

有限水深域における非線形エネルギー輸送の 高精度計算法の SWAN への導入

橋 本 典 明*・I. J. Haagsma**・L. H. Holthuijsen**

波浪推算の高精度化を目的として, 有限水深域における非線形エネルギー輸送を高精度かつ効率的に計算可能な方法を検討した。本方法は, 深海波を対象とした Masuda (1980), 小松ら (1993) の計算法に基づいて有限水深域に適用可能な形に拡張した橋本ら (1996) の方法に, 小松・増田 (2000) の修正を加えた方法である。本研究では, 有限水深域における非線形エネルギー輸送の特性を検討し, さらに効率的な計算法の開発の可能性を検討している。また, 本方法を SWAN に適用し, 有限水深域における非線形エネルギー輸送の有効性について検証している。

1. はじめに

波浪の発達・減衰を支配する重要な物理過程に非線形相互作用がある。これは異なる周波数・伝播方向を有する無数の成分波間でエネルギー輸送を引き起こすメカニズムで, 風から波へのエネルギー輸送や砕波等によるエネルギー散逸と同様に重要な物理過程である。現在の波浪予報モデルでは, いかに正確にこのメカニズムをモデルに導入するかが, 急務かつ重要な課題となっている。

非線形相互作用を導入した第三世代波浪予報モデルには, WAMDI Group が開発した WAM (WAMDI Group, 1988) や Delft 工科大学が開発した SWAN (Holthuijsen ら, 2000) 等がある。この内, SWAN は特に浅海域を対象として開発されたもので, そのプログラムと利用マニュアルは広く一般に公開されている。このモデルは既に 1000 人以上の研究者や技術者がユーザー登録し, 浅海域を対象とした標準的波浪推算モデルになりつつある。SWAN では, 元々深海波を対象として開発された WAM と異なり, 浅海の地形性砕波や分散性が無視できる極浅海波の 3 波共鳴のメカニズムなどが考慮されている。しかし, SWAN で用いられている非線形エネルギー輸送 (4 波共鳴) の計算には, Hasselmann・Hasselmann (1985) が開発した離散相互作用近似 (DIA) がそのまま用いられており, 浅海域では深海波の DIA の計算値に相対水深の関数として与えられる増幅係数を乗じることによって便宜的に計算されており, 物理メカニズムや計算精度の面で問題があることが指摘されていた。

本研究は, 有限水深域に適用可能な非線形エネルギー輸送の高精度かつ効率的な計算法を検討するとともに, これを SWAN に導入し, 浅海波を対象とした波浪推算を実施してその特性を検討することにより, 汎用的かつ高精度な次世代波浪推算モデルの開発に資することを目的としている。

2. 非線形エネルギー輸送の高精度計算法

非線形相互作用による波浪のエネルギースペクトルの時間発展を記述する Boltzmann 積分は Hasselmann (1962) により導出された。単位時間に各成分波に輸送されるエネルギーを T と記すと, これは次式で表される。

$$T(k_4) = \omega_4 \int \cdots \int dk_1 dk_2 dk_3 G(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ \times \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \\ \times \{n_1 n_2 (n_3 + n_4) - n_3 n_4 (n_1 + n_2)\} \cdots \cdots (1)$$

ここに, $n_j = n(k_j) = F(k_j)/\omega_j$ ($j=1, \cdots, 4$) は波数ベクトル k_j の波の作用 (密度), $F(k_j)$ は波数スペクトル, ω_j は角周波数で, $\omega_j^2 = g k_j \tanh k_j h$ を満足する。また, G は相互作用係数である。式 (1) は 4 波共鳴の非線形相互作用を表す式で, 4 波共鳴条件:

$$k_1 + k_2 = k_3 + k_4 \cdots \cdots (2)$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \cdots \cdots (3)$$

を満足する成分波間で非線形相互作用が生じる。

共鳴する 4 つの成分波の波数配置を適切に表現するものとして, 図-1 に示す 4 波共鳴相互作用図がある。図-1 の上段は深海波の 4 波共鳴相互作用図で, 下段は有限水深域の波浪の 4 波共鳴相互作用図である。4 つの共鳴

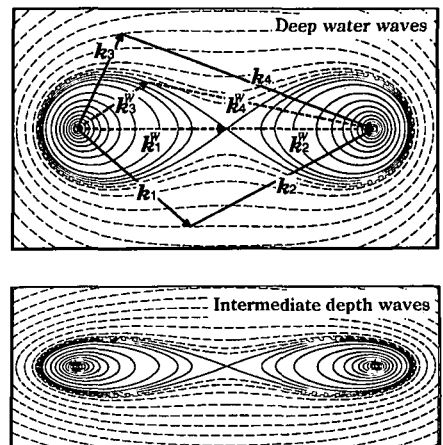


図-1 4 波共鳴相互作用図 (上: 深海波, 下: 有限水深波)

* 正会員 工博 独立行政法人港湾空港技術研究所
** Ph.D. Delft University of Technology

する波の波数ベクトルには図-1に示す関係があり、例えば、 k_3 と k_4 が決まると k_1 と k_2 は自由度を1つ残して決まる。また、図-1の下段に示すように、有限水深の場合には、深海の場合に比べて、4波共鳴相互作用図は上下に縮んだ扁平な形状になる。

式(1)の積分は共鳴条件(2)と(3)により3つの独立変数による3重積分に変換できる。したがって、波数スペクトル $F(k)$ が与えられれば、共鳴条件の計算と3つの独立変数に関する3重のDOループによって、波数スペクトル $F(k)$ における各成分波間の非線形エネルギー輸送が計算できる。しかし、実際の計算に際してはBoltzmann積分の特異点の問題があり、また多大な計算時間を要するため、現実的な連続スペクトルを対象として非線形エネルギー輸送の計算を試みた例は少ない。既往の計算例の内、Hasselmann・Hasselmann (1981)は有限水深域の波浪場を対象とした計算例を報告した。しかし、その結果は数値的に不安定である。橋本ら(1996)は深海波を対象としたMasuda (1980)の方法および小松ら(1993)の方法を拡張し、有限水深域における波浪の非線形エネルギー輸送の計算法を開発し、幾つかの方向スペクトルを対象として有限水深域における波浪の非線形エネルギー輸送を計算した。

いま、3つの独立変数として θ_1, ω_3 および θ_3 を選び、式(1)に含まれる2つのデルタ関数を式(2)、(3)を用いて消去し、変数変換

$$\left. \begin{aligned} \bar{\theta}_1 &= \theta_1 - \theta_2 & \bar{\theta}_2 &= \theta_2 - \theta_1 \\ \bar{\theta}_3 &= \theta_3 - \theta_4 & \Omega &= \ln \omega_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

を施すと、非線形エネルギー伝達関数 T は最終的に次式で表される。

$$\begin{aligned} T(\omega_4, \theta_4) &= \frac{2\omega_4 k_4}{C_\theta(k_4)} \int_{-\pi}^{\pi} d\bar{\theta}_3 \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \int_{-\pi}^{\pi} d\bar{\theta}_1 \\ &\times \{k_1 k_3 \omega_3 G\} / \{C_\theta(k_1) C_\theta(k_3) S\} \\ &\times \{n_1 n_2 (n_3 + n_4) - n_3 n_4 (n_1 + n_2)\} \dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここに、式(5)の導出に際しては、式(1)で k_1, k_2 に関する対称性から $|k_1| \leq |k_2|$ すなわち $\omega_1 \leq \omega_2$ が仮定されている。また、分母 S は $\delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)$ から生じたもので、次式で与えられる。

$$S = \left| 1 + \frac{C_\theta(k_2)}{C_\theta(k_1)} \frac{k_1 - k_2 \cos \bar{\theta}_1}{k_2} \right| \dots\dots\dots (6)$$

S は $\omega_1 = \omega_2$ かつ $\bar{\theta}_1 = 0$ のとき、 $S = 0$ になる。すなわち、式(5)は特異点を有しており、その特異点は平面 $\bar{\theta}_1 = 0$ 上でかつ次式で定義されるパラメータ γ の $\gamma = 0$ の曲線に沿って存在する。

$$\gamma = \sqrt{g k_a} \tanh k_a h / 2 / \omega_a - 1 / \sqrt{2} \dots\dots\dots (7)$$

式(5)の積分はBoltzmann積分の対称性を考慮すれば、例えば図-2(左)に示す領域で積分すればよい(Masuda, 1980)。図-2(左)に見られるように、条件 $k_1 \leq k_2$ (ある

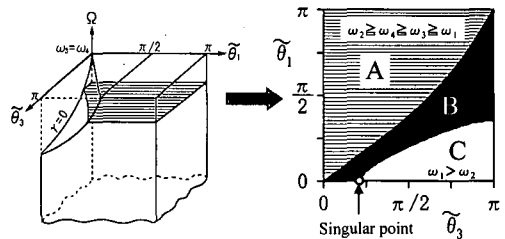


図-2 積分領域の概略図(左)とその断面(右)

いは $\omega_1 \leq \omega_2$)によって、3平面 $\bar{\theta}_3 = \pi, \omega_3 = \omega_1, \bar{\theta}_1 = 0$ と曲面 $\bar{\theta}_1 = \theta(\bar{\theta}_3, \Omega)$ によって囲まれた左上部の領域は除外される。すなわち、 $|\bar{\theta}_1|$ の範囲は $\gamma < 0$ の場合に次式によって制限される。

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{k_a}{2k_1} \right) \leq |\bar{\theta}_1| \leq \pi \dots\dots\dots (8)$$

橋本ら(1996)は、深海波を対象としたMasuda (1980)による式(1)の特異点処理法を、有限水深域に適用可能な形に拡張している。

小松ら(1993)は、Hasselmann・Hasselmann (1981)がBoltzmann積分を効率的に積分するために導入したBoltzmann積分の対称性を考慮した方法をMasuda (1980)の厳密計算法に導入し、非線形相互作用の計算を高速化した(RIAM法)。これは、Boltzmann積分によって表現される共鳴成分波間の相互作用の性質に基づくもので、式(1)で成立する関係式、

$$-\frac{\delta n_1}{\delta t} dk_1 = -\frac{\delta n_2}{\delta t} dk_2 = \frac{\delta n_3}{\delta t} dk_3 = \frac{\delta n_4}{\delta t} dk_4 \dots\dots (9)$$

を利用し、共鳴4波の角周波数に関して、

$$\omega_3 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_4 \dots\dots\dots (10)$$

の大小関係を設けることで、計算時間を短縮するものである。図-2(右)は、図-2(左)の積分領域で $\Omega = \text{const.}$ の断面、すなわち $\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_3$ 平面図を示したものである。角周波数に式(10)の大小関係を設けることにより、積分範囲は、図-2(右)のCを除くA+Bの範囲から、Bの範囲のみの積分となり、数値積分の計算時間が短縮される。

小松ら(1993)は、さらに式(5)の積分範囲を式(10)の最高周波数 ω_4 と最低周波数 ω_3 との比で制限し、 $\omega_4/\omega_3 > 3$ となる共鳴配置については計算しないようにすることによって、計算精度を保ったままさらに計算時間の短縮を図っている。

実際の計算に際しては、次式のように周波数を等比間隔、方向角を等差間隔で離散化して数値積分する。

$$\omega_{i+1} = R_\omega \omega_i, \quad \theta_{j+1} = \theta_j + \Delta\theta \dots\dots\dots (11)$$

小松らは $R_\omega = 1.06 \sim 1.1$ とし、 $\Delta\theta$ については、安定で滑らかな解を得るためには $\Delta\theta \leq 10^\circ$ 程度の値を与える必要があることを示している。

橋本ら(1996)は、Masuda (1980)の厳密計算法を有

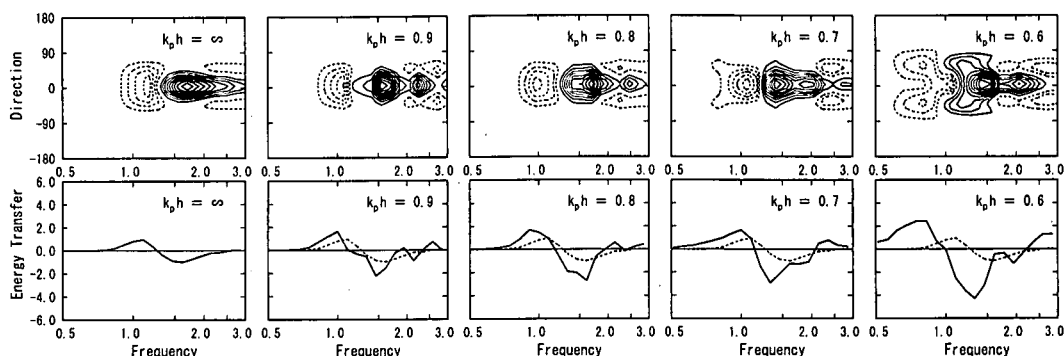


図-3 PM スペクトルを対象とした有限水深域における非線形エネルギー輸送の計算例 ($\omega_3 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_4$)

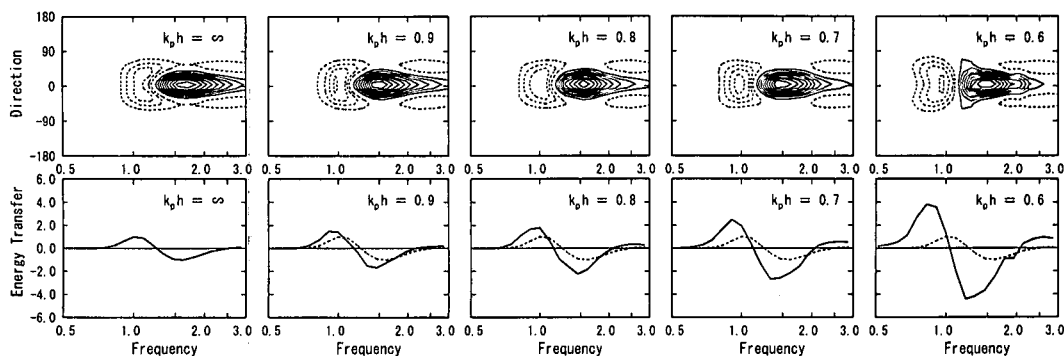


図-4 PM スペクトルを対象とした有限水深域における非線形エネルギー輸送の計算例 ($\omega_1 \leq \omega_3 \leq \omega_4 \leq \omega_2$)

限水深域に適用可能な形に拡張した方法に、小松ら (1993) が導入したのと同様に、式 (10) のような角周波数の大小関係を設けて数値積分を行った。しかし、この方法は、深海波の場合には安定した計算値が得られるが、有限水深の場合には計算が不安定になる。

小松・増田 (2000) は、この計算の不安定性は、有限水深域における 4 波共鳴相互作用の性質に起因するとして、橋本ら (1996) の計算法を改良した。すなわち、有限水深域では図-1 の下段に示すように共鳴配置の形状が扁平になる。このため、独立変数の 1 つとして与えた θ_1 の変化に対して、共鳴条件で決まる ω_1 の変化が大きくなることに起因して計算が不安定になる。そこで小松・増田 (2000) は、この影響を緩和するために、共鳴 4 波の角周波数の大小関係を、

$$\omega_1 \leq \omega_3 \leq \omega_4 \leq \omega_2 \quad \cdots \cdots (12)$$

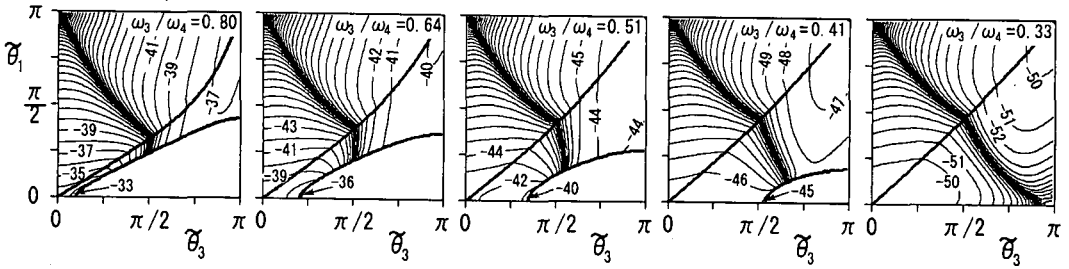
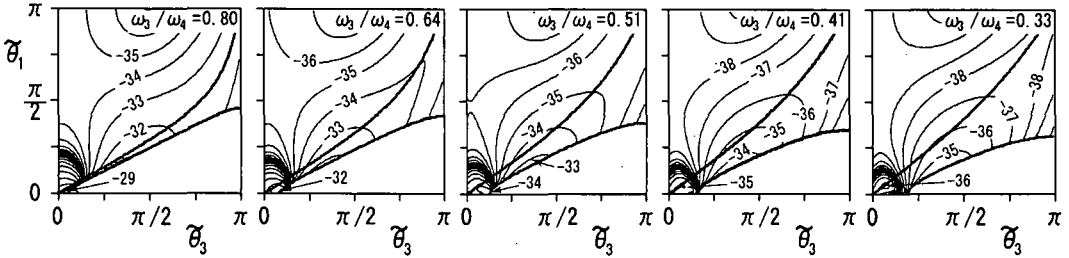
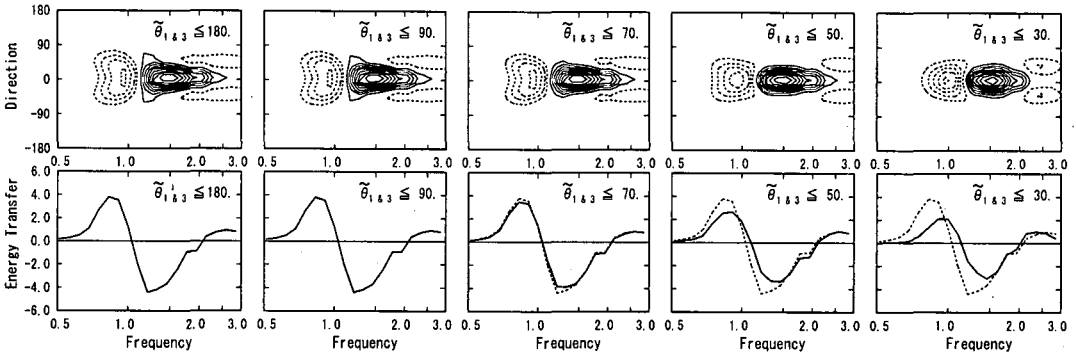
として、角周波数 ω_1 の波を内側ではなく外側の共鳴対の低周波数成分として計算した。こうすることにより、 $\gamma = 0$ に沿って位置する特異点の処理も不要になる。なお、実際の計算に際しては、あらかじめ与える内側共鳴対の波数成分とは異なり、外側共鳴対の波数成分は数値積分の波数格子点上にはない。深海波を対象として開発した RIAM 法 (小松ら, 1993) では外側共鳴対の波数成分を最寄りの格子点で単純に置き換えても精度の劣化は見ら

れなかったが、有限水深域を対象とする計算の場合には、波数空間上の周囲 4 点で代表させる方式を新たに採用し、精度の向上を図っている (小松・増田, 2000)。

3. 非線形エネルギー輸送の計算例

有限水深域における非線形エネルギー輸送の計算精度を検討した。検討に際しては、周波数集中度 γ や方向集中度 $S_{\max}$ を変えたいくつかの方向スペクトルを対象として、異なる $k_p h$ の条件で計算した結果を比較した。

図-3 は、橋本ら (1996) の方法により計算した非線形エネルギー輸送の計算例である。図の上段は、非線形エネルギー輸送を周波数と方向角の関数で表示したもので、実線は負値、点線は正値を示している。図の下段は上段の図を方向角について積分し、周波数の関数として表示したものである。ただし、図では深海波の非線形エネルギー輸送の絶対値の最大値を 1 として正規化して図示している。下段の有限水深域の計算例中の実線はそれぞれの水深における非線形エネルギー輸送の計算値を、点線は深海波の非線形エネルギー輸送の計算値を併せて示している。図-4 は、小松・増田 (2000) の改良法を用いて同じ条件で非線形エネルギー輸送を計算した例である。図-3 では有限水深域の場合に計算値がやや不安定であったが、図-4 では、滑らかな安定した計算値となり、

図-5 深海波の場合の式(5)の被積分関数における $\Omega = \text{const.}$ の断面の等値線表示図-6 有限水深波の場合の式(5)の被積分関数における $\Omega = \text{const.}$ の断面の等値線表示図-7 $\tilde{\theta}_1$ と $\tilde{\theta}_3$ に関する積分範囲を変えた場合の非線形エネルギー輸送の計算精度の相違

小松らの改良により計算精度が向上することが分かる。

4. 非線形エネルギー輸送の計算の効率化に関する検討

(1) 高精度化に関する検討

小松・増田(2000)の改良によって非線形エネルギー輸送の計算精度が向上する理由を再考する。橋本ら(1996)の計算方法では、RIAM法(小松ら, 1993)と同様に式(10)の条件を課したため、図-2(右)の領域Bを積分すればよかった。しかし、領域Bには図-2(右)に示す位置に特異点があり、この点近傍で式(5)の被積分関数は大きく変化する。そこで橋本ら(1996)はこの特異点近傍の積分を解析的に求め、これにより計算精度を保持しようとした。しかし、図-3に見られるようにこれは不十分であった。

一方、小松・増田(2000)は式(10)の代わりに式(12)

の大小関係を設けた。これにより式(5)の積分範囲は図-2(右)の領域Aになる。領域Aには特異点は含まれていないため、式(5)の被積分関数は領域Bに比べて領域Aでは緩やかに変化する。これが、小松・増田(2000)の修正によって安定した値が得られる理由であろう。

(2) 効率計算のための工夫

式(12)の大小関係を課して式(5)を積分すれば安定した値が得られる。しかし、図-2(右)に見られるように、領域Aは領域Bに比べて広く、領域A内の共鳴4波の組み合わせ数は領域B内の数倍多くなり、これに比例して計算時間を要することになる。この欠点を解消するため、式(5)の被積分関数の性質を調べた。

図-5は深海波の被積分関数を、図-6は有限水深 $kh=0.8$ の場合の被積分関数を、 ω_3/ω_4 をパラメータとして $\tilde{\theta}_3$ と $\tilde{\theta}_1$ の関数として図示したものである。図-5と図-6では被積分関数の対数値を等値線で示している。

図-5と図-6を比較すると、有限水深の場合には非線形エネルギー輸送への寄与が大きいと考えられる $\omega_3/\omega_1 \approx 1$ では、 $\bar{\theta}_1 \approx \bar{\theta}_3 \approx 0$ 近傍に被積分関数の大きな値が局在している。すなわち、有限水深の場合には式(5)の積分に寄与する4波共鳴成分は $\bar{\theta}_1$ と $\bar{\theta}_3$ が小さい範囲に集中している。そこで、 $\bar{\theta}_1$ と $\bar{\theta}_3$ の積分範囲を 180° から 90° , 70° , 50° および 30° と変えて式(5)を積分した結果が図-7である。下段の図中の点線は $\bar{\theta}_1$ と $\bar{\theta}_3$ の積分範囲が 180° の場合の計算値を比較のために併せて示している。図-7に見られるように、積分範囲をある程度狭い範囲に限定しても計算精度はあまり劣化しない。このように非線形エネルギー輸送の性質を考慮して積分範囲を狭めると、領域A全体を積分するよりも計算時間の短縮が図れることから、実用上有用な工夫である。

5. 有限水深域における非線形エネルギー輸送の高精度計算法のSWANへの適用

有限水深域における非線形エネルギー輸送の高精度計算法をDelft工科大学が開発した浅海波浪推算モデルSWANに導入した。また、このモデルをオーストラリアのGeorge湖で得られた波浪観測データに適用した。George湖の波浪観測プロジェクトは有限吹送距離で有限水深域の波浪の発達特性を研究するために実施されたもので、この成果はYoung・Verhagen (1996) に報告されている。この観測では水深が約2m、吹送距離が1.3km~16kmの範囲で、風向・風速の観測と併せて波浪観測が8カ所で行われた。図-8はこの8カ所で観測された波浪の周波数スペクトルを示したものである。図中の一点鎖線が観測データ、点線がDIAを用いたSWANの計算結果、実線が非線形相互作用の高精度計算法を導入したSWANの計算結果である。有限水深域の波浪推算で非線形相互作用の高精度計算法を導入した計算は、これが世界初の試みである。図-8に見られるように、DIAを用いたSWANではスペクトルピークの低周波数側へのシフトが不十分であるが、有限水深域の非線形相互作用の高精度計算法を導入した計算例では、この周波数シフトが妥当に働き、計算精度が著しく向上する。

6. おわりに

有限水深域における非線形エネルギー輸送の高精度かつ効率的な計算法を開発し、浅海波浪推算法SWANに導入してその有用性を確認した。今後は、波浪推算における他の物理メカニズムについてもさらに検討し、より信頼性の高い次世代波浪推算法の開発を進める予定である。

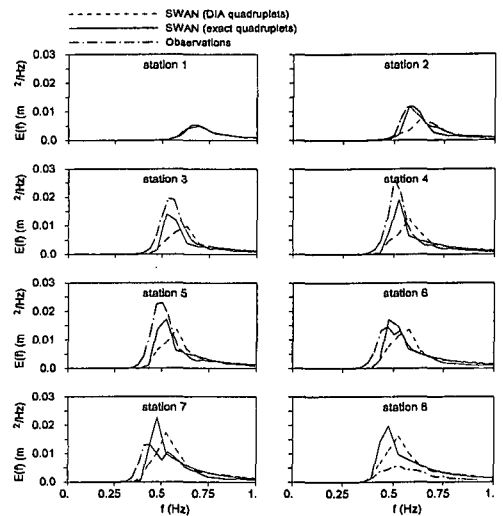


図-8 有限水深域における非線形エネルギー輸送の厳密計算法を導入したSWANの計算例

参考文献

- 小松幸生・草場忠夫・増田 章 (1993): 風波成分波間の非線形エネルギー伝達一新しく開発した効率的な計算法について、九州大学応用力学研究所報, 第75号, pp. 121-146.
- 小松幸生・増田 章 (2000): 有限水深域における非線形エネルギー伝達計算法の開発、次世代型波浪予報モデルの開発研究, 力学シミュレーション研究センター室内実験分野研究成果集 No. 3, pp. 119-136.
- 橋本典明・鶴谷廣一・中川康之 (1996): 有限水深域における海洋波の非線形相互作用に関する数値計算, 海岸工学論文集, 第43巻, pp. 191-195.
- Hasselmann, K. (1962): On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum, Part 1, General theory, J. Fluid Mech., 12, pp. 481-500.
- Hasselmann, S. and K. Hasselmann (1981): A symmetrical method of computing the nonlinear transfer in a gravity wave spectrum, Hamb. Geophys. Einzelschriften, Reihe A: Wiss. Abhandl., 52, 138 p.
- Hasselmann, S. and K. Hasselmann (1985): Computations and Parameterizations of the Nonlinear Energy Transfer in a Gravity-Wave Spectrum. Part I: A New Method for Efficient Computations of the Exact Nonlinear Transfer Integral, J. Phys. Oceanogr., 15, pp. 1378-1391.
- Holthuijsen, L. H. et al. (2000): SWAN Cycle III version 40.11, USER MANUAL, Delft University of Technology, 124 p.
- Masuda, A. (1980): Nonlinear Energy Transfer Between Wind Waves, J. Phys. Oceanogr., 10, pp. 2082-2092.
- WAMDI Group (13 Authors) (1988): The WAM model-A third generation ocean wave prediction model, J. Phys. Oceanogr., 18, pp. 1378-1391.
- Young and Verhagen (1996): The growth of fetch limited waves in water of finite depth. Part 2. Spectral evolution, Coastal Engineering, 29, pp. 79-99.