

波・地盤・構造物の相互作用に関する U - π 形式 VOF-FEM (CADMAS GEO-SURF) の開発

高橋 重雄*・鈴木高二朗**・村西 佳美***・磯部 雅彦****

波と地盤・構造物の相互作用を計算できる, VOF-FEM プログラムを開発した. 特に透水係数が大きいときに計算上問題となる U - W 形式のものを改良して, U - π 形式に基づく計算法を提案している. 波の計算は VOF 法に基づく計算であり, 数値波動水路 (CADMAS-SURF) を用いている. 地盤の理論は Biot 2 相弾性理論であり, また U - π 形式は間隙水圧を従属変数とするものであり, 間隙水圧の精度を高めることを目的としている. 種々の地盤条件や構造物の条件に対して, 両者の計算結果を実験結果等と比較すると, 新しい計算法が波や地盤の運動や間隙水圧や応力などについて適切な計算結果を与える.

1. はじめに

波による地盤の液状化や洗掘・吸い出しは, 海の構造物の沈下や破壊の主要な原因の一つと考えられる. 著者らは, 構造物と波の相互作用のみならず, その基礎地盤の挙動を含めた総合的な検討が重要であると考えており, 水理模型実験などを行っている (高橋ら, 1996; 鈴木ら, 2002). ただし, 地盤内の応力や間隙水圧の変動を詳細に検討するには, 数値計算が不可欠であり, 数値計算法の開発も進めている. 著者らの研究部では, すでに波と地盤と構造物の相互作用を解く FEM 解析法 (朴ら, 1996) を開発しているが, これは周波数領域の解析でかつ線形解析であった. さらに, 砕波などの非線形な波の場を計算できる数値波動水路と地盤の FEM プログラムを連成することによって, 時間領域で非線形な数値計算法 (VOF-FEM プログラム) も開発している (蔣ら, 2000).

VOF-FEM モデルは, 水部と地盤部の境界で流速と圧力が連続しているという特徴があり, 構造物がある場合を含めて多くの条件に適用できる. しかしながら, 条件を変えて多くの計算を行った結果, 数値計算上の不安定が発生することが分かっている. 本研究は, その VOF-FEM の問題点を明らかにし, その構成方程式に遡って大幅な改良を加えることによって, 安定性の高い数値計算法に改良することを目的としている.

2. 計算方法

VOF-FEM プログラムでは, 地盤内の砂粒子と間隙水の運動は, いわゆる Biot の 2 相弾性体の理論を用いている. ただし, Biot の式を用いた地盤解析モデルはいくつかあるが, これまでの VOF-FEM モデルでは, 砂粒子と間隙水の運動を, 砂粒子の変位 U と間隙水の変位 W で表す U - W 形式の方程式系を用いている.

しかし, この理論に基づく離散化式では衝撃的な変動水圧が作用した場合や間隙水の流速が大きい場合に間隙水圧の計算精度が低下することが認められた. この原因は, 時間領域積分時の間隙水変位の打ち切り誤差と, この間隙水変位から内挿関数を用いて計算される間隙水体积歪の誤差が累積したことによるものと考えられる. ここでは間隙水圧の精度を高めることを目的として, 間隙水圧を従属変数とする U - π 形式の Biot 2 相弾性理論を適用した VOF-FEM 数値解析モデルを提案する.

2.1 波動場の VOF モデル

水部では, 砕波や越波等複雑な非線形波動現象を数值的に解析するために, 複雑な自由表面の運動が追跡可能な VOF 法からなる数値波動水路 (磯部ら, 1999) を採用し, 非圧縮性粘性流体の挙動を数値解析している.

以下に, 多孔質体中の流れに拡張した場合の Navier-Stokes の方程式, VOF 関数の移流方程式, および乱流モデル (k - ϵ 2 方程式) を示す.

$$(\gamma_i v_i)_{,i} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\lambda_v \dot{v}_i + (\lambda_i v_i v_i)_{,j} = -\frac{\lambda_v}{\rho_f} p_{,i} - \gamma_v \delta_{is} g - R_i + (\gamma_j \nu_e (v_{i,j} + v_{j,i}))_{,j} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\gamma_v \dot{F} + (\gamma_i v_i F)_{,i} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\gamma_v \dot{k} + (\gamma_i v_i k)_{,i} = (\gamma_i \nu_k k_{,i})_{,i} + \gamma_v G_s + \gamma_v \epsilon \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\gamma_v \dot{\epsilon} + (\gamma_i v_i \epsilon)_{,i} = (\gamma_i \nu_\epsilon \epsilon_{,i})_{,i} + \gamma_v C_1 \frac{\epsilon}{k} G_s + \gamma_v C_2 \left(\frac{\epsilon^2}{k} \right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで, v_i は i 方向成分流速, p は水圧, ρ_f は海水密度, g は重力加速度, ν_e は分子粘性係数と渦動粘性係数の和, R_i は多孔質からの i 方向成分抵抗力, γ_v は空隙率, γ_i は i 方向の面積透過率, ν_k , ν_ϵ , G_s , G_b , C_1 および C_2 は係数である. また, δ_{is} はクロネッカーデルタ, $\dot{v}_i \equiv \partial v_i / \partial t$, $(\)_{,i} \equiv \partial (\) / \partial x_i$ を表す.

2.2 地盤・構造物の FEM モデル

地盤部については, 海水で飽和した土粒子と間隙水からなる 2 相系地盤とし Biot の 2 相弾性体理論に基づきモデル化を行った. 2 相弾性理論では, 土粒子と間隙水の運動方程式の定式化において省略のない U - W 形式

* 正 会 員 工 博 (独法) 港湾空港技術研究所海洋・水工部長

** 正 会 員 工 修 (独法) 港湾空港技術研究所海洋・水工部主任研究官

*** (株) 富士総合研究所産業安全解析研究部

**** フェロー 工 博 東京大学教授 大学院新領域創成学科

による表示と、間隙水の慣性項を省略した $U-\pi$ 式の表示がある。前述したように、 $U-W$ 形式表示では、基礎式において省略がないと言う点で優れているが、数値計算に際しては間隙水圧評価において誤差を含みやすい点がある。そこで、本報告では、 $U-\pi$ 形式を採用した有限要素法による数値計算モデルについて以下に示す。

地盤を Voigt 型粘弾性体と考えると有効応力に対する構成則は、次式で表される。

$$\sigma'_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl} + \eta_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad \cdots (6)$$

全応力表示では、

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl} + \eta_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \delta_{ij} \alpha p \quad \cdots (7)$$

ここで、 σ'_{ij} は地盤の有効応力、 σ_{ij} は全応力、 ϵ_{ij} は地盤の歪、 p は間隙水圧、 E_{ijkl} は弾性係数テンソル、 $\eta_{ijkl} (= \beta E_{ijkl})$ は粘性係数テンソル、 $\alpha = (1 - K_D/K_S)$ 、 K_D 、 K_S は各々地盤、土粒子の体積弾性率である。

(7) 式を用いて地盤の運動方程式を $U-\pi$ 形式で表示すると以下のようなものである。

$$[E_{ijkl} \epsilon_{kl} + \eta_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \delta_{ij} \alpha p]_{,j} + \rho b_{si} - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad \cdots (8)$$

ここで、 u_i は地盤変位、 ρ は地盤の密度、 b_{si} は重力による地盤の物体力である。

間隙水に対する $U-\pi$ 形式の運動方程式は、以下の (9) 式に示す Darcy 則を含む間隙水の運動方程式と、土の単位体積中の間隙水収支より誘導される間隙水圧と間隙水および土の体積歪速度の関係式 (10) より誘導される。

$$-np_{,i} - K^{-1}n\dot{w}_i + n\rho_f b_{fi} = \rho_f \dot{w}_i + n\rho_f \ddot{u}_i \quad \cdots (9)$$

$$\dot{w}_{k,k} = -\alpha \dot{\epsilon}_{kk} - Q^{-1} \dot{p} \quad \cdots (10)$$

ここで、

$$Q^{-1} = 1/K_f + (\alpha - n)/K_s \quad \cdots (11)$$

w_i は間隙水の相対変位、 ρ_f は間隙水の密度、 K は透水係数、 n は地盤の空隙率、 b_{fi} は間隙水の物体力、 K_D 、 K_S 、 K_f は各々地盤、土粒子、間隙水の体積弾性率である。

(9) 式に対し、 $\dot{w}_i/\ddot{u}_i$ が十分小さいと見なし $\dot{w}_i$ 項を除くとともに (10) 式の関係式を代入すると次の間隙水に関する $U-\pi$ 形式の運動方程式を得る。

$$Kp_{k,k} - \alpha \dot{u}_{k,k} - Q^{-1} \dot{p} + K\rho_f b_{fk,k} + K\rho_f \ddot{u}_{k,k} = 0 \quad \cdots (12)$$

上記に示した地盤の運動方程式 (8) 式と間隙水の運動方程式 (12) 式に対し重み付残差法を適用し次の有限要素方程式を得る。ただし、変動水圧に対する運動を対象とし自重による物体力項はゼロとした。

$$\begin{bmatrix} M_{\alpha\beta ij}^{uu} & 0 \\ M_{\alpha\beta ij}^{pu} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{\beta j} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{\alpha\beta ij}^{uu} & 0 \\ C_{\alpha\beta ij}^{pu} & C_{\alpha\beta ij}^{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_{\beta j} \\ p_{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\alpha\beta ij}^{uu} & K_{\alpha\beta ij}^{up} \\ 0 & K_{\alpha\beta ij}^{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\beta j} \\ p_{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\alpha i} \\ Q_{\alpha} \end{bmatrix} \quad \cdots (13)$$

ここで、各係数マトリックス成分は以下のように表される。

$$M_{\alpha\beta ij}^{uu} = \rho \delta_{ij} \int_V N_{\alpha} N_{\beta} dV \quad \cdots (14)$$

$$M_{\alpha\beta ij}^{pu} = -K\rho_f \int_V N_{\alpha} N_{\beta, j} dV \quad \cdots (15)$$

$$C_{\alpha\beta ij}^{uu} = \int_V N_{\alpha, k} \eta_{ikjl} N_{\beta, l} dV \quad \cdots (16)$$

$$C_{\alpha\beta ij}^{pu} = \alpha \int_V N_{\alpha} N_{\beta, j} dV \quad \cdots (17)$$

$$C_{\alpha\beta ij}^{pp} = Q^{-1} \int_V N_{\alpha} N_{\beta} dV \quad \cdots (18)$$

$$K_{\alpha\beta ij}^{uu} = \int_V N_{\alpha, k} E_{ikjl} N_{\beta, l} dV \quad \cdots (19)$$

$$K_{\alpha\beta ij}^{up} = -\alpha \int_V N_{\alpha, i} N_{\beta} dV \quad \cdots (20)$$

$$K_{\alpha\beta ij}^{pp} = K \int_V N_{\alpha, k} N_{\beta, k} dV \quad \cdots (21)$$

$$F_{\alpha i} = \int_{S_1} N_{\alpha} \hat{t}_i dS - \alpha \int_{S_2} N_{\alpha} \hat{p}_{\alpha} n_i dS \quad \cdots (22)$$

$$Q_{\alpha} = \int_{S_3} N_{\alpha} \hat{q}_k n_k dS \quad \cdots (23)$$

ここで、 $u_i = N_{\alpha} u_{ia}$ 、 $p = N_{\alpha} p_{\alpha}$ 、 N_{α} は内挿関数、 u_{ia} は地盤の α 節点における i 方向変位、 p_{α} は地盤の α 節点における間隙水圧、 $\hat{t}_i$ は境界 S_1 上の境界表面力、 $\hat{p}_{\alpha}$ は境界 S_2 上の変動水圧、 $\hat{q}_k n_k$ は境界 S_3 上の間隙水流速の法線方向成分である。

(13) 式の時間積分において、地盤変位 u_i に対して Newmark- β 法を、また間隙水圧 p に対して Crank-Nicolson 法を適用し数値積分を行った。

2.3 波動場と地盤の連成

波動場と地盤・構造物の連成の方法は、水没する海底面・構造物の境界 S_2 、 S_3 において、

$$\hat{p}_{\text{rem}} = \hat{p}_{\text{vor}} \quad \text{on } S_2, \quad \hat{v}_i = \hat{u}_i + \hat{q}_i \quad \text{on } S_3 \quad \cdots (24)$$

とし弱形式で連成した。ただし、 $\hat{p}_{\text{rem}}$ は FEM 領域の間隙水圧、 $\hat{p}_{\text{vor}}$ は VOF 領域の水圧、 $\hat{q}_i$ は間隙水の相対流速である。

3. 計算結果および考察

3.1 進行波による地盤応答

図-1 は、水平な地盤上に波が進行する基本的な条件の計算結果である。表-1 は、計算条件を取りまとめたものである。ここでは、通常の砂地盤を対象にしているが、表にはこれ以降の計算に用いた条件も合わせて示している。図-1(a) は、周期 $T=8$ s、波高 $H=2$ m で水深が $h=10$ m の場合であり、波と地盤の運動、そして水圧 (波圧と間隙水圧) を見たものである。この計算は、 $U-\pi$ 形式の計算結果であるが、透水係数が小さく ($k=0.0001$ m/s)、基本的に $U-W$ 形式の計算との差はほとんど認められ

ない。なお、水の体積弾性係数としては、ある程度空気が入り込んだことを仮定して、 $K_f = 4.2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ を用いている。

図-1(b)は、地盤の透水係数を変えた場合の空隙水圧の分布を見るものであり、二つの形式による計算結果を理論値とともに示している。理論解として朴ら (1996) を用いているが、これと Yamamoto and Takahashi (1985) の計算結果とはほぼ等しい。図では $U-\pi$ 形式による計算結果は、理論値に近いが、 $U-W$ 形式の計算結果

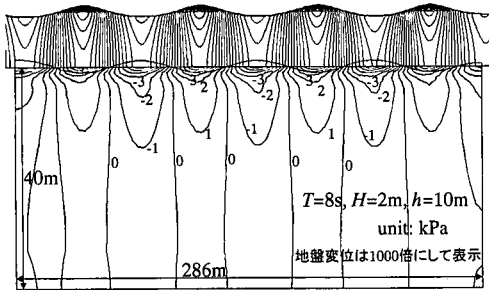


図-1(a) 流速・変位と空隙水圧
(進行波の場合、 $k=0.0001 \text{ m/s}$)

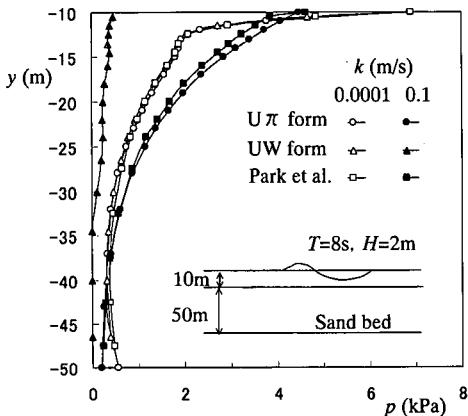


図-1(b) 空隙水圧の鉛直分布の比較
(進行波の場合 $k=0.0001$ と 0.1 m/s)

表-1 計算条件

	剪断弾性係数 $G (\text{kPa})$	空隙率 n	Voigt 粘性 β	水の体積弾性係数 $K_f (\text{kPa})$	透水係数 $k (\text{m/s})$
砂地盤	3.9×10^4	0.45	0	4.2×10^7	0.0001
透水地盤	3.9×10^4	0.45	0	4.2×10^7	0.1~1
緩い地盤	58	0.45	0.13~0.26	4.2×10^7	0.0001
マウンド	1.5×10^4	0.50	0	2.1×10^6	1

ポアソン比 $\nu=0.3$ 、地盤の密度 $\rho=1900 (\text{kg/m}^3)$

土粒子体積弾性係数 $K_s=3.5 \times 10^7 (\text{kPa})$

は、透水係数が大きくなるほど差が大きくなる。特に地盤表面の水部と連成する場所での差が大きい。地盤内には、2つの圧縮波と1つのせん断波が存在するが、いわゆる空隙水の伝播に係わる圧縮波 (Slow Compression Wave) が $U-W$ 形式では適切に計算されていないことが分かる。

この原因は、先にも述べたように $U-W$ 形式では、空隙水を弾性体として計算して水圧をひずみから計算していることにありと思われる。変位が変数であるため、誤差が大きくなりやすい。さらに時間積分するので誤差が蓄積していくと考えられる。ただし、朴ら (1996) の周波数領域での線形計算では $U-W$ 形式でも問題が生じていない。これは、時間積分をしていないため誤差が蓄積されないためと思われる。実際の砂の透水係数は、計算例ほど大きくないが、捨石などがある場合にこうした問題が発生することを示唆している。

3.2 空隙水による波の減衰

図-2は、 $U-\pi$ 形式と $U-W$ 形式の計算結果を比較するものであり、空隙水の運動による波の減衰率 ε を求めたものである。ここで、波の減衰率 ε は進行方向の距離を x 、波長を L として、そこでの波高が H_0 から H_1 に変化したとして

$$\varepsilon = (\ln H_1/H_0)L/X \dots \dots \dots (26)$$

であり、空隙水の運動による波の減衰は上式で規定できるほぼ線形な減衰である。

計算は、Slow Compression Wave の影響の大きい透水係数の大きな条件をも対象に計算している。 $U-\pi$ 形式では、透水係数が大きくなると空隙水の運動による減衰は線形的に大きくなり、かなり大きな透水係数を与えても、計算結果は Reid and Kajiura の理論 (1957) とほぼ一致している。一方、 $U-W$ 形式の計算結果では、透水係数が大きくなると、かなり小さな値となっている。

3.3 柔らかい地盤の運動と波の減衰

$U-\pi$ 形式による計算は、軟らかい地盤の運動やそれによる波の減衰も適切に示すことができる。図-3は、地盤のせん断弾性係数 G が 58 kPa とかなり柔らかい場合の波による地盤の運動と波の減衰を表すもので、 $U-\pi$ 形式での計算結果である ($T=8 \text{ s}$, $H=4 \text{ m}$)。地盤は大きく動き波の減衰が大きいたことが分かる。こうした計算結果は、 $U-W$ 形式の計算結果とほぼ同じである。また、朴ら (1997) の数値計算結果とも近い値となっている。

図-4は、横軸に地盤のせん断弾性係数を取り、波の減衰率を示すものである。せん断弾性係数が 60 kPa 程度のところで波の減衰率 ε はかなり大きくなっている。せん断弾性係数がこれより大きいときは、いわゆる砂地盤的な振る舞いをし、これより小さいところでは重い液体としての運動をする。したがって、この条件では、いわ

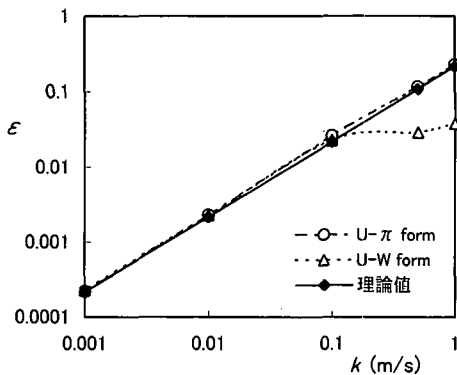


図-2 透水係数と間隙水による波の減衰

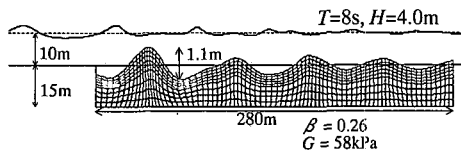


図-3 柔らかい地盤の運動と波の減衰

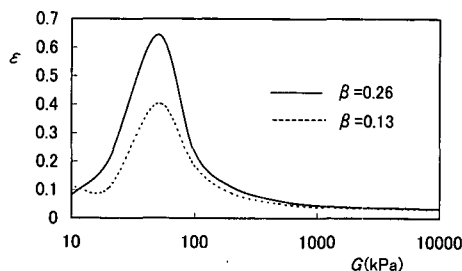


図-4 セン断弾性係数Gと波の減衰率ε

ゆる共振状態となっており、砂地盤の運動も大きく、波の減衰も大きい。

こうした変化は、Yamamoto and Takahashi (1985)の結果と一致している。

3.4 混成堤による波の伝播

図-5は、混成堤の場合における波の作用状況であり、 $U-W$ 形式の計算結果である。この計算では、マウンドを地盤部として計算しており、透水係数 $k=1\text{m/s}$ としている。マウンド内で圧力が上昇しており、ケーソン背後に波が伝播していない。こうした現象は、 $U-W$ 形式で発生する計算誤差である。これまでの計算では、この部分を水部として計算することで対応していた。すなわち、マウンドをポーラスメディアとして空隙率と抵抗係数を与えて、消波ブロックなどと同じように扱う方法を便宜的に採っている。

図-6は、同じ条件の $U-\pi$ 形式による計算結果であり、図-5のような異常な圧力は、マウンドに発生していません。波が背後に伝播している。波高伝達率は0.05程度

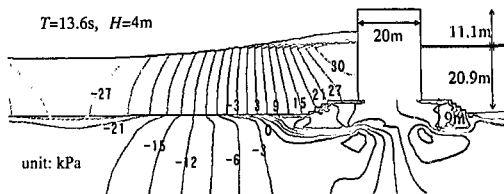
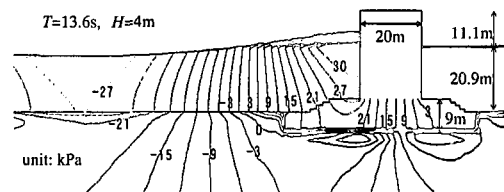
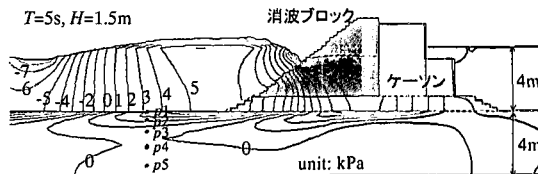
図-5 波の作用状況 ($U-W$ 形式, 混成堤)図-6 波の作用状況 ($U-\pi$ 形式, 混成堤)

図-7 波の作用状況 (消波ブロック被覆堤)

であり、ほぼ実験結果と対応している。前面の圧力についても、重複波のパターンが明瞭に求められ、ケーソン前面での圧力も有限振幅波理論の値に近い。

3.5 消波ブロック被覆堤

図-7は、消波ブロック被覆堤の計算例であり、著者らが実施した大規模水理模型実験(鈴木ら, 2002)に対応したものである。図-8は、間隙水圧分布であり、実験値と比較したものである。 $T=5\text{s}$ で $H=0.5\text{m}$ と 1.5m の場合であり、各位相における分布を示している。実験では空気の入混率が高かったため水の体積弾性係数 K_f を $2.6 \times 10^6 \text{kPa}$ とした。良く知られているように水の体積弾性係数で計算結果は大きく変わるが、実験結果を再現することができる。

3.6 ケーソン隠蔽

図-9は、消波ブロック被覆堤による護岸への適用例であり、波がマウンドを通じて伝播している様子が計算されている。図-10は、圧力の時間波形であり、ケーソン前面下部で双峰型の波形が表れており、それがほぼ同時に裏込め石部に伝播しており、さらに埋立砂内で大きく減衰し位相が遅れていく様子がはっきり分かる。

こうした圧力の伝播についても、すでに検討を行っており、実験では同様に裏込め石内に圧力が伝播するが、減衰があり圧力はやや小さい。これは、実験における裏込め石内の空気によるもので、空気混入率についてさらに検

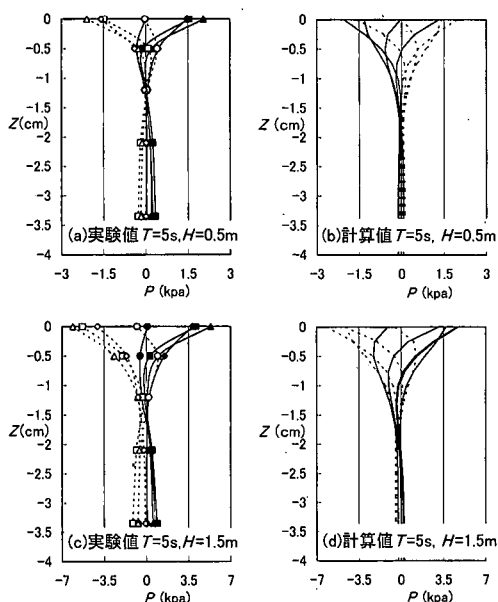


図-8 前面地盤における間隙水圧分布
(消波ブロック被覆堤)

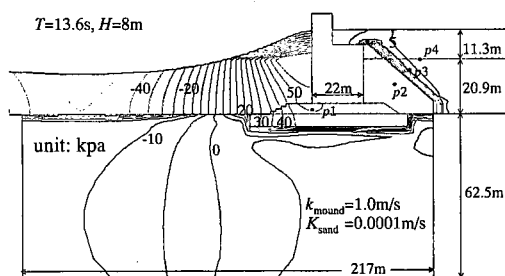


図-9 ケーソン設岸における圧力分布

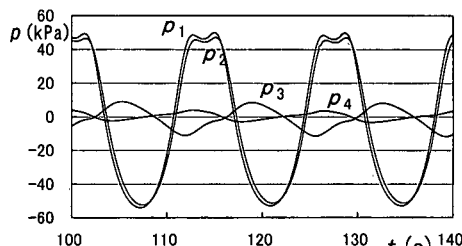


図-10 ケーソン背後への圧力の伝播

討を要する。ただし、埋立砂内の圧力減衰は、実験と同様である。

4. あとがき

波一構造物一地盤の相互作用を計算できるプログラムを開発した。波の部分はVOF法にもとづく計算プログラム(数値波動水路)であり、地盤の部分は、Biot 2相弾性理論に基づく、U- π 形式のプログラムである。ここでは、それを(数値波動-地盤水路:CADMAS GEO-SURF)と呼ぶ。種々の地盤条件や構造物の条件に対する計算を行い、理論や実験結果等と比較してその妥当性を確かめられた。

本研究の一部は「数値波動水路の耐波設計への適用に関する研究会(2001)」の活動の一環として実施している。ここに記して、関係各位に謝意を表します。

参考文献

- 磯部雅彦・高橋重雄・余 錫平・榊山 勉・藤間功司・川崎浩司・蔣 勤・秋山 実・大山洋志 (1999): 数値波動水路の耐波設計への適用に関する研究—VOF法基本プログラムの作成—, 海洋開発論文集, 第15巻, pp. 321-326.
蔣 勤・高橋重雄・村西佳美・磯部雅彦 (2000): 波・地盤・構

- 造物の相互作用に関する VOF-FEM 予測モデルの開発, 海岸工学論文集, 第47巻, pp. 51-55.
風間基樹・野上仁昭 (1991): 薄層要素法による二相系飽和地盤の動的応答に関する研究, 港湾技術研究資料, Vol. 5, No. 707, pp. 1-57.
数値波動水路の耐波設計への適用に関する研究会 (2001): 数値波動水路の研究開発, (財) 沿岸開発技術研究センター, 296 p.
鈴木高二朗・高橋重雄・高野忠志・下迫健一郎 (2002): 砂地盤の吸い出しによる消波ブロック被覆堤のブロックの沈下被災について, 港空研報告 41 巻 1 号, pp. 51-89.
高橋重雄・鈴木高二朗・徳淵克正・岡村知光・下迫健一郎・普 功 企・山崎浩之 (1996): 設岸の吸い出しに関する水理模型実験, 港湾技術研究所報告, 第35巻第2号, pp. 3-58.
朴 佑善・高橋重雄・鈴木高二朗・姜 閔求 (1996): 波・地盤・構造物の相互作用に関する有限要素法解析, 海岸工学論文集, Vol. 43, pp. 1036-1040.
Biot, M. A. (1941): General theory of three-dimensional consolidation, J. Appl. Phys., Vol. 12, pp. 155-164.
Yamamoto, T. (1981): Wave-induced pressures and effective stresses in inhomogeneous seabed foundations, Ocean Eng., Vol. 8, pp. 1-16.
Yamamoto, T. and S. Takahashi (1985): Wave damping by soil motion, ASCE, WW, Vol. 111, No. 1, pp. 62-77.
Reid, J. A. and K. Kajiura (1957): On the damping of gravity waves over permeable seabed, Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 30, No. 3, pp. 349-356.