 博(工) (独法) 港湾空港技術研究所 海洋・水工部

連成振動の考え方(灘岡・中川, 1993; 磯部, 1994)を水平方向にも適用し, 流体の物理量を各方向に関して連続関数の重み付き和として表現する。そして, それぞれの方向について解析的に, または, 数値的に積分を行ない, 各関数の重み係数を変数とする基礎方程式系を変分原理の Euler-Lagrange の方程式として導出する。

一方, 空間方向と同様に, 時間方向に対象を積分することも可能である。本論文では, 空間, または, 時間に関して積分した積分型長波方程式を導く。前者において, 空間に関する積分は, Euler 的な見方と Lagrange 的な見方の双方を包含することになり, この方程式系に基づく数値解析では, 有限要素や節点の空間配置, そして, 粒子の追跡を必要としない。また, 時間積分された後者には, 時間ステップが存在しない。その代わり, 物理量を表わす和の要素である各連続関数, すなわち, 空間的, または, 時間的に連続的に変化する各成分の挙動へと方程式の離散化が行なわれている。実際の数値計算では, 有限個の関数を用いてそれぞれの物理量を表現するから, 求まる解は, あくまで真の解の近似解である。計算精度は, 用いる関数の関数形と個数に依存するであろう。

なお, 例えば, 砕波時に水塊が空中に飛び跳ねると, 海水の占める領域が幾何学的に破断したことになるが, この場合, 気・液混相流に対する汎関数(柿沼, 2002)を適用すれば, 連続体の運動として砕波を取り扱うことができるであろう。また, 一般に, 変分法の直接法は, 対象領域の形状が複雑な場合, 境界への適合が難しい。しかし, 境界を比較的簡単な形状とし, 空隙率を導入して複雑な地形や構造物を表現することによって(柿沼, 2001), この困難を回避する方法が考えられる。こうして, 連続体を対象とする本手法の adaptivity を得る。

2. 積分型波動方程式の導出

(1) 変分問題における汎関数の定義

非粘性・非圧縮性流体の非回転運動を対象とし, 速度ポテンシャル $\phi(x, z, t)$ を $u = \nabla \phi$, $w = \partial \phi / \partial z$ によって定義する。ここで, $u(x, z, t)$ 及び $w(x, z, t)$ は, それぞれ, 各点における流速の水平方向成分ベクトル及び鉛直方向成分である。また, $\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y)$ は, 水平方向の微分演算子である。

密度が一樣な流体の上面及び下面の位置をそれぞれ $z = \zeta(x, t)$ 及び $z = b(x, t) < \zeta$ とし, 両者がともに水平方向座標 x の 1 価関数であるとする。大気圧を 0 とし, 表面張力による復元効果を重力の効果に比べて無視する。

いま, 対象領域の x - y 平面への正射影である平面 A 及び底面位置 b が既知であるとする。求める未知変数は, 速度ポテンシャル ϕ 及び水面変動 ζ となる。このとき, 流体の運動を表わす変分問題の作用 $\mathcal{I}[\phi, \zeta]$ を次式の汎

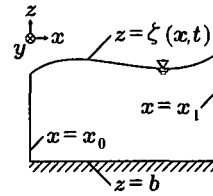


図-1 流体の対象領域

関数とする (Luke, 1967)。

$$\mathcal{I}[\phi, \zeta] = \int_{t_0}^{t_1} \int_A \int_b^{\zeta} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + g\zeta \right\} dz dA dt \quad (1)$$

ここで, $(\nabla \phi)^2 = |\nabla \phi|^2$ とする。 g は, 重力加速度であり, 質量力が重力のみであると仮定している。このように汎関数を定義すると, 適切な初期条件及び水平方向の境界条件のもとで任意の変分 $\delta \phi$ 及び $\delta \zeta$ に対して $\mathcal{I}$ の第 1 変分が 0 であるとき ($\delta \mathcal{I} = 0$), 対象領域の任意の点における連続方程式, 水面における力学的境界条件, そして, 水面と底面における運動学的境界条件がすべて満たされる。この変分問題は, 水面及び底面における境界条件を自動的に備えている。

(2) 長波方程式

図-1 の領域 $x_0 \leq x \leq x_1$, $y_0 \leq y \leq y_1$ かつ $b \leq z \leq \zeta(x, t)$ を対象とする。簡単のために, $b = \text{const.}$ とし, また, x_0 , x_1 , y_0 及び y_1 を定数とする。

平面 2 次元型の方程式系を得るために, 鉛直分布関数を設定し, 速度ポテンシャル ϕ を N 個の鉛直分布関数 $Z_\alpha(z)$ の重み付き和として次式のように表わす。

$$\phi(x, z, t) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \{ Z_\alpha(z) \cdot f_\alpha(x, t) \} \equiv Z_\alpha(z) \cdot f_\alpha(x, t) \cdots (2)$$

式 (2) を式 (1) に代入して鉛直積分を解析的に行なってから, 変分原理の Euler-Lagrange の方程式を求めると, 完全非線形方程式系が得られるが(磯部, 1994), ここでは, 極浅水域を対象とし, 鉛直分布関数を 1 項のみ用いることにして ($N=1$), $Z_0 \cdot f_0 = Z_0 \cdot f_0 = 1 \cdot f_0 = f(x, t)$ とする。すると, 次式の非線形長波方程式が得られる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \{ (\zeta - b) \nabla f \} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla f)^2 + g\zeta = 0 \quad (4)$$

鉛直分布関数として $Z_0 = 1$ のみを用いるこの場合の鉛直積分は, 鉛直方向の平均化の意味を持つ。

(3) 空間に関して積分した積分型方程式

次に, 鉛直積分と同様にして, 水平方向にも積分した長波方程式を求める。簡単のために, x - z 平面内で考える。水平分布関数を設定し, 速度ポテンシャルの重み関数 $f(x, t)$ 及び水面変動 $\zeta(x, t)$ をそれぞれ水平分布関数

$X'_a(x)$ 及び $X'_b(x)$ の重み付き和として表わす。

$$f(x, t) = \sum_{\alpha'=0}^{N'-1} \{X'_{\alpha'}(x) \cdot \tau'_{\alpha'}(t)\} \equiv X'_{\alpha'}(x) \cdot \tau'_{\alpha'}(t) \cdots \cdots (5)$$

$$\zeta(x, t) = \sum_{\alpha''=0}^{N''-1} \{X'_{\alpha''}(x) \cdot \tau'_{\alpha''}(t)\} \equiv X'_{\alpha''}(x) \cdot \tau'_{\alpha''}(t) \cdots \cdots (6)$$

式 (5) 及び (6) を式 (1) に代入して x 軸方向の積分を行なうと、汎関数 $\mathcal{F}[\phi, \zeta]$ が次式となる。例えば、 $\tau'_0, \tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_{N'-1}$ は、まとめて τ' と略記する。

$$\mathcal{F}[\phi, \zeta] = \mathcal{F}[f, \zeta] = \mathcal{F}[\tau', \tau'] = \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{L}[\tau', \tau'] dt,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\tau', \tau'] = & -bA_{\alpha'} \frac{\partial \tau'_{\alpha'}}{\partial t} + B_{\alpha'\alpha''} \frac{\partial \tau'_{\alpha'}}{\partial t} \tau'_{\alpha''} \\ & + \frac{g}{2} C_{\alpha'\beta\gamma} \tau'_{\alpha'} \tau'_{\beta\gamma} - \frac{b}{2} D_{\alpha'\beta\gamma} \tau'_{\alpha'} \tau'_{\beta\gamma} \\ & + \frac{1}{2} E_{\alpha'\beta\gamma\delta} \tau'_{\alpha'} \tau'_{\beta\gamma} \tau'_{\delta\epsilon} - \frac{g}{2} b^2 (x_1 - x_0) \cdots \cdots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\alpha} &= \int_{x_0}^{x_1} X'_{\alpha} dx, \quad B_{\alpha\beta} = \int_{x_0}^{x_1} X'_{\alpha} X'_{\beta} dx, \quad C_{\alpha\beta\gamma} = \int_{x_0}^{x_1} X'_{\alpha} X'_{\beta} X'_{\gamma} dx, \\ D_{\alpha\beta\gamma} &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial X'_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial X'_{\beta}}{\partial x} \frac{\partial X'_{\gamma}}{\partial x} dx, \quad E_{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial X'_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial X'_{\beta}}{\partial x} \frac{\partial X'_{\gamma}}{\partial x} \frac{\partial X'_{\delta}}{\partial x} dx \\ &\cdots \cdots \cdots (8) \end{aligned}$$

Euler-Lagrange の方程式は、次式より求まる。

$$[\mathcal{L}]_{\tau'_{\alpha'}} \equiv \mathcal{L} \tau'_{\alpha'} - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L} \frac{\partial \tau'_{\alpha'}}{\partial t} = 0 \cdots \cdots (9)$$

$$[\mathcal{L}]_{\tau'_{\alpha''}} \equiv \mathcal{L} \tau'_{\alpha''} = 0 \cdots \cdots (10)$$

式 (9), (10) より、水平方向にも積分した空間積分型長波方程式が次式のように得られる ($\alpha'=0, 1, 2, \dots, N'-1$; $\alpha''=0, 1, 2, \dots, N''-1$)。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (B_{\alpha'\alpha''} \tau'_{\alpha''} - bA_{\alpha'}) - E_{\alpha'\beta\gamma\delta} \tau'_{\beta\gamma} \tau'_{\delta\epsilon} + bD_{\alpha'\beta\gamma} \tau'_{\beta\gamma} = 0 \\ \cdots \cdots \cdots (11) \end{aligned}$$

$$B_{\alpha'\alpha''} \frac{\partial \tau'_{\alpha'}}{\partial t} + \frac{1}{2} E_{\alpha'\beta\gamma\delta} \tau'_{\alpha'} \tau'_{\beta\gamma} + gC_{\alpha'\beta\gamma} \tau'_{\beta\gamma} = 0 \cdots \cdots (12)$$

本方程式系の数値解法では、空間を有限要素に分割したり、空間に節点を生成・配置して、各要素や節点上に物理量を離散化する必要がない。

なお、 x_0 や x_1 を固定せずに、例えば、 $x=x_0$ における反射率を設定し、 x_0 に既知量を与えて鉛直壁 $x=x_0(t)$ を水平方向に動かせば、これが造波板となり波が生成される。他方、 $x=x_1$ における外力や流速に関する条件を与えて、鉛直壁 $x=x_1(t)$ の移動を未知関数として許せば、これが波動エネルギーの吸収・変換板となる。また、斜面 $z=b(x)$ 上において、 $\zeta(x_1)=b(x_1)$ であるとし、 $x_1(t)$ を未知関数として扱えば、汀線移動が $x=x_1(t)$ として求められる。こうした、変分問題が自動的に備えていない境界条件は、Lagrange の未定係数法等を用いて、付帯条件として考慮する。

(4) 時間に関して積分した積分型方程式

他方、時間方向に積分した長波方程式を求める。 $f(x, t)$ 及び $\zeta(x, t)$ をそれぞれ時間分布関数 $T'_{\alpha'}(t)$ 及び $T'_{\alpha''}(t)$ の重み付き和として次式のように表わす。

$$f(x, t) = \sum_{\alpha'=0}^{N'-1} \{T'_{\alpha'}(t) \cdot \xi'_{\alpha'}(x)\} \equiv T'_{\alpha'}(t) \cdot \xi'_{\alpha'}(x) \cdots (13)$$

$$\zeta(x, t) = \sum_{\alpha''=0}^{N''-1} \{T'_{\alpha''}(t) \cdot \xi'_{\alpha''}(x)\} \equiv T'_{\alpha''}(t) \cdot \xi'_{\alpha''}(x) \cdots \cdots (14)$$

同様に、式 (13) 及び (14) を式 (1) に代入して t 軸方向の積分を行なう。Euler-Lagrange の方程式より、時間に関して積分した時間積分型長波方程式が得られる。

$$P_{\alpha'\alpha''} \xi'_{\alpha''} - bO_{\alpha'} - \mathcal{V}(S_{\alpha'\beta\gamma\delta} \mathcal{V} \xi'_{\beta\gamma} \cdot \xi'_{\delta\epsilon} - bQ_{\alpha'\beta\gamma} \mathcal{V} \xi'_{\beta\gamma}) = 0 \cdots \cdots (15)$$

$$P_{\alpha'\alpha''} \xi'_{\alpha'} + \frac{1}{2} S_{\alpha'\beta\gamma\delta} \mathcal{V} \xi'_{\beta\gamma} \cdot \mathcal{V} \xi'_{\delta\epsilon} + gR_{\alpha'\beta\gamma} \xi'_{\beta\gamma} = 0 \cdots \cdots (16)$$

$$\begin{aligned} O_{\alpha} &= [T'_{\alpha}]_{t_0}^{t_1}, \quad P_{\alpha\beta} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T'_{\alpha}}{\partial t} T'_{\beta} dt, \quad Q_{\alpha\beta\gamma} = \int_{t_0}^{t_1} T'_{\alpha} T'_{\beta} T'_{\gamma} dt, \\ R_{\alpha\beta\gamma} &= \int_{t_0}^{t_1} T'_{\alpha} T'_{\beta} T'_{\gamma} dt, \quad S_{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_{t_0}^{t_1} T'_{\alpha} T'_{\beta} T'_{\gamma} T'_{\delta} dt \cdots \cdots (17) \end{aligned}$$

本方程式系の数値解法では、時間ステップ毎に物理量を定義するという時間方向の離散化が必要ない。また、式 (15)～(17) において、時間の向きは、時間積分の向きとして現れる。このことは、保存系を対象とする変分問題において連続関数を扱う場合、実際の物理現象のように時間が過去から未来に進んでいる必要がなく、時間の正・負二つの向きが相対的なものであることを意味する。

(5) 空間及び時間に関して積分した積分型方程式

簡単のために、 $x-z$ 平面において考える。水平分布関数と時間分布関数を設定し、式 (5) 及び (6) の重み関数 $\tau'_{\alpha'}(t)$ 及び $\tau'_{\alpha''}(t)$ をそれぞれ時間分布関数 $T'_{\alpha'\alpha'}(t)$ 及び $T'_{\alpha''\alpha''}(t)$ の重み付き和として次式のように表わす。

$$\tau'_{\alpha'}(t) = \sum_{\alpha'\alpha'=0}^{N'\alpha'-1} \{T'_{\alpha'\alpha'}(t) \cdot \lambda'_{\alpha'\alpha'}\} \equiv T'_{\alpha'\alpha'}(t) \cdot \lambda'_{\alpha'\alpha'} \cdots (18)$$

$$\tau'_{\alpha''}(t) = \sum_{\alpha''\alpha''=0}^{N''\alpha''-1} \{T'_{\alpha''\alpha''}(t) \cdot \lambda'_{\alpha''\alpha''}\} \equiv T'_{\alpha''\alpha''}(t) \cdot \lambda'_{\alpha''\alpha''} \cdots \cdots (19)$$

式 (5), (6), (18) 及び (19) を式 (1) に代入して x 軸及び t 軸方向の積分を行なう。Euler-Lagrange の方程式より、次式のような空間と時間の両者に関して積分した時空積分型長波方程式が得られる。

$$\begin{aligned} B_{\alpha'\alpha''} P_{\alpha'\alpha''}^{\alpha'\alpha''} \lambda'_{\alpha'\alpha''} - bA_{\alpha'} O_{\alpha'\alpha'}^{\alpha'\alpha'} \\ + E_{\alpha'\beta\gamma\delta} S_{\alpha'\beta\gamma\delta}^{\alpha'\beta\gamma\delta} \lambda'_{\alpha'\beta\gamma} \cdot \lambda'_{\alpha'\delta\epsilon} - bD_{\alpha'\beta\gamma} Q_{\alpha'\beta\gamma}^{\alpha'\beta\gamma} \lambda'_{\alpha'\beta\gamma} = 0 \cdots \cdots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{\alpha'\alpha''} P_{\alpha'\alpha''}^{\alpha'\alpha''} \lambda'_{\alpha'\alpha''} \\ + \frac{1}{2} E_{\alpha'\beta\gamma\delta} S_{\alpha'\beta\gamma\delta}^{\alpha'\beta\gamma\delta} \lambda'_{\alpha'\beta\gamma} \cdot \lambda'_{\alpha'\delta\epsilon} \\ + gC_{\alpha'\beta\gamma} R_{\alpha'\beta\gamma}^{\alpha'\beta\gamma} \lambda'_{\alpha'\beta\gamma} = 0 \cdots \cdots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_\alpha &= \int_{x_0}^{x_1} X'_\alpha dx, B_{\alpha\beta} = \int_{x_0}^{x_1} X'_\alpha X'_\beta dx, C_{\alpha\beta} = \int_{x_0}^{x_1} X'_\alpha X'_\beta dx, \\
D_{\alpha\beta} &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial X'_\alpha}{\partial x} \frac{\partial X'_\beta}{\partial x} dx, E_{\alpha\beta\gamma} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial X'_\alpha}{\partial x} \frac{\partial X'_\beta}{\partial x} X'_\gamma dx, \\
O_\beta^\alpha &= [T_\beta^\alpha]_{t_0}^{t_1}, P_{\beta\delta}^\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T_\beta^\alpha}{\partial t} T_\delta^\gamma dt, \\
Q_{\beta\delta}^\alpha &= \int_{t_0}^{t_1} T_\beta^\alpha T_\delta^\gamma dt, R_{\beta\delta}^\alpha = \int_{t_0}^{t_1} T_\beta^\alpha T_\delta^\gamma dt, \\
S_{\beta\delta\gamma}^\alpha &= \int_{t_0}^{t_1} T_\beta^\alpha T_\delta^\gamma T_\gamma^\epsilon dt \quad \dots\dots\dots (22)
\end{aligned}$$

直接法における時空に関する2回の積分, すなわち, 非定常問題において重み係数に変関数である Kantrovich 法及び関数である Ritz 法の適用の結果, 支配方程式系である式 (20) 及び (21) は, それぞれ, $\sum_{\alpha=0}^{N-1} N^{\alpha,\alpha}$ 本及び $\sum_{\alpha=0}^{N-1} N^{\alpha,\alpha}$ 本の連立代数方程式となっている。本方程式系に基づく計算結果の精度・解像度は, 節点や時間ステップの間隔の代わりに, 採用する分布関数の関数形と個数に依存するであろう。

なお, 物理量は, 分布関数という有限個の成分に離散化されているが, これらの成分は, ある仮定のもとで, 力学法則に従う波や粒子といった力学的実体, または, 統計的な定常性や一様性に基づく統計的実体となり得る。

3. 流体の上面及び下面の位置が既知である場合の積分型方程式

(1) 空間に関して積分した積分型方程式

いま, 流体の上面位置 $z=\zeta(x, t)$ が既知であるとする。下面位置 $z=b(x, t)$ も既知であるとき, 変分問題における汎関数 $\mathcal{F}$ の変関数が速度ポテンシャル ϕ のみとなり, 上面や下面に働く圧力は, 既知である必要がない(柿沼, 2000)。このとき, 空間に関して積分した長波方程式を求める。本方程式系は, 例えば, 柔軟な浮体構造物が水面上で振動するときに, 励起される流体運動や, 浮体構造物に働く圧力の解析に適用することを想定したものである。

簡単のために, $x-z$ 平面内で考える。速度ポテンシャルの重み関数 $f(x, t)$ を水平分布関数 $X_\alpha(x)$ の重み付き和として次式のように表わす。

$$f(x, t) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \{X_\alpha(x) \cdot \tau_\alpha(t)\} \equiv X_\alpha(x) \cdot \tau_\alpha(t) \quad \dots\dots\dots (23)$$

式 (23) を式 (1) に代入して x 軸方向の積分を行なうと, 汎関数 $\mathcal{F}[\phi]$ が次式となる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\phi] &= \mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[\tau] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}[\tau] dt, \\
\mathcal{L}[\tau] &= B_\alpha \frac{\partial \tau_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2} E_{\alpha\beta\gamma} \tau_\alpha \tau_\beta + \frac{g}{2} \int_{x_0}^{x_1} (\zeta^2 - b^2) dx, \quad \dots\dots\dots (24)
\end{aligned}$$

$$B_\alpha = \int_{x_0}^{x_1} X_\alpha h dx, E_{\alpha\beta} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial X_\alpha}{\partial x} \frac{\partial X_\beta}{\partial x} h dx, \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここで, $h(x, t)$ は, 全水深である ($h=\zeta-b$)。このとき, Euler-Lagrange の方程式が次式より求まる。

$$[\mathcal{L}]_{\tau_\alpha} \equiv \mathcal{L}_{\tau_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_{\frac{\partial \tau_\alpha}{\partial t}} = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

式 (26) より, 空間に関して積分した積分型方程式が次式のように得られる ($\alpha=0, 1, 2, \dots, N-1$)。

$$\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} - E_{\alpha\beta} \tau_\beta = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

(2) 時間に関して積分した積分型方程式

他方, 時間方向に積分した長波方程式を求める。 $f(x, t)$ を時間分布関数 $T_\alpha(t)$ の重み付き和として次式のように表わす。

$$f(x, t) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \{T_\alpha(t) \cdot \zeta_\alpha(x)\} \equiv T_\alpha(t) \cdot \zeta_\alpha(x) \quad \dots\dots\dots (28)$$

同様にして, Euler-Lagrange の方程式より, 次式のような時間に関して積分した積分型方程式が得られる。

$$P_\alpha - \mathcal{V}(S_{\alpha\beta} \mathcal{V} \zeta_\beta) = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$P_\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} h dt, S_{\alpha\beta} = \int_{t_0}^{t_1} T_\alpha T_\beta h dt \quad \dots\dots\dots (30)$$

(3) 空間及び時間に関して積分した積分型方程式

簡単のために, $x-z$ 平面において考える。水平分布関数と時間分布関数を設定し, 式 (23) の重み関数 $\tau_\alpha(t)$ を時間分布関数 $T_\alpha^\alpha(t)$ の重み付き和として表わす。

$$\tau_\alpha(t) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \{T_\alpha^\alpha(t) \cdot \lambda_{\alpha\alpha}^\alpha\} \equiv T_\alpha^\alpha(t) \cdot \lambda_{\alpha\alpha}^\alpha \quad \dots\dots\dots (31)$$

Euler-Lagrange の方程式より, 次式のような空間と時間の両者に関して積分した積分型方程式が得られる。

$$B_\alpha P_\alpha^\alpha + E_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^\alpha \lambda_{\alpha\alpha}^\alpha = 0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$B_\alpha = \int_{x_0}^{x_1} X_\alpha h_x dx, E_{\alpha\beta} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial X_\alpha}{\partial x} \frac{\partial X_\beta}{\partial x} h_x dx,$$

$$P_\beta^\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T_\beta^\alpha}{\partial t} h_t dt, S_{\beta\delta}^\alpha = \int_{t_0}^{t_1} T_\beta^\alpha T_\delta^\gamma h_t dt \quad \dots\dots\dots (33)$$

ここで, 全水深 h を変数分離して, $h(x, t) = h_x(x) \cdot h_t(t)$ としている。式 (32) は, $\sum_{\alpha=0}^{N-1} N^\alpha$ 本の方程式からなる。

4. 孤立波の発生過程の数値計算

一様水深領域を対象とし, $x-z$ 平面において考える。分布関数として, べき関数を採用し, $X_\alpha = x^\alpha$ 及び $T_\alpha = t^\alpha$ ($N^f = N^t$) とする。水面に, ある初期波形を与え, これを放置すると, 水面形が分裂して孤立波が生じる。このような孤立波の発生過程の数値計算を行なった。初期状態において, 分布関数の重み係数をすべて0とした。

計算結果を図-2に示す。ここで, 実線は, 式(3)及び(4)を差分格子と時間ステップを用いて解いた場合の水面形である。中央差分を用いた陽解法を適用し, 格子間隔及び時間間隔が十分に細かいことを確認している。対象領域は, $-100 \leq x/h \leq 100$ とし, 側方は, 両端を

繋いだ, x 方向に周期的な境界とした。また, 参照加速度を $g^*=1.0(\text{m/s}^2)$ として, 重力加速度を $g=9.8g^*$ とする。

図-2(a) は, 空間積分型方程式である式 (11) 及び (12) を解いた結果である。未知変数である各分布関数の重み係数に対して, 式 (12) 及び (11) の両方程式群を陽形式で表わし, 各時間ステップ毎に, それぞれの方程式より, τ_{α}^f 及び τ_{α}^s を α^f, α^s とともに $0, 1, 2, \dots$ の順で求めた。その際に, 初期波形を x に関するべき級数展開で表わし, x 方向の積分を解析的に行なえるようにした。すなわち, 初期波形の離散的な水位データから, 最小 2 乗法によって $\xi=\xi(x)$ の回帰曲線を求めた。なお, 静水深を一定としているが, 方程式中で静水深の変化を考慮しておけば, 同様の手法を用いて海底地形を与えることが可能である。図-2(a) において, $\square$ 及び $\blacksquare$ のそれぞれの印は, $N^f=N^s=20$ 及び $N^f=N^s=10$ としたときの計算結果を表わす。両者とも, 計算対象時間内において破綻なく計算が行なわれている。

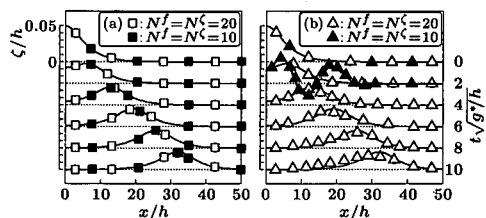
他方, 図-2(b) は, 時間積分型方程式である式 (15) 及び (16) を解いた結果である。未知係数を x 方向に離散化し, 中央差分を用いて両方程式群を陰的な差分方程式で記述し, 計算対象時間 $0 \leq t\sqrt{g^*/h} \leq 10$ にわたって解いた。図-2(b) において, $\triangle$ 及び $\blacktriangle$ のそれぞれの印は, $N^f=N^s=20$ 及び $N^f=N^s=10$ としたときの計算結果を表わす。前者では, 計算対象時間内において破綻なく計算が進んだが, 後者では, 正解が得られず, $t\sqrt{g^*/h} \approx 3.0$ で結果が発散した。

5. 結 論

変分法を適用して, 水平方向や時間方向に積分した積分型長波方程式系を導出した。その際に, 連続体を対象とし, 未知変数は, 連続関数で仮定した有限個の成分に離散化し, それらを加え合わせた和として表わす。3 次元空間と時間の両方を考慮して (3+1) 次元に広がる場の方程式が, 鉛直積分によって (2+1) 次元型方程式になり, 水平積分によって (0+1) 次元型方程式になる。更に, これを時間積分することによって, (0+0) 次元型方程式が得られる。これらの積分操作により, 数値解析の際に, 空間の有限要素分割, または, 時間のステップ刻みを必要としない。

数値計算では, 与えられた初期水面から孤立波が発生する過程を対象とし, 空間積分型及び時間積分型の長波方程式を適用した。前者の場合, 陽的解法を用いたが, 用いる分布関数の個数を多くすることによって, 比較的精度のよい計算結果が得られた。これに対して, 後者の場合, 陰的解法を用いたが, 波形に減衰が見られた。

数値解析において, 品質 (解の精度, 計算の信頼性・適用性) と, 経済性 (計算の速度, 必要なデータ容量)



(a) 空間積分型長波方程式 (b) 時間積分型長波方程式
図-2 孤立波の発生過程の数値計算結果の比較 ($g/g^*=9.8$)

とを把握しておくことが重要である。今後, 1) 初期条件, 境界条件や海底地形の統一的な与え方, 2) 空間積分型方程式を適用した際に, 解くべき代数方程式の係数行列を大きく密な行列にしないための時間の進め方に関する工夫, そして, 3) 本方程式系を時空内で区分的に適用することによって, 精度を保ちながら次数を下げるといった効率化, 等について検討していきたい。このうち, 1) は, 本モデルの seamless 性に, また, 2) 及び 3) は, 並列環境への適応性に関わる問題である。

参 考 文 献

- 磯部雅彦 (1994): 波浪変形解析のための波動方程式の比較研究, 土木学会論文集, No. 491/II-27, pp. 1-14.
- 柿沼太郎 (2000): 非線形緩勾配方程式の内部波への拡張, 海岸工学論文集, 第 47 巻, pp. 1-5.
- 柿沼太郎 (2001): 透水性海浜における内部波の挙動の数値計算, 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp. 146-150.
- 柿沼太郎 (2002): 流体の密度を考慮した非線形波動方程式, 海岸工学論文集, 第 49 巻, pp. 1-5.
- 灘岡和夫・中川康之 (1993): 不規則波動シミュレーションのための強分散性波動方程式の導出とその基本特性の検討, 土木学会論文集, No. 467/II-23, pp. 83-92.
- Batina, J. T. (1993): Implicit upwind solution algorithms for three-dimensional unstructured meshes, AIAA J., Vol. 31, No. 5, pp. 801-805.
- Belytschko, T., Lu Y. Y. and Gu L. (1994): Element-free Galerkin method, Int. J. Num. Methods Eng., Vol. 37, pp. 229-256.
- Fish, J., S. Markolefas, R. Guttal and P. Nayak (1994): On the adaptive multilevel superposition of finite element meshes for linear elastostatics, Applied Numer. Math., Vol. 14, pp. 135-164.
- Harlow, F. H. and B. D. Meixner (1961): The Particle-And-Force computing method for fluid dynamics, Los Alamos National Lab. Report, LAMS-2567.
- Hollister, S. J. and N. Kikuchi (1994): Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue, Biotechnology and Bioengineering, Vol. 43, No. 7, pp. 586-596.
- Luke, J. C. (1967): A variational principle for a fluid with a free surface, J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 395-397.
- Monaghan, J. J. and R. A. Gingold (1983): Shock simulation by the particle method SPH, J. Comp. Phys., Vol. 52, pp. 374-389.
- Yagawa, G. and Yamada, T. (1996): Free mesh method: A new meshless finite element method, Comput. Mech., Vol. 18, pp. 383-386.