

波と弾性はりとの連成運動に関する数値解析

榊 山 勉*

境界適合座標系を適用した ALE 法の運動方程式を用いて、波と構造物との相互干渉を考慮した連成運動に関する数値解析コードを構築する。移動境界として波の自由表面、構造物の移動、部材の変形を扱う。片持ちばりの曲げ振動解析解と有限振幅重複波振動解を用いてプログラムの検証を行った。反射境界に鉛直片持ちばりを設定し、波との連成運動を計算した。片持ちばりの変位、遡上波、波圧分布、流速ベクトル場について計算結果を考察した。はりの固有周期より長い波の周期の作用の下では構造物においては波力は静的な荷重として作用し波圧合力の作用方向に変位した。固有振動が生じ、慣性力が卓越する場合に波圧合力の作用方向とは逆方向に変位することを再現した。

1. 緒 言

波と構造物の問題に関して適用されている数値計算モデルは固定座標系の有限差分法によるものが多い(榊山 1998; 沿岸開発技術研究センター, 2001)。波と地盤の問題、ケーソンの滑動にも適用されているが、流体運動との相互干渉は無視されている。また、構造物の斜面は格子で階段状に近似するか、ポーラスボディモデルで近似している(榊山, 1998)。

境界条件を精度高く考慮するためには境界適合座標系を用いる数値計算法が有効である。柴山ら(1994)、滝川ら(1995)、辻本(1997)は碎波の数値計算に適用した。石田・由比(1995)は円柱周りの流れの計算から抗力係数を算出している。牛島(1995)は流れによる局所洗掘を移動境界座標系を用いて計算し、田中(1996)は放水ピット内の自由表面の自励運動を解析した。榊山・田中(2001)は波による 1 自由度の回転運動をする剛体の計算を行った。構造物の移動境界を扱った研究は、船舶や海岸工学の分野ではポテンシャル理論に基づく解析が主流で、谷澤(1999)は流体と弾性体の計算を扱い、池野(2000)は浮体運動を 3 次元波浪場にまで適用した。しかし、流速場まで議論は及ばない。

他の分野では、非圧縮性粘性流体と構造物の連成運動を扱った研究が行われている。江口(1990)は ALE 法を適用した有限要素法による数値解析コードを開発し、田村・伊藤(1997)は剛体構造物の流れによる強制振動を、越塚ら(1999)は粒子法により弾性はりと流体の相互作用を計算した。張・久田(2002)は人工心臓と血流の連成運動を対象に強連成に基づく解析を行っている。

本研究では非圧縮性粘性流体を対象に、自由水面だけではなく構造物の移動境界を考慮し、波と構造物の連成運動を扱える数値解析モデルを開発する。ここでは、はりの振動を対象に部材の曲げ変形も考慮する。

2. 支配方程式と境界条件

流体運動の支配方程式は、式(1)に示す連続式と式(2)、式(3)に示す ALE 法の運動方程式を用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u - u_\theta) \frac{\partial u}{\partial x} + (w - w_\theta) \frac{\partial u}{\partial z} \\ = - \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + (u - u_\theta) \frac{\partial w}{\partial x} + (w - w_\theta) \frac{\partial w}{\partial z} \\ = -g - \frac{\partial \phi}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここに、 x, z : 水平、鉛直座標、 t : 時間、 u, w : 流速の水平、鉛直成分、 g : 重力加速度、 ν : 粘性係数である。さらに、 $\phi = p/\rho$ で、 p は圧力、 ρ は流体の密度である。また、 u_θ, w_θ は格子点の移動速度である。

物理空間座標系を (x, z) で、計算空間座標系を (ξ, ζ) で表す。座標変換後の連続方程式、運動方程式は、それぞれ式(4)ならびに式(5)と式(6)で表される。

$$\frac{\partial(|J|U)}{\partial \xi} + \frac{\partial(|J|W)}{\partial \zeta} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u^* \frac{\partial u}{\partial \xi} + w^* \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\xi_x \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \zeta_x \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \\ + \nu \left(g_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2g_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} + g_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \right) \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u^* \frac{\partial w}{\partial \xi} + w^* \frac{\partial w}{\partial \zeta} = -g - \xi_x \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \zeta_x \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \\ + \nu \left(g_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2g_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta} + g_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \right) \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここに、 u^*, w^* は次式で表される。

$$\begin{aligned} u^* = (u - u_\theta)\xi_x + (w - w_\theta)\xi_z - \nu(\xi_{xx} + \xi_{zz}) \\ w^* = (u - u_\theta)\zeta_x + (w - w_\theta)\zeta_z - \nu(\zeta_{xx} + \zeta_{zz}) \end{aligned} \dots\dots (7)$$

式(4)中の $|J|$ はヤコビアンで、次式で定義される。

* 正会員 工博 (財)電力中央研究所 流体科学部

$$|J|=(x_0 z_t - z_0 x_t)=(\xi_x \zeta_z - \xi_z \zeta_x)^{-1} \dots\dots\dots (8)$$

また、 U 、 W は式 (9) で表される反変速度である。

$$U=\xi_x u+\xi_z w, \quad W=\zeta_x u+\zeta_z w \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\xi_x=\partial \xi/\partial x$ などはメトリックであり、 g_{11} 、 g_{13} 、 g_{33} は次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= \xi_x^2 + \xi_z^2, \quad g_{33} = \zeta_x^2 + \zeta_z^2 \\ g_{13} &= \xi_x \zeta_x + \xi_z \zeta_z = g_{31} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

水面では式 (11) の運動学的条件と式 (12) の力学的条件を適用した。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (u_s - u_0) \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_s \quad \text{at} \quad z = \eta(x, t) \dots\dots (11)$$

$$p=0 \quad \text{at} \quad z = \eta(x, t) \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 u_s と w_s は自由表面における流速の水平、鉛直成分である。

構造物の移動境界では、式 (13) で示すフリースリップ条件と式 (14) の構造物法線方向の速度連続条件を適用した。

$$\frac{\partial u_r}{\partial n} = 0 : \text{フリースリップ条件} \dots\dots\dots (13)$$

$$u_n = u_b \dots\dots\dots (14)$$

圧力の境界条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \left(g_{11} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + g_{13} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) = -g n_z \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 n_z は法線ベクトルの z 成分である。

移動境界を与える構造物として、水底に固定端を有する鉛直片持ちばり（一様断面）を反射境界に設置する。はりの曲げ振動の運動方程式は次式で表される。

$$\rho_b A \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} = p(z, t) \dots\dots\dots (16)$$

ここでは、鉛直に設置するので、はりの位置を z 、変位を x で表わす。また、 ρ_b ははりの密度、 E : ヤング率、 A : 断面積、 I : 断面 2 次モーメント、 p は分布荷重である。

はりの曲げ運動の境界条件は、固定端での変位 x と回転角 θ 、自由端でのモーメント M とせん断力 F について次式で与えられる。

$$x(z, t)=0, \quad \theta=\frac{\partial x}{\partial z}=0 \quad \text{固定端} \dots\dots\dots (17)$$

$$M=-EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}=0, \quad F=-EI \frac{\partial^3 x}{\partial z^3}=0 \quad \text{自由端} \dots\dots (18)$$

3. 計算方法

流体運動の解析では、物理流速と圧力を格子の中心に、反変速度をスタガードの配置に定義して差分式をたて、

解法は SMAC 法を採用した。圧力の補正量に関するポアソン方程式を解き、反変速度に関する連続式を満足させ計算を進める。移流項には 1 次精度の風上差分を用いた。圧力の補正量の連立方程式の解法には共役勾配法 (CGM) を用いた。流体運動の時間積分は 3 次の精度を有する Adams-Bashforth 法を採用した。

はりの曲げ振動の計算にも有限差分法を用いた。式 (16) は 4 階の偏微分を含むので、精度高く近似するために次式の 7 次精度の差分商を用いた。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = & \frac{1}{12(\Delta y)^4} (-2f_{i-3} + 24f_{i-2} - 78f_{i-1} \\ & + 112f_i - 78f_{i+1} + 24f_{i+2} - 2f_{i+3}) \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

式 (16) の時間積分には Newmark β 法を用い、係数には $\beta=1/2$ 、 $\delta=1/4$ (定加速度法) を採用した。

波とはりとの連成計算では、流体計算を行い得られた波圧によりはりの変位を計算する。これを流体の新たな計算領域の境界と設定するとともに、はりの変位速度とその反変速度を流体の移動境界条件として与え、毎時間ステップで、移動境界と計算領域内部の格子の座標を更新して計算を進める。はりの曲げ運動は 1 次元の現象で、水平成分の速度に考慮する。今回は流体運動とはりとの運動は陽的に計算した。陰解法は今後の課題である。

4. 数値解析コードの検証計算

(1) 片持ばりの曲げ強制振動

はりの振動計算プログラムを一様分布正弦波荷重による片持ちばりの強制振動の解析解を用いて検証した。鉄を想定し、 $\rho_b=7.874 \text{ g/cm}^3$ 、 $E=2.06 \times 10^{12} \text{ g/cm}^2$ を採用した。式 (16) ははりの長さ l の約 1/3 の変位まで適用可能なので、 $l=50 \text{ cm}$ 、荷重振幅 $q=10 \text{ g/cm}$ としはりの厚さ $B=0.15 \text{ cm}$ のときに自由端の変位が 14 cm となる。固有周期 T_n は、第 1、2、3 モードで $T_n=0.202$ 、0.0322、0.0115 s となった。

図-1 に 2 周期間の計算結果を示す。荷重の周期は $T=1.96 \text{ s}$ とし第 1 モードの固有周期の約 10 倍とした。単純に正弦波を作用させた場合には固有振動が重合して発生した。そこで初期に荷重に緩起動のフィルターを作用させた結果、固有振動が抑えられた。図中の一点鎖線が両者の差で、固有振動の周期 0.2 s が確認できる。

2 周期目の計算結果を用いて変位の空間分布を図-2 に示す。正負の最大時の形状は解析解と概ね一致しているが、計算結果は正負でわずかに非対称になっている。自由端の全振幅の誤差は約 4% である。

(2) 有限振幅重複波

流体計算プログラムは、合田・柿崎 (1966) の有限振幅重複波の摂動解を用いて検証した。入射波には、有限振幅波の摂動解よりも適用範囲が広い Dean の流れ関数

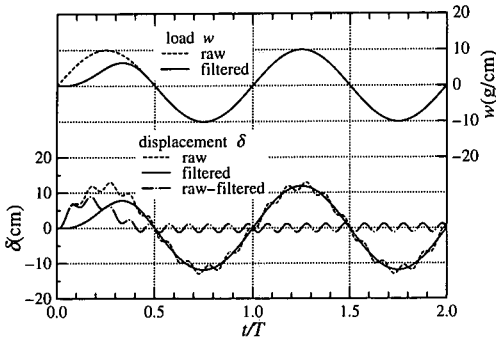


図-1 片持ちばりのたわみの振動解析結果

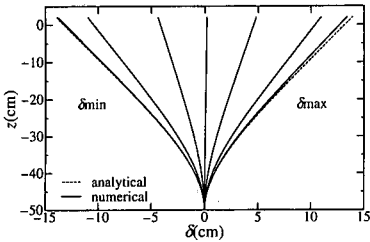


図-2 たわみの計算の検証

法 B を波速の第 2 定義に従って適用した (沿岸開発技術研究センター, 2001)。波浪条件は, 入射波高 $H=10$ cm, 周期 $T=1.96$ s, 水深 $h=50$ cm とした。格子間隔, 時間ステップはそれぞれ $(\Delta x, \Delta t)=(L/200, (\eta+h)/100, \Delta t=T/800)$ とした。ここに, L は波長である。

計算領域を 2 波長とし, 初期条件に進行波を与えて計算時間約 1.8 周期間の計算を行った。図-3 に反射面での水位変動の比較を示す。計算結果は 1 周期目は良好に一致し, 波高の誤差は 1 % 未満であった。しかし, 2 周期目の峰で水位が低下することがわかったので, 計算を 2 周期程度にとどめ以下の検討を行うことにした。

図-4 は波圧の鉛直分布を最大, 最小値について比較したものである。 $p_{\min}$ はわずかに計算結果が大きく, $p_{\max}$ は小さい。これらは図-3 の水位の比較結果に対応している。

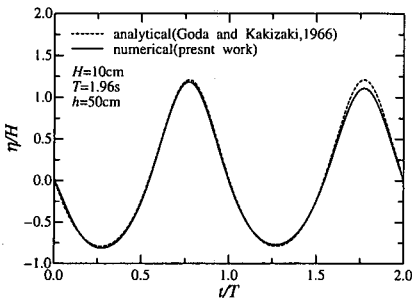


図-3 水位変動の比較 ($H=10$ cm)

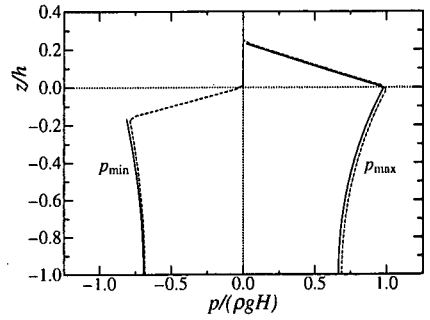


図-4 波圧分布の比較 ($H=10$ cm)

5. 連成運動の数値計算

波とはりとの連成運動の計算を行うに当たって, ここでは静止状態で直立する鉛直はりの振動を計算するために, 静水圧を除去した波圧を仮想の外力として与えることにした。波浪条件は, 入射波高 $H=5, 10$ cm, 周期 $T=1.96$ s, 水深 $h=50$ cm である。はりの長さは遡上波が越流しないように, $l=72.5$ cm とした。このときの固有周期 T_n は, 第 1, 2, 3 モードで $T_n=0.424, 0.0677, 0.0242$ s となった。

図-5 は, 入射波高 $H=10$ cm の条件での鉛直片持ちばりの変位とその近傍の水位変動を示したものである。図中の○は遡上波の先端を示す。反射面であるはりの前面に微小な擾乱がみられるが, はりの変位とともに遡上する波と重複波の節が移動する様子が計算されている。

図-6 にはりが直立状態から 1 周期間の波との連成運動の計算結果を流速ベクトル, はりの変位, はりに作用する波圧成分について示す。時間間隔は $T/8$ 間隔である。引き波から始まるので負の方向に変位する。 $t/T=0.25$ でほぼ水位が最小になる。 $t/T=0.5$ で変位が 0 に戻らないのは, 非線形波によるものと連成運動の両者のためである。 $t/T=0.625$ では, 波の遡上とともに正の方向に波圧合力が作用し変位が正に転じた。 $t/T=0.875$ では最大遡上点 ($t/T=0.85$) に達した後で引き始めた位相を示す。

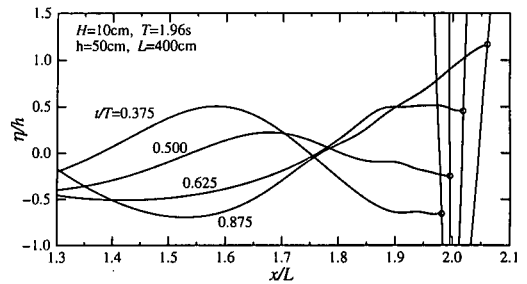
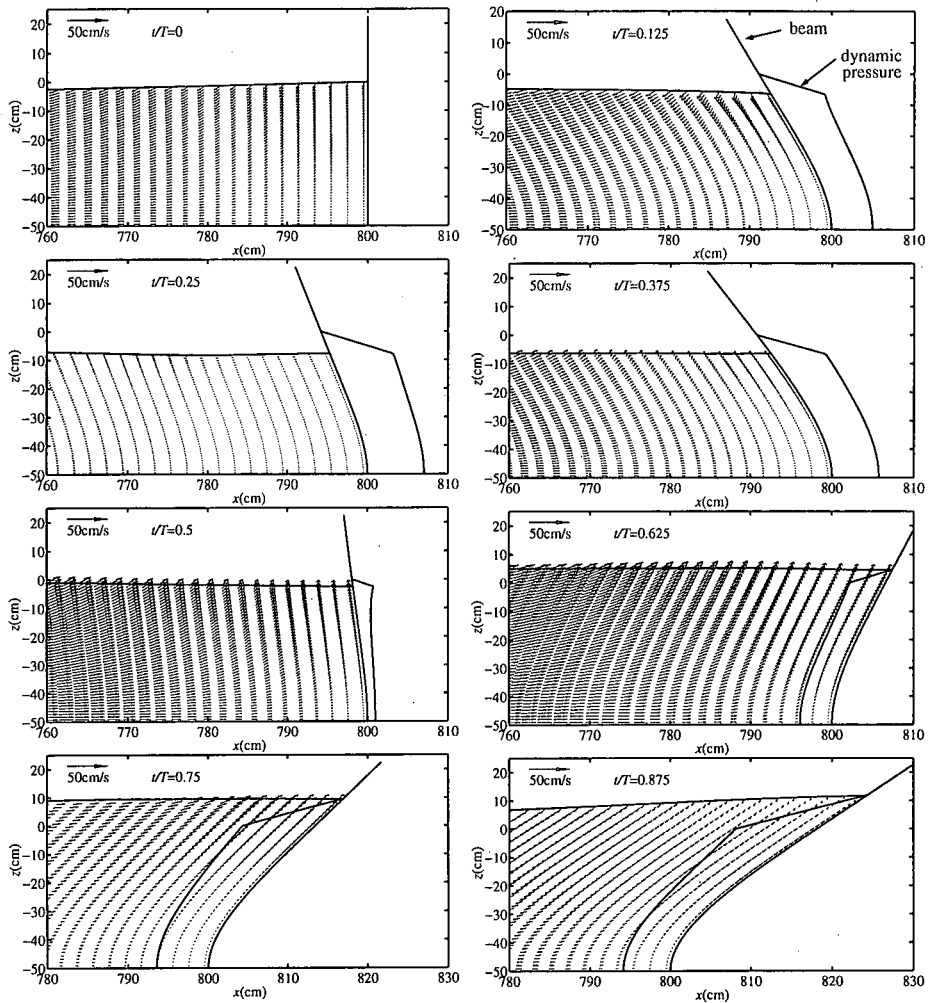


図-5 境界近傍の水面波形と境界の変化 ($H=10$ cm)

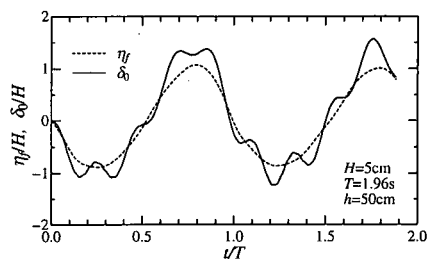
図—6 波と片持ちばりとの連成運動の計算例 ($H=10$ cm)

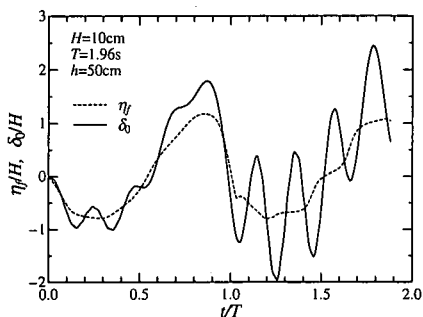
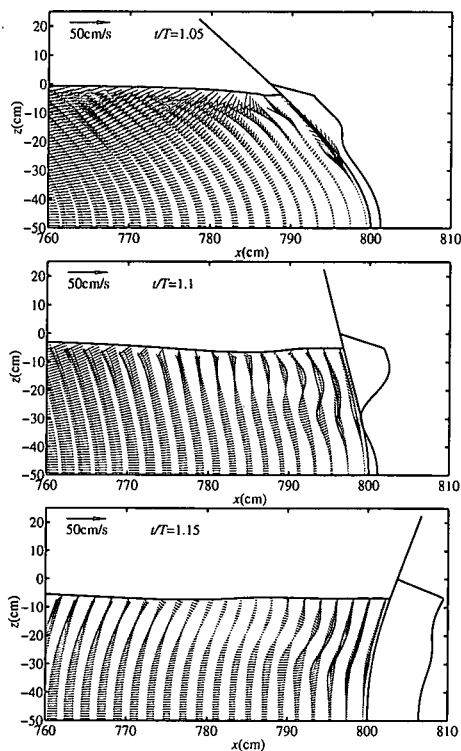
図—7 と図—8 に波高 $H=5$ cm, 10 cm での壁面上の遡上高さ η_f と $z=0$ での変位 δ_0 の時間変化を示す。はりの変位には波と同周期の変動に固有周期 0.42 s の振動が重なった。 $H=10$ cm の計算では $t/T > 1$ 以後の高周波の振動が顕著になった。これは遡上波の水位に見られるように不連続な変化が生じたため、圧力にも時間的に急激な変化が生じ固有振動を誘発したと思われる。これに対応した遡上高さの時間変化にも変動がみられる。

この連成運動での遡上高波高比は第 1 波の結果では波高 $H=5$ cm で $R/H=1.066$, $H=10$ cm で $R/H=1.175$ であった。両者ともに有限完全重複波の場合より低い。Shuto (1972) の長波理論の遡上高さの解析解では、斜面上の遡上波高は入射波高より常に高くなり ($R/H \geq 1.0$), $R/H \geq 1.1$ となるには波長の 20% の斜面長を要する。今回の計算結果では斜面長ははるかに短く遡上高さ

の増幅には影響しない。波の非線形の影響も考えられるが重複波より小さくなったことは波のエネルギーがはりの運動に変換され、遡上高さが小さくなったものと考えられる。

図—9 は振幅の大きい短周期の変動が生じた $t/T = 1.05$ から 1.15 の間の計算結果を示したものである。水

図—7 遡上高さと変位の時間変化 ($H=5$ cm)

図-8 波上高さ変位の時間変化 ($H=10$ cm)図-9 波と片持ちばりとの連成運動の計算例 ($H=10$ cm)

深の $2/3$ 程度の直径の規模をもつ循環流が生じている。この流速分布に対応して、はりに作用する波圧の鉛直分布に図-6 とは著しく異なった分布がみられる。図-9 の最下段の $t/T=1.15$ の図では波圧の合力が負の方向に作用しているにもかかわらずはりは反対の正の方向に変位している。はりに作用する慣性力のほうが波圧合力より大きいためである。

6. 結 言

本研究では境界適合座標系を採用した移動境界を考慮

できる波と構造物の連成運動の数値解析モデルの構築し、波と片持ちばりとの連成運動を対象に数値解析を行い考察を加えた。現状の問題点と同時に適用性の両者を示した。今後は問題点の検討、精度向上と新たな適用を試みる。

謝 辞 電力中央研究所 田中伸和流体科学部長より数値計算方法に関して終始御指導を賜りました。ここに記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 池野正明 (2000): 境界要素法を用いた浮体構造物の 3 次元非線形挙動解析, 土木学会論文集, No. 656/II-52, pp. 167-181.
- 石田 啓・由比政年 (1995): 一般座標系表示の Navier-Stokes 方程式を用いた円柱周辺流れ場の数値解析, 海岸工学論文集, 第 43 巻, pp. 916-920.
- 牛島 省 (1995): 移動境界座標系を用いた局所洗掘現象の高精度数値解析手法の開発, 電力中央研究所報告, 研究報告, U 95015, 22 p.
- 江口 譲 (1990): 自由表面と流体構造境界面の有限変形を考慮した流体構造相互作用解析コードの開発, 電力中央研究所報告, 研究報告, U 90010, 71 p.
- 沿岸開発技術研究センター (2001): CADMAS-SURF 数値波動水路の研究・開発, 数値波動水路の耐波設計への適用に関する研究報告, 沿岸開発技術ライブラリー No. 12, 296 p.
- 合田良美・柿崎秀作 (1966): 有限振幅重複波ならびにその波圧に関する研究, 港研報告, 第 5 巻, 10 号, 57 p.
- 越塚誠一・近澤佳隆・岡芳 明 (1999): 弾性体に対する陽的な粒子計算モデルの開発, 計算工学講演会論文集, Vol. 4, p. 33-36.
- 榊山 勉 (1998): 消波舷岸の越波に関する数値計算モデルの開発, 電力中央研究所報告, 研究報告, U 97103, 27 p.
- 榊山 勉・田中伸和 (2001): 没水型浮体式構造物と波との連成運動に関する数値解析, 電力中央研究所報告, 研究報告, U 00075, 25 p.
- 柴山知也・Nguyen The Duy (1994): 乱流方程式を用いた砕波体内波浪場の数値モデル, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp. 151-155.
- 滝川 淳・山田文彦・松本健作 (1995): Boundary-Fit 法による任意海底形状の砕波変形解析, 海岸工学論文集, 第 42 巻, pp. 86-90.
- 田中伸和 (1996): 移動座標系による自由液面の自励振動解析, 電力中央研究所報告, 研究報告, U 95034, 32 p.
- 谷澤克治 (1999): 自由表面を含む流体力学問題の非線形シミュレーション法, 非線形水波および水波と固体境界との相互作用研究会報告 10 ME-S3, 九州大学応用力学研究所, pp. 37-42.
- 田村哲朗・伊藤嘉晃 (1997): 振動する角柱周りの流れと風圧力に関する 3 次元解析の予測精度, 日本建築学会構造系論文集, 第 492 号, 29-36, pp. 177-184.
- 張 群・久田俊明 (2002): 構造座屈と領域大変動を伴う流体・構造連成問題の ALE 有限解析, 日本機械学会論文集 (A 編), 67 巻 654 巻, pp. 195-202.
- 辻本剛三 (1997): 乱流モデルによる砕波点近傍の流れ場の数値計算, 海岸工学論文集, 第 44 巻, pp. 101-105.
- Shuto, N. (1972): Standing waves in front of a sloping dike, Coastal Engineering in Japan, Vol. 15, pp. 13-23.