

ラグランジュ方程式による打ち上げ波帯流体運動の 2 次近似解

出口 一郎*・浅川 敬之**・澤田 崇博***

打ち上げ波帯での遡上, 流下といった流体運動を, 複雑な数値計算を行うことなく解析する目的で, ラグランジュ表記された連続方程式と運動方程式を摂動展開することによって 2 次近似解を求めた。このとき, 2 次近似解に危険項が含まれるのを避けるため, Poincare-Lighthill-Kou の方法を用いた。2 次近似解による再現性を検討するため, 2 次元及び平面水槽内で, 斜面上を遡上・流下する波動の波形などの測定を行った。2 次近似解は, 1 次近似解と比較して斜面上の波先位置の時間変化の非対称性, 最大遡上点の増大と最低流下点の減少といった実測された波形をより精度良く表現できることがわかった。

1. ま え が き

打ち上げ波帯での漂砂移動, 構造物への波の打ち上げなどを解析するには, 打ち上げ波帯・遡上域での流体運動の解析が必要不可欠である。このような領域での流体運動を解析するにあたり, 従来は, オイラーの運動方程式あるいは何らかの形で波動の非線形性の影響を取り込んだ波動方程式を数値的に解くことによって解析されてきた。しかし数値計算を行う場合は, 煩雑な手続きが必要となり, さらに数値的な誤差を生ずることは避けられない。これらの問題点を避けるため, ラグランジュ方程式を用いた打ち上げ波帯における流体運動に対する 1 次近似解が誘導されている (首藤, 1966, 合田他, 2000)。ラグランジュ方程式は, オイラー方程式と同じパラメータで摂動展開した場合の 1 次近似解によってオイラー方程式の 2 次近似解以上の非線形性を表現できることが知られているが, 1 次近似解のみでは汀線位置の時間変動が正弦的になるなどの問題点が残されている。

本研究では, ラグランジュ方程式に基づき, 2 次元および 3 次元斜面上での流体運動に対する 2 次近似解を誘導し, 2 次元水路及び平面水槽内での斜面遡上波に関する実験を行うことにより, その適用性を検討することを目的としている。

2. ラグランジュ方程式による浅海域の波動に対する 2 次近似解

(1) 基礎方程式

図-1 に示す 3 次元波動場をラグランジュ座標で考える。初期時刻 $t=t_0$ に (a,b,c) にある水粒子が, 時刻 $t=t$ には (x,y,z) に変位する。水粒子が受ける圧力を p とすると, 連続式と運動方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}=1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p,y,z)}{\partial(a,b,c)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

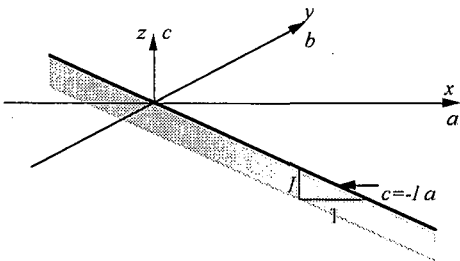


図-1 座標系

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\frac{1}{\rho} \frac{\partial(x,p,z)}{\partial(a,b,c)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=-g-\frac{1}{\rho} \frac{\partial(x,y,p)}{\partial(a,b,c)} \quad \dots\dots\dots (4)$$

境界条件としては, 自由水面では初期水面を形成していた粒子はつねに水面にあり, 水底では水底にあった粒子は水底を離れることはしないとする。すなわち,

$$p=0, \text{ on } c=0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} z=-ia, \text{ on } c=-ia... \text{ 傾斜海浜} \\ z=0 \text{ on } c=-h... \text{ 水平床} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

式 (1)~(4) を, 水平, 鉛直方向の代表長 l, d で無次元化し, 無次元量 $A=a/l, B=b/l, C=c/d, X=x/l, Y=y/l, Z=z/d, P=p/\rho g d, T=t/l$ を用いて表示する。長波性の波動 ($\delta=d/l \ll 1$) を対象とし, X, Y, Z, P, T を, 初期値 A, B, C, P_0, τ 周りに摂動展開する。このとき, 無次元化された海底勾配は, $I=i(l/d)$ となる。

$$\left. \begin{aligned} X &= A + \delta X_1(A,B,C,T) + \delta^2 X_2(A,B,C,T) + \dots \\ Y &= B + \delta Y_1(A,B,C,T) + \delta^2 Y_2(A,B,C,T) + \dots \\ Z &= C + \delta Z_1(A,B,C,T) + \delta^2 Z_2(A,B,C,T) + \dots \\ P &= P_0(A,B) + \delta P_1(A,B,C,T) \\ &\quad + \delta^2 P_2(A,B,C,T) + \dots \\ T &= \tau + \delta \tau_1(\tau) + \delta^2 \tau_2(\tau) + \dots \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

これらの式を無次元化された連続式と運動方程式に代入し, δ のオーダーで整理する。 δ_0 及び δ_1 のオーダーに対する方程式については, すでに報告している (合田他, 2000) ので, ここでは省略し, δ_2 の式のみ以下に記す。

* 正 会 員 工 博 大阪大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻
** 正 会 員 工 修 日本中央競馬会
*** 学生会員 大阪大学大学院工学研究科土木工学専攻

また、時間に対して摂動展開するのは、 δ_2 のオーダーの方程式群に危険項が含まれるのを避けるため Poincare-Lighthill-Kou の方法 (例えば、寺沢, 1970) を適用したものである。

δ_2 に対して

$$\frac{\partial X_2}{\partial A} + \frac{\partial Y_2}{\partial B} + \frac{\partial Z_2}{\partial C} + f_1(A, B, \tau) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 X_2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial Z_2}{\partial A} + \frac{\partial P_2}{\partial A} = 2 \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau} \frac{\partial^2 X_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial \tau^2} \frac{\partial X_1}{\partial \tau} + f_2(A, B, \tau) \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 Y_2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial Z_2}{\partial B} + \frac{\partial P_2}{\partial B} = 2 \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial \tau^2} \frac{\partial Y_1}{\partial \tau} + f_3(A, B, \tau) \quad (10)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial C} - \left(\frac{\partial X_2}{\partial A} + \frac{\partial Y_2}{\partial B} \right) = f_4(A, B, \tau) \quad (11)$$

$$f_1(A, B, \tau) = - \left(\frac{\partial X_1}{\partial A} \frac{\partial Y_1}{\partial B} + \frac{\partial Y_1}{\partial B} \frac{\partial Z_1}{\partial C} + \frac{\partial Z_1}{\partial C} \frac{\partial X_1}{\partial A} - \frac{\partial Y_1}{\partial A} \frac{\partial X_1}{\partial B} - \frac{\partial Z_1}{\partial B} \frac{\partial Y_1}{\partial C} - \frac{\partial X_1}{\partial C} \frac{\partial Z_1}{\partial A} \right) \quad (12)$$

$$f_2(A, B, \tau) = - \frac{\partial P_1}{\partial A} \left(\frac{\partial Y_1}{\partial B} + \frac{\partial Z_1}{\partial C} \right) + \frac{\partial Y_1}{\partial A} \left(\frac{\partial Z_1}{\partial B} + \frac{\partial P_1}{\partial B} \right) + \frac{\partial Z_1}{\partial A} \left(\frac{\partial P_1}{\partial C} - \frac{\partial Y_1}{\partial B} \right) \quad (13)$$

$$f_3(A, B, \tau) = \frac{\partial X_1}{\partial B} \left(\frac{\partial P_1}{\partial A} + \frac{\partial Z_1}{\partial A} \right) - \frac{\partial P_1}{\partial B} \left(\frac{\partial Z_1}{\partial C} + \frac{\partial X_1}{\partial A} \right) + \frac{\partial Z_1}{\partial B} \left(\frac{\partial P_1}{\partial C} - \frac{\partial X_1}{\partial A} \right) \quad (14)$$

$$f_4(A, B, \tau) = \frac{\partial X_1}{\partial A} \frac{\partial Y_1}{\partial B} + \frac{\partial P_1}{\partial B} \frac{\partial Y_1}{\partial C} + \frac{\partial X_1}{\partial C} \frac{\partial P_1}{\partial A} - \frac{\partial Y_1}{\partial A} \frac{\partial X_1}{\partial B} - \frac{\partial Y_1}{\partial B} \frac{\partial P_1}{\partial C} - \frac{\partial P_1}{\partial C} \frac{\partial X_1}{\partial A} \quad (15)$$

ここでは、これらの式に基づき、2次近似解を導き、実験結果と比較する。

(2) 2次元水平床上の2次近似解

まず、表記が単純な2次元水平床 ($X-Z$ 面内) での2次近似解の誘導について述べる。1次近似解は、 σ を無次元各周波数として以下のように与えられている (合田他, 2000)。

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -\frac{h}{\sigma^2} \frac{\partial \eta}{\partial A} e^{-i\sigma\tau}, \quad Z_1 = \frac{h(C+h)}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial A^2} e^{-i\sigma\tau}, \\ P_1 &= -\frac{hB}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial A^2} e^{-i\sigma\tau} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\eta = c_1 e^{i\sqrt{(\sigma^2/h)A}} + c_2 e^{-i\sqrt{(\sigma^2/h)A}} \quad (17)$$

ここに、 c_1 , c_2 は、入射進行波、反射波の振幅に係わる係数である。

式 (8), (11) の Z_2 , P_2 を X_2 で表す。

$$\begin{aligned} Z_2 + P_2 &= \int_0^{-h} \frac{\partial X_2}{\partial A} dC \\ &\quad - \int_{-h}^C \left(\frac{\partial X_1}{\partial A} \frac{\partial Z_1}{\partial C} - \frac{\partial Z_1}{\partial A} \frac{\partial X_1}{\partial C} \right) dC \\ &\quad - \int_0^C \left(\frac{\partial X_1}{\partial A} \frac{\partial P_1}{\partial C} - \frac{\partial P_1}{\partial A} \frac{\partial X_1}{\partial C} \right) dC \quad (18) \end{aligned}$$

式 (18) を式 (9) に代入し、式 (16) の Z_1 及び P_1 を用いて整理すると、 X_2 に関する以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X_2}{\partial \tau^2} - h \frac{\partial^2 X_2}{\partial A^2} &= 2 \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau} \frac{\partial X_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial \tau^2} \frac{\partial X_1}{\partial \tau} \\ &\quad + 3i \frac{\sigma^3}{\sqrt{h}} (c_1^2 e^{2i\sqrt{(\sigma^2/h)A}} c_2^2 e^{-2i\sqrt{(\sigma^2/h)A}}) e^{-2i\sigma\tau} \quad (19) \end{aligned}$$

式 (19) の右辺に危険項が現れないよう、以下の X_2 に関する式と τ_1 に関する2つの式に分離する。

$$\frac{\partial^2 X_2}{\partial \tau^2} - h \frac{\partial^2 X_2}{\partial A^2} = 0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial \tau^2} - 2i\sigma \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau} - 3 \frac{\sigma^3}{\sqrt{h}} \\ \cdot (c_1 e^{i\sqrt{(\sigma^2/h)A}} - c_2 e^{-i\sqrt{(\sigma^2/h)A}}) e^{-i\sigma\tau} = 0 \quad (21) \end{aligned}$$

ただし、式 (21) に含まれる X_1 は、式 (16) を用いて書き換えてある。式 (21) から X_2 が、式 (8), (11) から Z_2 , P_2 が、また式 (21) から τ_1 が以下のように計算される。

$$X_2 = (c_3 e^{2i\sqrt{(\sigma^2/h)A}} + c_4 e^{-2i\sqrt{(\sigma^2/h)A}}) e^{-2i\sigma\tau} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= -2i(C+h) \sqrt{\frac{\sigma^2}{h}} (c_3 e^{2i\sqrt{(\sigma^2/h)A}} A \\ &\quad - c_4 e^{-2i\sqrt{(\sigma^2/h)A}}) e^{-2i\sigma\tau} - \frac{C+h}{h} \sigma^2 \\ &\quad \cdot (c_1 e^{i\sqrt{(\sigma^2/h)A}} - c_2 e^{-i\sqrt{(\sigma^2/h)A}}) e^{-2i\sigma\tau} \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= 2iC \sqrt{\frac{\sigma^2}{h}} (c_3 e^{2i\sqrt{(\sigma^2/h)A}} - c_4 e^{-2i\sqrt{(\sigma^2/h)A}}) e^{-2i\sigma\tau} \\ &\quad - \frac{C}{h} \sigma_2 (c_1 e^{i\sqrt{(\sigma^2/h)A}} - c_2 e^{-i\sqrt{(\sigma^2/h)A}}) e^{-2i\sigma\tau} \quad (24) \end{aligned}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{h}} (c_1 e^{i\sqrt{(\sigma^2/h)A}} + c_2 e^{-i\sqrt{(\sigma^2/h)A}}) (e^{2i\sigma\tau} - e^{-i\sigma\tau}) \quad (25)$$

(3) 2次元傾斜海浜上での2次近似解

斜面上で完全重複波が形成されている状態での解について示す。1次近似解については以下のように得られている。

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \eta}{\partial A}, \quad Z_1 = -\frac{C+IA}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial A^2} - \frac{I}{\sigma^2} \frac{\partial \eta}{\partial A} \\ P_1 &= \frac{C}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial A^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

$$\eta_1 = c_3 \text{BesselJ} \left[0, 2 \sqrt{A} \sqrt{\frac{\sigma^2}{I}} \right] e^{-ia} \dots\dots\dots (27)$$

ここに、BesselJ は、第1種 Bessel 関数、 c_3 は、重複波の振幅に関わる係数である。

この場合も、2次近似解は、水平床上における流体運動と同じ方法で以下のように得られる。

$$X_2 = \frac{1}{4\sigma^2} \frac{\partial \eta_2}{\partial A} \dots\dots\dots (28)$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{C+IA}{4\sigma^2} \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial A^2} - \frac{I}{4\sigma_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial A} - (C+IA) \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial X_1}{\partial A} \frac{\partial Z_1}{\partial C} - \frac{\partial Z_1}{\partial A} \frac{\partial X_1}{\partial C} \right) \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

$$P_2 = \frac{C}{4\sigma^2} \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial A^2} - C \left(\frac{\partial X_1}{\partial A} \frac{\partial P_1}{\partial C} - \frac{\partial P_1}{\partial A} \frac{\partial X_1}{\partial C} \right) \dots\dots\dots (30)$$

$$\eta_2 = c_4 \text{BesselJ} \left[0, 4 \sqrt{A} \sqrt{\frac{\sigma^2}{I}} \right] e^{-2ia\tau} \dots\dots\dots (31)$$

ここに、 c_4 は、重複波の振幅に関する係数で、 τ_1 は、つぎの方程式の解として与えられる。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X_1}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 X_1}{\partial \tau^2} \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial A} \\ &\left\{ (C+IA) \left(\frac{\partial X_1}{\partial A} \frac{\partial Z_1}{\partial C} - \frac{\partial Z_1}{\partial A} \frac{\partial X_1}{\partial C} \right) \right. \\ &\quad \left. + C \left(\frac{\partial X_1}{\partial A} \frac{\partial P_1}{\partial C} - \frac{\partial P_1}{\partial A} \frac{\partial X_1}{\partial C} \right) \right\} + \frac{\partial Z_1}{\partial A} \frac{\partial P_1}{\partial C} \\ &\quad - \frac{\partial P_1}{\partial A} \frac{\partial Z_1}{\partial C} = 0 \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

(4) 3次元傾斜海浜上での2次近似解

この場合も、岸沖方向には重複した波動を考える。1次近似解は以下のように求められている。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 X_1}{\partial \tau^2} &= -\frac{\partial \eta_1}{\partial A} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial \eta_1}{\partial B} \\ Z_1 &= \int_{-IA}^C \left(\frac{\partial X_1}{\partial A} + \frac{\partial Y_1}{\partial B} \right) dC - IX_1(A, B - IA, \tau) \\ P_1 &= \int_0^C \left(\frac{\partial X_1}{\partial A} + \frac{\partial Y_1}{\partial B} \right) dC \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= c_5 \text{Hyperg} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2In}, 1, 2An \right) \\ &\quad \cdot e^{-An} (e^{inB} + re^{-inB}) e^{-i\sigma\tau} \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

ここに、Hyperg() は、Kummer の合流幾何関数、 c_5 は、入射波の振幅、 r は沿岸方向 (y 方向) 反射率に関わる定数で、 n は次式で与えられる沿岸方向の波数である。

$$\frac{\sigma^2}{I} = 2n \left(\frac{1}{2} + J \right) \quad (J=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (35)$$

なお、 n は、汀線の法線に対する入射角 θ と次式で関係付けられる。

$$\theta = \text{Sin}^{-1}(n/\sigma\sqrt{H}) \dots\dots\dots (36)$$

2次近似解は、これらの1次近似解を用いて以下のよう計算される。

$$\frac{\partial^2 X_2}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial \eta_2}{\partial A} \dots\dots\dots (37)$$

$$\frac{\partial^2 Y_2}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial \eta_2}{\partial B} \dots\dots\dots (38)$$

$$Z_2 = -(C+IA)(\eta_2 - f_1) - IX_2 \dots\dots\dots (39)$$

$$P_2 = C(\eta_2 + f_4) \dots\dots\dots (40)$$

$$\begin{aligned} \eta_2 &= c_6 \text{Hyperg} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{In}, 1, 4An \right) e^{-2An} \\ &\quad \cdot (e^{2inB} + re^{-2inB}) e^{-2i\sigma\tau} \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

ここに、 c_6 は2次近似解の振幅、 r は沿岸方向反射率に関わる係数である。また、 τ_1 は、以下の方程式の解として与えられる。

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial X_1}{\partial \tau} + \frac{\partial Y_1}{\partial \tau} \right) \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial \tau^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 X_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \tau^2} \right) \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau} \\ &\quad + f_2 + f_3 - \frac{\partial}{\partial A} \{ (C+IA)f_1 + Cf_4 \} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial B} \{ (C+IA)f_1 + Cf_4 \} = 0 \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

$n \rightarrow 0$ の時の解、式(34)及び式(41)は、式(27)、(31)に漸近する。

これらの式の基づいて浅海域の流体運動を計算するためには、入射波の振幅に対応した係数 $c_i (i=1, 2, \dots)$ を与える必要がある。ここでは、まず基本周波数の振幅と倍周波数成分の振幅比をパラメータとし、2次元傾斜海浜前面で形成される重複波における2次近似解の影響、及び3次元傾斜海浜上で岸沖及び汀線方向に重複する波動の汀線の水粒子変動における2次近似解の影響について考察する。

図-2は、2次元傾斜海浜(勾配1/5)に形成される反射定常波(周期 $T=1.0$ s, 波高 $H=2.4$ cm, $c_1=40$)に対し、基本周波数成分と倍周波数成分の振幅比 $f=c_1/\delta c_4$ を5, 2及び1とした場合の空間波形に関わる η の比較を示したものである。図より、倍周波数成分の増加に伴い、節の位置(水位変動が0となる位置)が変化し、遡上高も大きくなることがわかる。

図-3は、3次元傾斜海浜上(勾配1/5)で、岸沖及び沿岸方向に完全重複波を形成する波動(周期 $T=1$ s, $C_1=35$, $f=\delta c_6/c_5=7$, $r=1$)の汀線位置と沿岸方向に形成される重複波の各位相における波先の水粒子の変位を

示したものである。

また、図-4は、図-3に示す重複波形の節周辺を拡大して示してある。ただし、沿岸方向の反射源において最大遡上が生じた時間を $t=0$ sとし、 $t=0.5$ sまでの変位を示した。1次近似解での $t=0$ s及び $t=0.5$ sの波先は、正弦波形になり、 $t=0.25$ sでは、初期汀線と一致した直線となるのに対し、2次近似解での波先は岸側にとがった波形となり、 $t=0.25$ sにおいては初期汀線と一致した直線にはならない。また、1次近似解による波先水粒子の運動は、初期汀線に直交する直線運動をするのに対し、2次近似解では、図-4に示されるように、節近傍では放物運動をするのが特徴である。

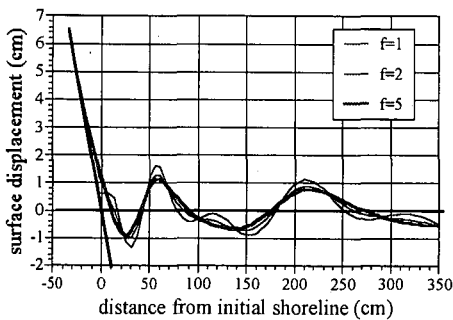


図-2 2次元傾斜海浜上で形成される重複波

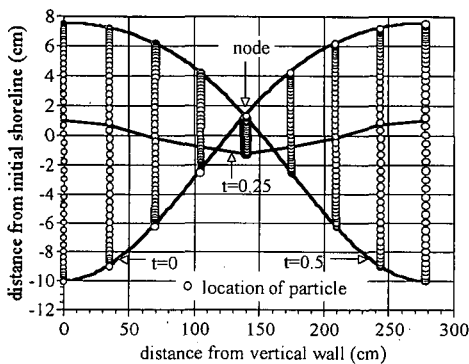


図-3 3次元傾斜海浜上の重複波形と水粒子運動

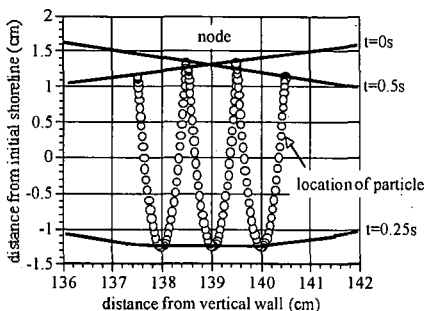


図-4 3次元傾斜海浜上の重複波形（節近傍）

一方、3次元傾斜海浜の岸沖方向には重複し、沿岸方向に進行する波動の水粒子運動の軌跡は、1次近似解では楕円となる。2次近似解では楕円が歪み、岸向きに尖った軌跡を描くが、閉じた軌跡となり、残留する変位は生じない。

3. 打ち上げ波帯における流体運動に関する実験

つぎに、一様勾配斜面上に波を入射させ、打ち上げ波帯での遡上波の時空間波形、トレーサ追跡による水粒子速度、最大遡上高さ、等の計測を行った。実験に使用した水槽は、長さ30m、幅0.7m、高さ0.9mの2次元水槽と、長さ10m、幅20m、高さ0.6mの平面水槽で、それぞれ水槽内に勾配 $\tan\beta=1/3$ 及び $1/5$ の固定床模型海浜を作成し周期 $T=1$ s~2s、波高 $H=1$ cm~4cmの波を入射させた。なお、2次元水槽の傾斜海浜は、水槽内に設置した水平床上に設置し、水平床部の水深は、2次元、平面実験とも30cmに設定した。平面水槽での造波装置は、長さ10mの造波板を駆動するもので、傾斜海浜の長さは約16mである。波の入射角は、汀線の法線に対して水平床部で 30° とした。

2次元実験での遡上波形は水槽側面のガラス面を通してビデオカメラで記録し、斜面上及び水平床上の計3点で容量式波高計による水位変動を計測し、入射波高と反射率を求めた。平面水槽では、水槽上部から波先の運動をビデオカメラで記録すると同時に、4本の容量式波高計による水位変動を計測し、入射波高と岸沖方向及び沿岸方向の反射率を計算した。

図-5に $T=1$ s、 $H=2.1$ cm（水深4.6cmの位置で）の波浪が勾配 $1/5$ の2次元傾斜海浜上に遡上した場合の遡上波形の実測波形と解析解との比較の一例を示す。時間 $T=0$ sは、斜面上への遡上が最大となった時間とし

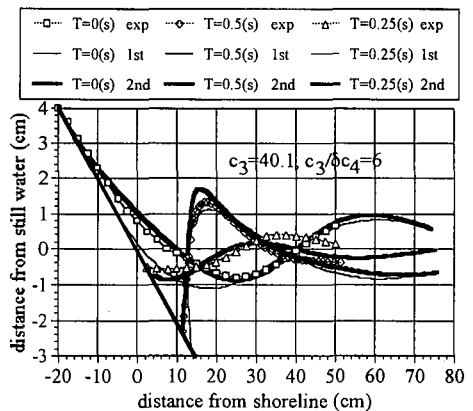


図-5 2次元傾斜海浜上への遡上波形の比較

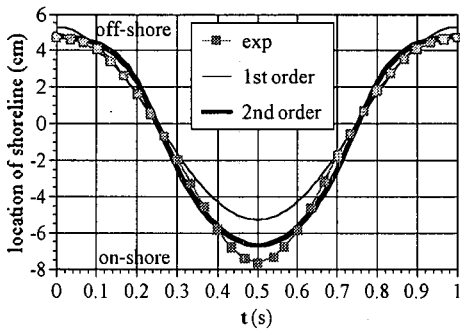


図-6 斜面上斜め入射波による波先時間変動

た。この時の反射率は0.93程度であった。

遡上波形の計算は、式(26)～(32)に基づいて行ったが、波高に関わる係数 c_3 、 c_4 は、形成されると予想される重複波形のほぼ腹の位置(水深4.3 cm)で測定された水位変動時系列から決定した。図中にそれらの値も示す。なお、水平方向の代表長は $\sqrt{g(h+H/2)}T$ 、鉛直方向の代表長は、 H ($h=4.6$ cm, $H=2.1$ cm)とした。

最大遡上点は2次近似解の方が大きくなるが、 $T=0.5$ sにおける斜面上の波先の最下点は2次近似解の方が1次近似解よりも上にある。また、 $T=0.25$ s、すなわち1/4周期後、1次近似解による波形は、初期水面と一致する。実測波形は、 $T=0.25$ (s)も変動している。2次近似解では、時間の尺度が変化しているためこの特徴を再現することができる。

図-6に3次元傾斜海岸に斜め入射する周期 $T=1$ s、波高 $H=0.9$ cm(水深5 cmの位置で)の波浪の波先先端位置時間変化の実測値と解析解の比較を示す。

解析解は、式(33)～(42)を用いて計算し、 c_5 、 c_6 は、

水深5 cmの位置で測定された水位変動時系列から決定した。図中にそれぞれの値を示す。この場合も岸沖方向の反射率はほぼ90%で、沿岸方向の反射率はほぼ0%(式(41)の $r=0$)であった。また、 $t=0$ sは波先が斜面上を流下し、最下点に達した時間に対応する。

一次近似解の時間変動は初期汀線位置の周りに正弦的な変動を示すが、2次近似解による時間変化は岸沖方向に非対称となり、最低流下点は上昇し、最大遡上点はより大きくなる。実測波形も2次近似解により近い波形となるが、最大遡上点付近ではまだ若干の差が残る。

4. 結 語

傾斜海岸上の打ち上げ波帯の流体運動を解析するに当たり、Lagrange表記された連続及び運動方程式をPoincare-Lighthill-Kouの方法を適用して摂動展開することにより、2次近似解を導いた。入射角に関わらず、斜面上で碎波せず重複波が形成される場合の遡上運動は、煩雑な数値計算を必要としない2次近似解でより精度良く再現されることがわかった。

しかし、ラグランジュ方程式を用いた波動解析の特徴であるが、水粒子の軌跡は2次近似解でも閉じてしまう。今後、いわゆる碎波帯内での流体運動への適用、あるいは海浜流との関係といった点についてさらに検討が必要である。

参 考 文 献

- 合田 桂・浅川敬之・出口一郎 (2000): ラグランジュ方程式による遡上波の解析, 海岸工学論文集, Vol. 47, p 191-195.
- 首藤伸夫 (1966): 長波の打ち上げ高, 第13回海岸工学講演会論文集, pp. 216-222.
- 寺沢寛一 (1970): 数学概論 応用編, 岩波書店, pp. 236-246