

時間領域の擬似段波モデルに基づく砕波モデルの開発

平 山 克 也*・原 信 彦**

鉛直方向圧力勾配を用いた砕波判定法によって、進行波と部分重複波の砕波を統一的に判定することを試みた。また、跳水によるエネルギー逸散量が解析的に得られることを利用して、進行波と部分重複波の砕波による波エネルギー減衰を客観的に定量化することを試みた。本研究では、これを時間領域における擬似段波モデルと定義する。断面水路における砕波実験を対象として、それらの再現計算を実施したところ、新たな砕波モデルは、砕波位置における水位変動や流速変動、および砕波帯周辺の波高分布や平均水位分布などを精度良く再現することが確認された。また、不規則波の砕波波高は、合田による波高分布モデルと良く一致した。

1. はじめに

水面の運動学的境界条件を用いて導かれたブジネスク方程式によって砕波現象のメカニズムを直接記述することは困難である。一方、実務において実施される波浪変形計算では、砕波現象自体を解析することよりもむしろ、砕波が周辺の波・流れ場に与える影響を定量化することが重要である。そこで、浅海域における波浪変形計算に多用されるブジネスクモデルにおいて砕波の有無を判定し、砕波によるエネルギー減衰の効果を計算結果に反映させることを目的とした砕波モデルがいくつか提案されている（例えば、佐藤・Kabiling, 1993）。しかし、砕波変形の算定に際し、波速、波向やその方向に対する海底勾配、あるいは経験的に設定される不確定値などを必要とするこれらの砕波モデルは、実海域で見られるさまざまな砕波形態を汎用的かつ客観的に捉えるモデルとはなっていない。

そこで本研究では、海底勾配や砕波の向きに依存せず、砕波の発生や砕波による波エネルギー減衰を客観的に算定する砕波モデルを開発した。この砕波モデルは、砕波時に鉛直圧力勾配が減少することを利用した砕波判定法（灘岡ら, 1996）と、開水路非定常流の段波によるエネルギー逸散が砕波によるエネルギー減衰に類似していることを利用した砕波減衰項（例えば、岩垣ら, 1981）からなる。これを時間発展形の波動モデルに適用するために、特に、非定常な砕波現象における単位時間あたりのエネルギー減衰量が、ある微小時間および微小空間における跳水によるエネルギー損失に等しいと仮定した時間領域における擬似段波モデルを開発した。さらに、断面水路を用いて、進行波および部分重複波の砕波に関する模型実験を行い、両者の砕波形態を統一的に取り扱う新たな砕波モデルの計算精度を検証した。

2. 新たな砕波モデルの構築

2.1 砕波判定法

灘岡ら（1996）は、自由表面における鉛直方向のオイラーの運動方程式を変形し、仮定を一切導入することなく、水位変動 η と表面流速 u_s のみを用いた鉛直方向の圧力勾配式を誘導した。彼らによる砕波実験では、圧力勾配が急激に大きくなりやがてほぼ 0 に近づいたところで砕波が発生することが確認された。このような砕波判定法は、時間発展型の波動モデルにおいて砕波の発生を客観的に知る上で極めて有効である。彼らにならい、本研究では鉛直方向圧力勾配による砕波判定法を採用した。ただし、強非線形な水位変動 η と表面流速 u_s は、弱非線形、弱分散性のブジネスク方程式によって厳密には算定されないため、鉛直方向の圧力勾配式を圧力方程式（1）から以下のように求めた。

$$p = \rho g(\eta - z) + \rho \left\{ z \nabla h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{M}{D} \right) + \frac{1}{2} (2zh + z^2) \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\frac{M}{D} \right) \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 p は圧力、 ρ は水の密度、 g は重力加速度、 h は静水深、 M は流量フラックス、 η は水位である。

式（1）を鉛直方向に偏微分すると、自由表面での鉛直方向圧力勾配は式（2）のように表せる。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = g - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{M}{D} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\frac{M}{D} \right) \dots\dots\dots (2)$$

次に、全水深 D を定数とみなし、移流項と分散項を無視した運動方程式から得られる関係式を利用すると、式（2）は時間微分項を含まない式（3）に置換される。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = g \left(1 + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \dots\dots\dots (3)$$

式（3）では砕波判定と砕波減衰を同時刻で考慮することが可能となるが、代わりに式（2）に比べ、波の非線形性に対する近似誤差が大きくなっている。そこで、後述する検証計算では、式（2）、（3）による砕波判定の精度を比較して、より望ましい砕波判定式を選択した。

* 正会員 工修 (独法) 港湾空港技術研究所海洋・水工部波浪研究室研究官
** 正会員 工修 (独法) 港湾空港技術研究所海洋・水工部波浪研究室研究員

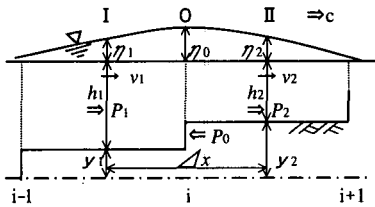


図-1 擬似段波モデルの模式図

2.2 時間領域の擬似段波モデル

砕波による波エネルギー減衰量を客観的に定量化する砕波減衰項は、次のように定式化した。開水路定常流の跳水によるエネルギー逸散量が跳水区間における連続式(4)、運動量保存則(5)およびエネルギー保存則(6)から定式化されることに着目し、これが非定常な砕波現象における単位時間あたりのエネルギー減衰量に等しいと仮定する。一方、跳水区間は、砕波点前後の水面勾配の変曲点に挟まれた区間として定義した。したがって、跳水区間長 L は空間格子間隔 Δx を用いて $L = n\Delta x$ (n は自然数) と表される。ただし、式(4)~(6)は、跳水区間内の微小区間 Δx においても近似的に成り立つことが仮定されている。また、式(6)は断面平均流速を含む流線上において成り立つ。このような砕波減衰モデルを本研究では時間領域における擬似段波モデルと定義する。図-1に、擬似段波モデルの模式図を示す。

$$D_1(v_1 - c) = D_2(v_2 - c) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\rho D_2(v_2 - c)^2 - \rho D_1(v_1 - c)^2 = \int_{-h_1}^{y_1} p_1 dz - \int_{-h_2}^{y_2} p_2 dz - \int_{-h_1}^{y_0} p_0 dz + \int_{-h_2}^{y_0} p_0 dz \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{1}{2g}(v_1 - c)^2 + \frac{p_1}{\rho g} + y_1 = \frac{1}{2g}(v_2 - c)^2 + \frac{p_2}{\rho g} + y_2 + \Delta E \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(4)~(6)より、砕波によるエネルギー減衰量 ΔE が式(7)のように導かれる。

$$\Delta E = \frac{1}{\rho g} \left(\frac{D_0}{D_1 D_2} (P_1 - P_2 + P_0) - \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + h_2 - h_1 \right) \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、

$$D_0 = \frac{1}{2}(D_1 + D_2), \quad P_1 = \int_{-h_1}^{y_1} p_1 dz, \quad P_2 = \int_{-h_2}^{y_2} p_2 dz, \\ P_0 = - \int_{-h_1}^{y_0} p_0 dz + \int_{-h_2}^{y_0} p_0 dz,$$

であり、 v は断面平均流速、 c は波速である。

次に、式(1)を式(2)に代入し、圧力 p を消去する。ここで、式(7)の右辺第2項に含まれる z は、エネルギー保存則(6)が成り立つ流線の深さを意味し、以下のよう求めることができる。すなわち、本研究で用いた

Madsen 型のブジネスク方程式の分散関係は式(8)で表される。ここで、 B は分散項に対する補正項である。

$$\frac{C^2}{gh} = \frac{1 + B(kh)^2}{1 + (1/3 + B)(kh)^2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

一方、Nwogu 型のモデルの分散関係は、式(9)で表される。また、 α は式(10)で定義されている。

$$\frac{C^2}{gh} = \frac{1 - (\alpha + 1/3)(kh)^2}{1 - \alpha(kh)^2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \left(\frac{z}{h} \right) \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 C は位相速度、 k は波数、である。

式(8)、(9)の比較から α と B の関係式が得られ、さらに、これを式(10)に代入することにより、式(8)の分散関係を満足する水深 z を得ることができる。これは、Madsen 型のブジネスク方程式に対して定義される断面平均流速の鉛直深さに相当する。したがって、 $B = 1/15$ のとき、 $z = -0.553h$ と求められる。

一方、砕波減衰項は、運動方程式に対して式(11)左辺第4項のように導入され、式(7)を代入して得られる砕波減衰項の差分式は、式(12)のようになる。

$$\text{局所項} + \text{移流項} + \text{圧力項} + gD \frac{\Delta E}{L} = \text{分散項} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$gD \frac{\Delta E}{L} = (I_1 + J_1 + K) \frac{M_{i-1}^{n+1}}{D_{i-1}^*} + (I_2 + J_2 - 2K) \frac{M_i^{n+1}}{D_i^*} \\ + (I_3 + J_3 + K) \frac{M_{i+1}^{n+1}}{D_{i+1}^*} - (I_1 + J_1 + K) \frac{M_{i-1}^{n+1}}{D_{i-1}^*} \\ - (I_2 + J_2 - 2K) \frac{M_i^n}{D_i^*} - (I_3 + J_3 + K) \frac{M_{i+1}^n}{D_{i+1}^*} \\ + \left(\frac{D_i^* h_i}{D_{i-1/2}^* D_{i+1/2}^*} - 1 \right) g D_i^* \frac{\eta_{i+1/2}^n - \eta_{i-1/2}^n}{\Delta x} \\ + g D_i^* \frac{1}{\Delta x} (h_{i+1/2} - h_{i-1/2} + z_{i+1/2} - z_{i-1/2}) \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、

$$I_1 = \frac{D_i^{*2}}{D_{i-1/2}^* D_{i+1/2}^*} \\ \left\{ \frac{h_{i-1/2}^2}{4 \Delta t \Delta x^2} (h_i - h_{i-1}) - \frac{h_{i-1/2}^3 + h_{i+1/2}^3}{6 \Delta t \Delta x^2} \right\} \\ I_2 = \frac{D_i^{*2}}{D_{i-1/2}^* D_{i+1/2}^*} \left\{ \frac{h_{i-1/2}^2}{4 \Delta t \Delta x^2} (h_i - h_{i-1}) \right. \\ \left. \frac{h_{i+1/2}^2}{4 \Delta t \Delta x^2} (h_{i+1} - h_i) - \frac{h_{i-1/2}^2 - h_{i+1/2}^2}{2 \Delta t \Delta x^2} (h_{i+1/2} - h_{i-1/2}) \right. \\ \left. + \frac{h_{i-1/2}^3 + h_{i+1/2}^3}{3 \Delta t \Delta x^2} \right\} \\ I_3 = - \frac{D_i^{*2}}{D_{i-1/2}^* D_{i+1/2}^*} \\ \left\{ \frac{h_{i+1/2}^2}{4 \Delta t \Delta x^2} (h_{i+1} - h_i) + \frac{h_{i-1/2}^3 + h_{i+1/2}^3}{6 \Delta t \Delta x^2} \right\}$$

$$J_1 = \frac{z_{i-1/2}}{2\Delta t \Delta x^2} \{ (h_i - h_{i-1}) - (2h_{i-1/2} + z_{i-1/2}) \}$$

$$J_2 = \frac{z_{i-1/2}}{2\Delta t \Delta x^2} \{ (h_i - h_{i-1}) + (2h_{i-1/2} + z_{i-1/2}) \} \\ - \frac{z_{i+1/2}}{2\Delta t \Delta x^2} \{ (h_{i+1} - h_i) - (2h_{i+1/2} + z_{i+1/2}) \}$$

$$J_3 = \frac{z_{i+1/2}}{2\Delta t \Delta x^2} \{ (h_{i+1} - h_i) + (2h_{i+1/2} + z_{i+1/2}) \}$$

$$K = \frac{\Delta t}{4\Delta x^2} \left(\frac{D_i^* h_i}{D_{i-1/2}^* D_{i+1/2}^*} - 1 \right) g D_i^{*2}$$

であり、 D^* は連続式から陽的に得られる時刻 $t = n + 1/2$ の仮の全水深である。また、変数の右下の添字は空間格子番号を、右肩の添字は時刻を表し、時刻 $t = n + 1$ の変数は未知量、 $t = n + 1/2$ 、 $t = n$ の変数は既知量である。

3. モデルの検証

3.1 実験条件および計算条件

不規則波造波装置（吸収造波機能付き）を有する全長 35.0 m、幅 0.6 m、深さ 1.2 m の水路を用いて図-2 のような砕波実験を行った。本実験は、斜面上での進行波の砕波実験と、部分重複波の砕波実験に大別される。

進行波の砕波実験では、勾配を 1/10、1/3 の斜面岸側に延長 4.0 m の一様水深部を設け、反射波の発生を極力抑

表-1 模型実験ケース

	斜面勾配	波高 H (cm)	周期 T (s)	水深 h (cm)	波の種類	
Case 1	1/10	2.0	2.00	50.0	進行波	規則波 不規則波
Case 2	1/10	8.0	3.00	50.0		
Case 3	1/10	10.0	2.00	50.0		
Case 4	1/10	12.0	1.00	50.0		
Case 5	1/3	2.0	2.20	50.0		
Case 6	1/3	4.0	2.20	50.0		
Case 7	1/3	6.0	2.20	50.0		
Case 8	1/3	8.0	2.20	50.0		
Case 9	1/10	3.0	0.99	50.0	部分 重複波	規則波
Case 10	1/10	4.0	0.99	50.0		
Case 11	1/10	5.0	0.99	50.0		
Case 12	1/10	2.0	1.41	50.0		
Case 13	1/10	3.0	1.41	50.0		
Case 14	1/10	4.0	1.41	50.0		
Case 15	1/10	1.0	1.41	60.0		
Case 16	1/10	6.0	1.41	60.0		
Case 17	1/10	8.0	1.41	60.0		

*不規則波の波高、周期は 1/3 有義波高、1/3 有義波周期である。

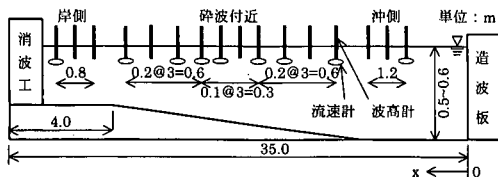


図-2 水路模型および計測機器配置

えるために、水路端に消波工として長さ 1.4 m のヘチマロン（ポリプロピレン樹脂製、空隙率 92.8%）を設置した。造波水深は $h = 0.5$ m とし、波浪条件は、それぞれ規則波 4 ケース、修正プレットシュナイダー・光型型の不規則波 4 ケースを、波高 $H = 2.0 \sim 12.0$ cm、周期 $T = 1.0 \sim 3.0$ s の範囲で設定した。特に不規則波では、2 種類の波群を作用させた。なお、一様水深部の水深は 0.1 m であり、このとき得られた砕波形態は斜面勾配に関わらず、すべて巻き波砕波であった。一方、部分重複波の砕波実験では、斜面勾配 1/10 とし、水路岸側の延長 4.0 m の一様水深部を利用して行った。砕波や反射による水槽内の波浪場の乱れを抑え、かつ部分重複波の形成に十分な反射波を生じさせるために、長さ 0.1 m の消波工を岸側水路端の前面に設置した。造波水深は、 $h = 0.5, 0.6$ m の 2 種類とし、波浪条件は、規則波 6 ケースを波高 $H = 1.0 \sim 8.0$ cm、周期 $T = 0.99, 1.41$ s の範囲で設定した。これらの模型実験ケースを表-1 にまとめて示す。ただし、表-1 は非砕波となる波浪条件を含んでいる。

反射波および砕波の計測は、図-2 に示す位置に容量式波高計、電磁流速計を設置して行った。すなわち、斜面の沖側および岸側には、入反射分離解析用にそれぞれ、波高計を 3 本設置し、消波工による反射率を測定した。また、砕波帯には、目視で確認した砕波位置を中心に、波高計 10 本、流速計 6 本を 10 cm 刻みで密に配置し、砕波点近傍における時間波形や空間波形および鉛直方向圧力勾配を計測した。なお、それぞれの計測機器のサンプリング間隔は 0.05 s とし、データ取得数は、規則波のケースで 6,000、不規則波のケースで 10,000 とした。

以上の模型実験を対象として、砕波変形に関する再現計算を実施した。計算に用いた地形条件や波浪条件は、模型実験と全く同様である。また、消波工による砕波減衰や反射波の振幅や位相を再現するために、岸側端部には、平山（2001）の透水層モデルによる任意反射境界を設定した。また、沖側はスポンジ層による吸収造波境界とした。なお、空間格子間隔 Δx は 0.05 m、時間差分間隔 Δt は 0.02 s である。

3.2 砕波判定に関する検討

砕波と判定される条件は、物理的には水表面の鉛直方向圧力勾配が 0 となることである。しかし、弱非線形のブジネスクモデルにおける砕波判定に、鉛直方向圧力勾配を適用した大山・長谷部（2001）は、判定の条件を 0.5 に緩和している。本研究では、砕波判定式の誘導に際してもブジネスク近似による圧力方程式を利用していることから、砕波判定条件をさらに緩和し、

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = 0.7 \quad \dots \dots \dots (13)$$

と設定した。

図-3は、入射波にCase 8の規則波を用いたとき、碎波判定式(2)あるいは(3)を用いて判定された碎波時刻とその位置を示している。なお、このとき模型実験において目視により観測された碎波位置は、造波板から28.2mであった。式(2)を用いた碎波判定では、模型実験によって確認された碎波の開始位置を精度良く、かつ安定に再現している。しかし、式(3)を用いた場合には碎波の開始点にばらつきがあり、適切な碎波位置を判定できていない。したがって、本研究では、碎波判定式として式(2)を採用した。

3.3 反射率の再現性

数値計算および模型実験で得られた時系列データに対して、合田ら(1976)による入・反射波分離推定法を適用して得られた反射率を図-4に示す。模型実験では、部分重複波が碎波することによって生じる乱れが水槽内で徐々に発達する傾向が見られるため、反射率の推定精度に対する信頼性は必ずしも充分ではない。これらを除けば、模型実験で得られた反射率は、数値計算によって良く再現されていることがわかる。

3.4 碎波による波浪変形

図-5は、数値計算と模型実験で得られた、目視による碎波位置での水位、断面平均流速、および鉛直方向圧力

勾配の時系列変化を示したものである。ここで、模型実験における鉛直方向圧力勾配は、碎波帯に設置した波高計および流速計を用いて次のように算出した。灘岡ら(1996)による鉛直方向圧力勾配式に含まれる水表面流速 u_s は電磁流速計によって直接計測されないため、後藤(1984)の研究を参考に、式(14)より u_s を算出した。ここで、 $\bar{u}$ は、断面平均流速である。

さらに分散項を無視した運動方程式を利用して u_s の空間微分を η の時間微分に置換することにより、幾分近似された鉛直方向圧力勾配が式(15)のように導かれる。

$$u_s = \bar{u} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2} D^2 - \frac{1}{6} h^2 \right) \dots\dots\dots (14)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = g + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + u_s^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2u_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} + \frac{\partial u_s}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left(\frac{\partial u_s}{\partial t} + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \dots\dots\dots (15)$$

進行波の碎波変形を図-5(a)に示す。数値計算で得られた碎波点での水位、断面平均流速に関する時間波形は、変動量、位相ともに実験結果と良く一致している。また、鉛直方向圧力勾配は、数値計算では模型実験ほどの減少は見られないものの、碎波の判定基準とした0.7よりは小さく、かつ位相は良く一致している。一方、部

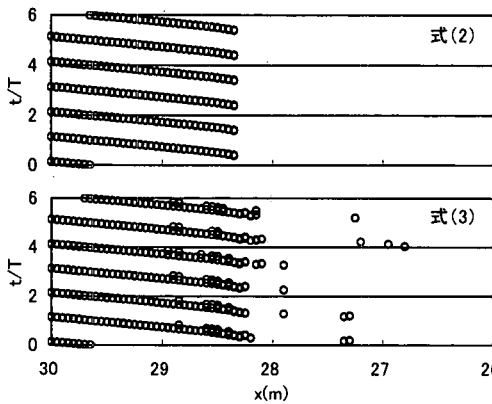


図-3 Case 8 (規則波) の碎波判定位置

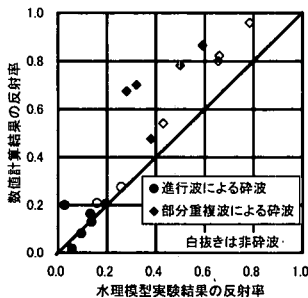
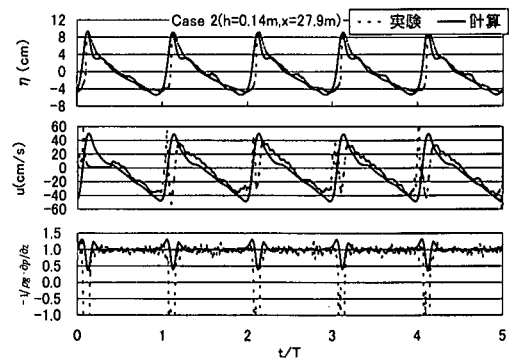
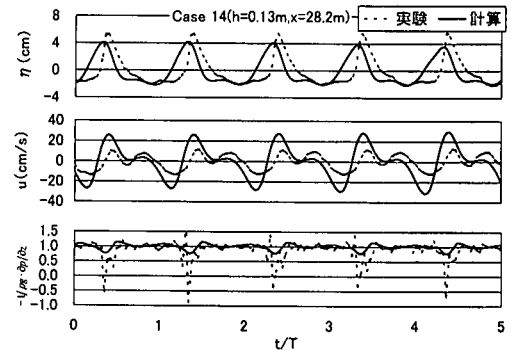


図-4 数値計算と模型実験の反射率



(a) 進行波の碎波 (Case 2)



(b) 部分重複波の碎波 (Case 14)

図-5 水位・断面平均流速・鉛直方向圧力勾配

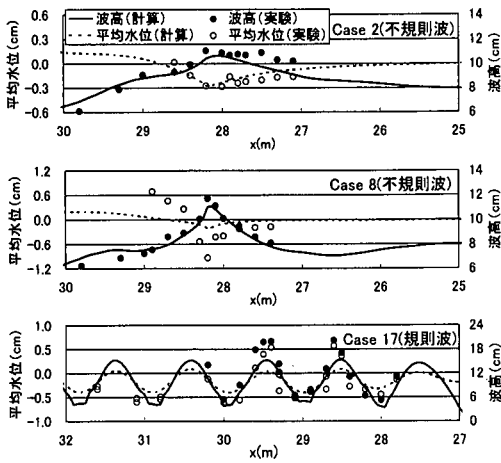


図-6 波高分布と平均水位の比較

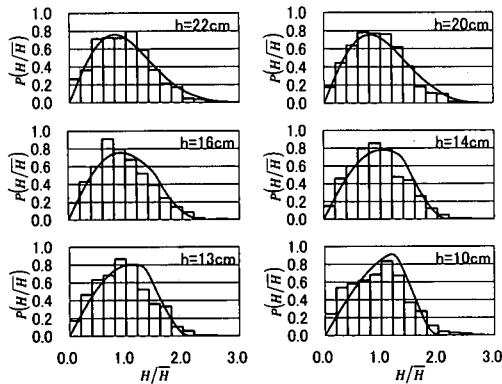


図-7 波高の頻度分布 (Case 3)

分重複波の砕波変形を図-5 (b) に示す。数値計算で得られた水位変動は模型実験よりも小さく、逆に、断面平均流速の振幅は模型実験よりも大きくなっている。これは、重複波の腹の位置が反射波の位相や波速のわずかな違いによって敏感に変化するために、数値計算の砕波位置が、模型実験のそれより 10 cm 程度沖側に現われたためであると考えられる。ただし、鉛直方向圧力勾配の最小値は、目視による砕波位置でも 0.7 程度であった。

3.5 砕波後の波高分布と平均水位

図-6 は、進行波あるいは部分重複波が砕波する場合に得られた砕波帯周辺の波高分布と平均水位分布である。Case 2, 8 はそれぞれ勾配 1/10, 1/3 斜面上に不規則波が入射し進行波的な砕波が生じる場合である。図中の波高は 1/3 有義値であり、後述する各水深での波高頻度分布を用いて統計的に得られたものである。数値計算で得られたいずれの波高分布も、模型実験で得られた砕波直前までの浅水変形および砕波後の波高減衰を概ね良く再現している。砕波帯内の平均水位は、斜面勾配を 1/10 とした Case 2 では、数値計算による再現性は良好である。

しかし、斜面勾配を 1/3 とした Case 8 では、数値計算による平均水位変化量は模型実験のものに比べかなり小さくなる。一方、Case 17 の規則波によって部分重複波の砕波が生じる場合では、波高や平均水位の空間分布は規則的に変動する。両者ともに模型実験で得られた変動量は、数値計算に比べ大きい。ただし、模型実験で計測した水位変動データは、波頂部において砕波により水面を飛び出した水塊高さを含んでいることが懸念される。

3.6 波高の頻度分布による比較

Case 3 の不規則波を対象とし、砕波変形を伴う波高の頻度分布の水深による変化を図-7 に示す。このとき用いた波数は、2 種類のケース合わせて 500 波程度であった。一方、図中の実線は、合田 (1975) の砕波による波高分布モデルである。このモデルでは、波高水深比が小さいときには、Rayleigh 分布に従い、波高水深比が大きくなると砕波によって波高分布が変化する。このとき、砕波限界に幅を持たせていることが特徴である。図より、数値計算で得られた波高分布は、合田の砕波による波高分布モデルと比較的良好に一致していることがわかる。

4. おわりに

鉛直方向圧力勾配を用いた砕波判定法によって進行波と部分重複波の砕波を統一的に精度良く判定できることを示した。また、跳水によるエネルギー逸散量が解析的に得られることを利用して、進行波と部分重複波の砕波による波エネルギー減衰を客観的に定量化する新たな砕波モデルを開発した。さらに、断面水路における模型実験結果を利用して、砕波位置における水位変動や流速変動、および砕波帯周辺の波高分布や平均水位分布などが精度良く計算されることを検証した。

参考文献

- 岩垣雄一・間瀬 肇・田中 剛 (1981): 不規則波の浅水変形モデルについて, 第 28 回海岸工学講演会論文集, pp. 104-108.
- 大山 巧・長谷部雅伸 (2001): 砕波による渦度供給を考慮した砕波帯内の波・流れ場のモデル化, 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp. 121-125.
- 合田良実 (1975): 浅海域における波浪の砕波変形, 港湾技術研究所報告, 第 14 巻, 第 3 号, pp. 59-106.
- 合田良実・鈴木康正・岸良安治・菊地 治 (1976): 不規則波実験における入・反射波の分離推定法, 港湾技術研究所資料, No. 248, 24 p.
- 後藤智明 (1984): アーセル数が大きい場合の非線型分散波の方程式, 土木学会論文集, 第 351/II-2, pp. 193-201.
- 佐藤慎司・Michael Kabiling (1993): Boussinesq 方程式を用いた不規則波の浅水・砕波変形の計算法, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp. 16-20.
- 灘岡和夫・大野修史・栗原 礼 (1996): 波動場の力学状態に基づく砕波過程の解析と砕波実験, 海岸工学論文集, 第 43 巻, pp. 81-85.
- 平山克也 (2001): ブジネスクにおける透水層内の波浪減衰を考慮した任意反射境界処理法の開発, 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp. 26-30.