

設計波高に係わる極値統計分布の裾長さパラメータとその意義

合 田 良 実*

極値統計分布の裾の広がりを表す新しいパラメータとして、50 年確率波高と 10 年確率波高との比で定義される裾長さパラメータを提唱する。このパラメータの値は標本の変動係数と結びついており、毎年最大風速、毎年最大日雨量、および高波の極値データに対する最適分布から求めた観測値は理論値と良く一致した。日本沿岸の裾長さパラメータの代表値および外国での値が提示されている。構造物の性能設計では、裾長さパラメータを設定して所定の極値分布関数の尺度・位置母数の値を求め、解析を行う必要がある。

1. ま え が き

近年の土木構造物の設計では、確率理論を取り入れた信頼性設計法が主流となっておりつつある。なかでも、性能設計は防波堤など、設計外力（波力）に確率的な上限値が存在しない場合には不可欠な設計手法であり、Takahashi ほか（2001）は性能設計を今後の海岸・港湾構造物の設計法として推奨している。防波堤であれば、供用期間中の堤体の総滑動量が性能評価の指標となる。

こうした総滑動量の推定値は、防波堤の設置水深が浅くない限り、波浪の極値分布の選定に大きく影響される。先に合田（2001）は、極値分布確率密度関数の右側（波高の大きな側）の裾の広がりを表す指標として 50 年確率波高と 10 年確率波高との比率を取り上げた。すなわち、

$$\gamma_{50} = H_{50}/H_{10} \quad \dots\dots\dots (1)$$

である。このときは γ_{50} を歪み度 (skewness) パラメータと名付けたけれども、数理統計での用語との混乱を避けるため、今後は裾長さパラメータ (spread parameter) と呼ぶことにする。

本論文では、まずケーソン防波堤の最適設計波高が裾長さパラメータの値に支配されることを例示する。次に、 γ_{50} が極値資料の変動係数（標準偏差と平均値の比）によって規定される無次元パラメータであることを示す。最後に、構造物の性能設計を行う際に、裾長さパラメータを設定して極値分布の尺度・位置母数を求める方法について説明する。

2. 極値確率分布と基準化変量

本論文では、高波の極値解析に用いられる極値 I 型、極値 II 型、およびワイブル分布を対象として議論を進める。これらの分布関数 $F(x)$ と基準化変量 y_R の表式は以下の通りである。

極値 I 型分布 (FT-I) :

$$F(x) = \exp\{-\exp[-(x-B)/A]\} : -\infty < x < \infty \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$y_R = -\ln\{-\ln[1-1/(\lambda R)]\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

極値 II 型分布 (FT-II) :

$$F(x) = \exp\{-[1+(x-B)/kA]^{-k}\} : B-kA \leq x < \infty \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$k = 2.5, 3.33, 5.0, \text{ \& } 10.0$$

$$y_R = k\{[-\ln[1-1/(\lambda R)]]^{-1/k} - 1\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ワイブル分布 :

$$F(x) = 1 - \exp\{-(x-B)/A\}^k : B \leq x < \infty \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$k = 0.75, 1.0, 1.4, \text{ \& } 2.0$$

$$y_R = [\ln(\lambda R)]^{1/k} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで x と y_R は確率統計量とその基準化変量であり、 k , A , および B はそれぞれ形状、尺度、位置母数である。 λ は極値事象の年間平均発生回数であり、 R は再現期間 (年) である。極値 II 型分布とワイブル分布は本来は 3 母数関数であるが、ここでは形状母数 k を上に示すように各 4 種類の値に固定し、2 母数分布関数として取り扱う。

再現期間 R 年に対する確率波高 H_R は基準化変量 y_R と尺度・位置母数 A および B を用いて次のように求められる。

$$H_R = Ay_R + B \quad \dots\dots\dots (8)$$

この二つの母数は長さの次元を持つ量であり、極値データの標本ごとに異なる値を持つ。また、同じ標本に異なる分布関数を当てはめると分布ごとに別の値となる。したがって、それらの値から分布関数の裾の広がり

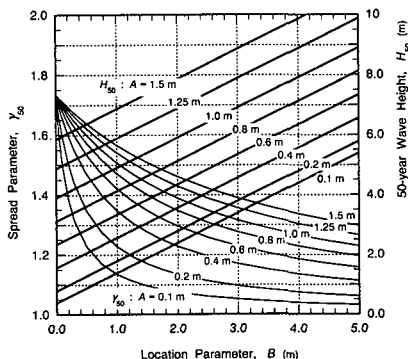


図-1 尺度母数 A と位置母数 B の値による裾長さパラメータ γ_{50} と 50 年確率波高 H_{50} の変化

を見積もることはむずかしい。図-1は極値Ⅰ型分布で尺度母数を $A=0.1\sim 1.5$ m, 位置母数を $B=0\sim 5.0$ m の範囲で変えたときの、裾長さパラメータ γ_{50} および 50 年確率波高 H_{50} の変化を示したものである ($\lambda=1$ の場合)。

図の左側の座標軸は裾長さパラメータに対するもので、図の右側の座標軸は 50 年確率波高に対するものである。この図から、たとえば 50 年確率波高が $H_{50}=7.5$ m の状況は $A=0.7$ m と $B=4.77$ m, $A=1.0$ m と $B=3.60$ m, $A=1.5$ m と $B=1.65$ m などの組合せで成立することが分かる。ただし、これらの組合せで得られる裾長さパラメータ γ_{50} はそれぞれ 1.18, 1.28, 1.49 と大きく異なる。したがって、50 年確率波高が同じであり、その確率分布が極値Ⅰ型という同一の分布関数であっても、50 年を超える長い再現期間に対する極大波高の出現確率は大幅に異なるのである。

3. 裾長さパラメータの影響の事例

防波堤の性能設計では、使用する波高の極値分布関数によって異なる設計断面が得られる。これについて合田 (2001) が先に発表した検討結果を簡単に紹介する。対象は図-2 に示すケーソン防波堤であり、沖波として 50 年確率波高 ($H_{1/3})_{0D}=8.0$ m, 有義波周期 ($T_{1/3})_{0D}=12.0$ s を考え、50 年間の供用期間中の総滑動量をモンテカルロ法で算定した。そして、供用期間中の総滑動量が 0.3 m 以下にとどまる確率が 90% となるものを最適設計とした。

計算では設置水深をいろいろ変え、また波高の極値分布関数を 2 系統に変化させた。一つは指数分布 (ワイブル分布の $k=1.0$) で裾長さパラメータを 1.10~1.35 に変化させたもの、もう一つは数種の極値分布関数についてそれぞれ代表的な裾長さパラメータを与えたものである。すなわち、ワイブル分布の $k=2.0$ ($\gamma_{50}=1.10$), $k=1.4$ ($\gamma_{50}=1.15$), および $k=0.75$ ($\gamma_{50}=1.30$), ならびに極値Ⅰ型 ($\gamma_{50}=1.20$) と極値Ⅱ型の $k=10$ ($\gamma_{50}=1.35$) の 5 ケースである。これらの分布関数の尺度・位置母数は裾長さパラメータが所定の値になるように設定した。

最適設計としては設計波高の再現期間を 50 年に限定せず、上述の総滑動量 0.3 m 以下の確率 90% の条件を満たす波浪条件でケーソンの所要幅を算出した。こうして

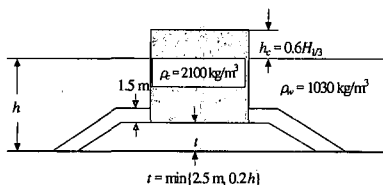


図-2 性能設計の対象のケーソン防波堤の断面

選定された最適設計波高を示したのが図-3 である。設置位置が 20 m よりも深いと最適設計波高は 50 年確率波高 8.0 m よりも大きくなり、16 m 以浅では碎波効果によって 50 年確率波高よりも小さくなる。

また図で明らかなように、指数分布による最適設計波高とそれ以外の分布関数による結果との間にはほとんど差異がない。やや目立つのは水深 28 m, 裾長さパラメータ $\gamma_{50}=1.35$ の場合であるが、それでも最適設計波高の差は 3.5% にとどまる。この図-3 の結果は、性能設計におけるケーソン防波堤の最適設計が極値分布の関数形ではなく、その関数に与えられた裾長さパラメータに依存することを明示するものである。

このように極値分布の関数形よりも裾長さパラメータの値が影響力が大きいことは、各種の分布関数の形状を比較すると明らかである。図-4 は裾長さパラメータを

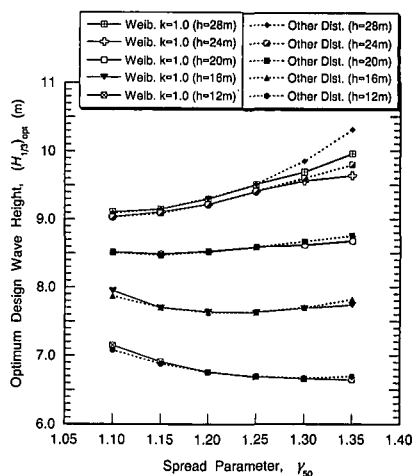


図-3 ケーソン防波堤の最適設計波高 ($H_{1/3})_{opt}$ と裾長さパラメータ γ_{50} との関係

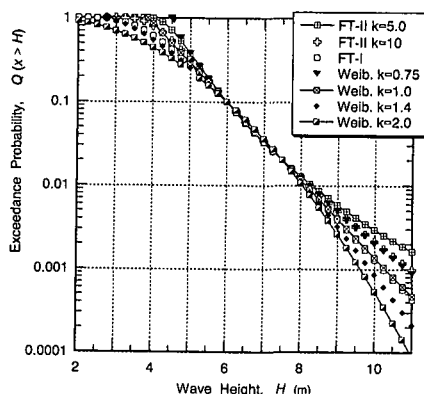


図-4 裾長さパラメータ $\gamma_{50}=1.25$ の各種極値分布関数における波高の超過確率の比較

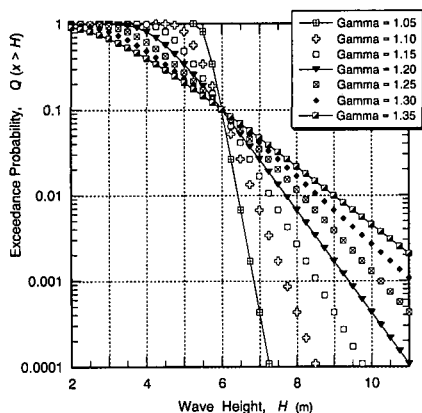


図-5 極値 I 型分布で裾長さパラメータ γ_{50} を 1.05~1.35 で変化させたときの波高の超過確率

$\gamma_{50}=1.25$ に固定し、10 年確率波高を $H_{10}=6.0$ m, 50 年確率波高を $H_{50}=7.5$ m に設定して、各種の極値分布関数について各波高レベルの超過確率 Q を比較したものである。10 年および 50 年確率波高を固定しているのので、どの分布関数も $H_{10}=6.0$ m で $Q=0.1$, $H_{50}=7.5$ m で $Q=0.02$ の点を通る。波高が 5 m 以下および 9 m 以上では分布関数による差異が目立つけれども、防波堤の最適設計に影響する中央部分では分布関数の差異が僅かである。

一方図-5 は、極値 I 型分布で裾長さパラメータ γ_{50} を 1.05~1.35 に変えたときの各波高レベルの超過確率を比較したものである。10 年確率波高は 6.0 m に設定して共通である。このように波高の確率分布を定める際には、分布関数を極値 I 型と指定するだけでは不十分であり、裾長さパラメータの指定が不可欠である。

4. 裾長さパラメータの理論値

(1) 標本から推定される母数の値

極値統計データの 1 組は標本と呼ばれる。この標本の特性値は平均 x_{mean} および標準偏差 σ である。これらは極値分布関数の尺度・位置母数と次の関係にある。

$$\sigma = \alpha k A, \quad x_{\text{mean}} = \beta A + B \quad \cdots (9)$$

母集団における比例定数 α と β は極値分布関数ごとに式 (10)~(12) のように定められる。

極値 I 型分布：

$$\alpha = \pi/6^{1/2}, \quad \beta = 0.57722 \quad \cdots (10)$$

極値 II 型分布：

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= k[\Gamma(1-2/k) - \Gamma^2(1-1/k)]^{1/2} \\ \beta &= k[\Gamma(1-1/k) - 1] \end{aligned} \right\} \quad \cdots (11)$$

ワイブル分布

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= [\Gamma(1+2/k) - \Gamma^2(1+1/k)]^{1/2} \\ \beta &= \Gamma(1+1/k) \end{aligned} \right\} \quad \cdots (12)$$

ここに $\Gamma(x)$ はガンマ関数を表す。また、 k は標本の標準偏差と母集団の標準偏差との比を表す係数であり、これは標本の大きさ（データ個数）の関数として合田 (1990b, p. 300) に記載されている。

式 (9) の関係を書き直すと、標本の平均と標準偏差から尺度母数 A および位置母数 B が次のように求められる。これが積率法による母数推定である。ただし、censoring を行って下位のデータを削除した標本には適用できない。

$$A = \sigma/\alpha k, \quad B = x_{\text{mean}} - \beta\sigma/\alpha k \quad \cdots (13)$$

(2) 再現確率波高と裾長さパラメータ

式 (13) によって母数推定値が得られれば、再現期間 R 年に対する再現確率期待量 x_R は式 (14) で求められる。

$$x_R = A y_R + B = x_{\text{mean}} + (y_R - \beta)\sigma/\alpha k \quad \cdots (14)$$

したがって式 (1) で定義した裾長さパラメータは標本の変動係数 $X = \sigma/x_{\text{mean}}$ の関数として式 (15) で求められる。

$$\begin{aligned} \gamma_{50} &= H_{50}/H_{10} \\ &= 1 + (y_{50} - y_{10})X/\alpha k / [1 + (y_{10} - \beta)X/\alpha k] \quad \cdots (15) \end{aligned}$$

裾長さパラメータを 100 年確率波高に対して定義して γ_{100} で表すと、これは式 (16) で求められる。

$$\begin{aligned} \gamma_{100} &= H_{100}/H_{10} \\ &= 1 + (y_{100} - y_{10})X/\alpha k / [1 + (y_{10} - \beta)X/\alpha k] \quad \cdots (16) \end{aligned}$$

式 (15) と (16) で計算されるこの二つの裾長さパラメータ γ_{50} と γ_{100} との間には、両式を変形して導かれる次の線形関係が成立する。

$$\gamma_{100} = 1 + [(y_{100} - y_{10})/(y_{50} - y_{10})](\gamma_{50} - 1) \quad \cdots (17)$$

この γ_{100} と γ_{50} の間の比例係数 $(y_{100} - y_{10})/(y_{50} - y_{10})$ は極値分布の関数形によって変化するけれども、その変化は小さい。たとえば、形状母数 $k=2.5$ の極値 II 型分布ではこの比例係数が 1.664 であるのに対し、 $k=2.0$ のワイブル分布でも 1.365 の値である。また、極値事象の年間平均発生率 λ の影響をほとんど受けない。したがって、50 年確率波高に対する裾長さパラメータ γ_{50} が分かれば、100 年確率波高に対する γ_{100} の値を容易に推定できる。

5. 観測値と理論値の比較

(1) 使用する極値統計資料

本論文では、表-1 に示す 3 種類の極値統計資料について裾長さパラメータを算出し、理論値と比較する。毎年最大風速と毎年最大日雨量のデータは合田 (1990a) が解析したものであり、高波の極大値については Goda ら (2000) が報告している。

毎年最大値資料については、その定義によって平均発生率は $\lambda=1$ である。一方、高波についてはまずやや低めの閾値を用いて高波の事象を選別し、それぞれの波高のピーク値の資料について再び閾値を変えた censoring を

表一 使用する極値統計資料の概要

対象とする極値データ	地点数	K	N
毎年最大風速	128	37-59	37-59
毎年最大日雨量	58	76-101	76-101
高波の極大値	30	5.7-25.5	39-431

注：Kは有効統計年数，Nは標本の大きさ（データ個数）

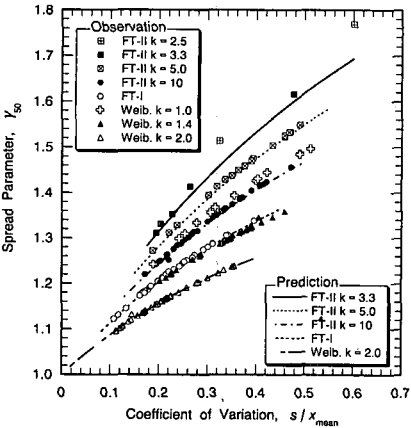
行って、できるだけ等質性を確保するようにした。平均発生率は選別した高波について $\lambda=4.6\sim29.1$ であり、表一1中のNは第2の閾値で残った標本中のデータ個数である。

(2) 裾長さパラメータ γ_{50} の解析結果

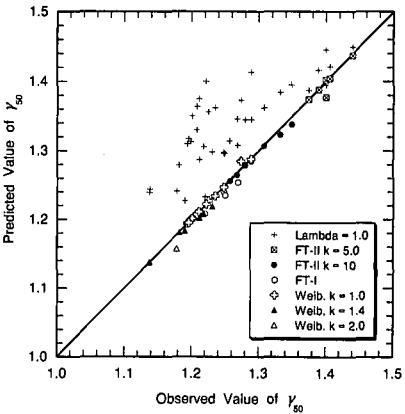
極値データの各標本に対して最小2乗法で母数推定を行い、最適合分布を見いだして各種の再現確率統計量を推定した。この結果から50年確率統計量に対する裾長さパラメータ γ_{50} を求めたうち、毎年最大風速および毎年最大日雨量に関する結果を図一6に示す。各種の記号は観測値、曲線は標本の変動係数から求めた理論値である。

なお、毎年最大風速の変動係数は0.107~0.370の範囲にあり、そのうち0.330を超えるものは6ケースのみである。一方、毎年最大日雨量は変動係数が0.291~0.601の範囲にあり、0.330以下のものは6ケースである。すなわち、後者は年毎の変動が極めて大きな統計量である。

図一6では観測値と理論値がよく一致しており、裾長さパラメータ γ_{50} が標本の変動係数で定まるという式(15)の妥当性が証明される。さらに図一6は、変動係数が同じであっても当てはめられた極値分布関数によって裾長さパラメータの値が異なること、また極値分布関数が指定されても標本の変動係数の値によっては裾長さパラメータが広い範囲で変化することを例示している。す



図一6 毎年最大風速と毎年最大日雨量に対する裾長さパラメータ γ_{50} の観測値と理論値の比較

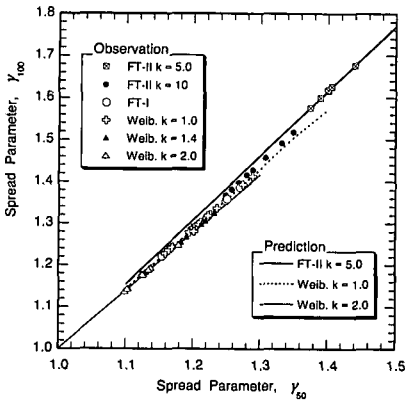


図一7 高波の極大値に対する裾長さパラメータ γ_{50} の観測値と理論値の比較

なわち、海岸港湾構造物の性能設計の場合のように設計波高を超える大波高の確率影響を吟味するときには、極値分布関数を指定しただけでは不十分であり、裾長さパラメータの値も併せて指定することが必要である。

表一1の波高極大値の資料については、 γ_{50} の算定式(15)が基準化変量 y_{50} と y_{10} を含み、これが式(3)他のように高波の平均発生率 λ の影響を受けるため、図一6のような形で直接に変動係数に対してプロットすることができない。そのため、 λ を考慮して求めた理論値を観測値と対比したのが図一7である。この図には、平均発生率を $\lambda=1$ と仮定した場合の値も+印で示してある。

この図の作成に当たっては観測地点数が多くないために最適合分布関数だけでなく、次最適合分布関数について求めたものも使用した。観測値と理論値の整合性は図一6ほど良くはない。これは極大値資料に対して式(13)のような積率法で母数推定を行うことによる誤差ではないかと思われる。しかし、 $\lambda=1$ と仮定した場合には



図一8 二つの裾長さパラメータ γ_{50} と γ_{100} の間の線形回帰の関係

裾長パラメータが過大に推定される。これは毎年最大値資料に比べてデータの上限値は変わらないまま下限値が小さくなっており、このため標本の変動係数が大きく算出されるためである。

(3) 裾長パラメータ γ_{50} と γ_{100} の関係

既に式 (17) で導いたように、 γ_{50} と γ_{100} の二つの裾長度パラメータの間には線形回帰の関係があるはずである。これを検証したのが図-8 である。これは高波の極大値 30 地点のデータで最適および次最適分布関数について求めた結果である。この図でも観測値と理論値の一致は良好である。

6. 裾長度パラメータの利用法

(1) 裾長度パラメータによる尺度・位置母数の決定

以上に述べてきたように、裾長度パラメータ γ_{50} や γ_{100} は単なる見かけのパラメータではなく、標本の変動係数に密着した極値分布の基本パラメータである。海岸港湾構造物の性能設計では、設計地点の波浪の極値分布特性を正しく取り入れることが必要であり、その際には極値分布関数と併せて裾長度パラメータの値を適正に選定しなければならない。

極値分布関数の母数の内、形状母数 k は関数の選定の際に定められる。尺度母数 A と位置母数 B は対象地点に固有の値であるが、これらは 50 年確率波高と裾長度パラメータとから次のように計算される。

$$A = H_{50}(1 - 1/\gamma_{50}) / (\gamma_{50} - \gamma_{10}) \quad \cdots \cdots (18)$$

$$B = H_{50} - A\gamma_{50} \\ = H_{50}[1 - (1 - 1/\gamma_{50}) / (1 - \gamma_{10}/\gamma_{50})] \quad \cdots \cdots (19)$$

(2) 裾長度パラメータの代表値

先に Goda ら (2000) は日本沿岸の高波の極大値資料を解析し、海域ごとに高波の母集団分布の推定を試みた。その結果、太平洋北岸ではワイブル分布の $k=1.0$ 、太平洋南岸の台風による波浪については極値 I 型、日本海沿岸では台風による高波を除外してワイブル分布の $k=1.4$ が母集団分布である可能性が高いことを指摘した。この極値資料についてそれぞれの海域の推定母集団分布をあてはめて母数推定を行い、裾長度パラメータを求めてその海域ごとの平均値と標準偏差を算出した結果が表-2 である。これから、海域ごとに裾長度パラメータの値が異なることが明らかである。

日本沿岸以外の高波の極値解析としては、国際水理学会の海洋水理部会のワーキンググループが発表した 2 地点の資料がある (Van Vledder et al., 1993)。1 箇所はノルウェーの大西洋沿岸の Haltenbanken であり、もう 1 個

表-2 日本沿岸の高波の裾長度パラメータ

海 域	母分布関数	地点数	$(\gamma_{50})_{\text{mean}}$	$\sigma(\gamma_{50})$
太平洋北岸	ワイブル $k=1.0$	10	1.2113	0.0133
太平洋南岸	極値 I 型	9	1.2430	0.0193
日本海沿岸	ワイブル $k=1.4$	11	1.1306	0.0038

所はアラスカ沖合の北東太平洋の Kodiak である。前者は 9 年間のブイ観測データ、後者は 20 年間の波浪追算結果である。解析結果として報告されている最適分布関数とその母数値を使って裾長度パラメータを求めたところ、次のように比較的小さな値が得られた。

Haltenbanken 地点: $\gamma_{50}=1.115$

Kodiak 地点: $\gamma_{50}=1.133$

すなわち、この 2 地点は日本海沿岸の高波の極値分布に近い特性を持つといえる。

7. む す び

新しく提唱した裾長度パラメータは極値分布関数の重要なパラメータであり、海岸・港湾構造物の性能設計に大きな影響を与える。尺度母数と位置母数は極値分布関数の具体的な確率計算に不可欠であるけれども、分布関数の一般的特性を表示するには不向きであり、また異なる地点同士の極値分布の比較に使うことができない。これらの短所を補うものが裾長度パラメータである。今後の海岸・港湾構造物の性能設計では、裾長度パラメータの値を指定した上で極値分布関数を選択することが必要である。

参 考 文 献

- 合田良実 (1990a): 極値統計における異常値の棄却基準, 土木学会論文集, No. 417/II-5, pp. 245-254.
- 合田良実 (1990b): 港湾構造物の耐波設計 (増補改訂), 鹿島出版会, 333 p.
- 合田良実 (2001): 防波堤の信頼性設計における極値分布の選択とその影響, 海洋開発論文集, 第 17 巻, pp. 1-6.
- Goda, Y., O. Konagaya, N. Takeshita, H. Hitomi, and T. Nagai (2000): Population distribution of extreme wave heights estimated through regional analysis, *Coastal Engineering 2000*, ASCE, pp. 1078-1091.
- Takahashi, S., K. Shimosako, and M. Hanzawa (2001): Performance design for maritime structures and its application to vertical breakwaters, *Proc. Advanced Design of Maritime Structures*, Port and Harbour Res. Inst., (2001), pp. 63-73.
- Van Vledder, G., Y. Goda, P. Hawkes, E. Mansard, M. J. Martin, M. Mathiesen, E. Peltier, and E. Thompson (1993): Case studies of extreme wave analysis: a comparative analysis, *Ocean Wave Measurement and Analysis*, ASCE, pp. 978-992.