

陰的 SMAC 法に基づく自由水面流れの高次精度・高速解法

牛 島 省*・禰 津 家 久**

スタガード格子における陰的 SMAC 法をコロケート格子配置上で利用する C-ISMAC 法を提案した。コロケート格子では、圧力勾配をセル境界で評価する必要があることを示し、この結果を考慮して、C-ISMAC 法では予測段階における圧力の取り扱いを改良することで、流速の予測値の残差成分に対して低次のスキームを適用し、高次精度スキームを陽的に扱うことを可能にした。同手法を自由水面流れの計算に適用した結果、QSI スキームを用いた MAC 系解法と同等の精度を有する計算が高速に実行できることが示された。

1. はじめに

自由水面を有する流れに対して、水面形および内部の流動場を精度良く解析するためには、SMAC 系の解法に基づいて高次精度の空間スキームを利用することが多い。これは、SMAC 系解法では高次精度スキームを陽的に扱えるので、その導入が比較的容易であることが大きな要因であると考えられる。ある定常な水面形と内部のフローパターンを数値的に求める場合も同様で、一般に MAC 系の解法を用いて運動方程式を非定常的に計算し、時間的な変動が小さくなる解を得るという方法が取られる。しかし、MAC 系の解法では、CFL 条件や拡散数から発生する安定条件により、1 ステップの時間増分 Δt を十分小さく取らねばならず、通常長時間の計算が必要となる。

一方、SIMPLE 法などに代表される陰的な数値解法では、それらの制約が緩くなるため、場合によっては計算時間を短縮化することが可能である。しかし、移流項等に高次精度の計算スキームを用いる場合には、陰解法に基づく離散化式を導出することが極めて煩雑ないしは困難となる場合が多い。これらを考慮すると、高速計算が可能な陰的解法のアルゴリズムを利用し、しかも高次精度のスキームの扱いが容易な流体計算法の提案が望まれる。

このため、本研究では、Ikohagi・Shin (1991) によりスタガード格子上で提案された陰的 SMAC 法に着目し、これを近年流体解析で有用性が示されつつあるコロケート格子 (Zang ら, 1994; 梶島ら, 1997) へ適用する手法である C-ISMAC 法を提案する。C-ISMAC 法を利用することにより、計算精度を損なわずに、MAC 系の解法と比較して計算時間を大幅に短縮化できることを示す。

2. 予測段階における圧力勾配の評価位置

MAC 系の解法の手順は、予測段階、圧力計算段階、そ

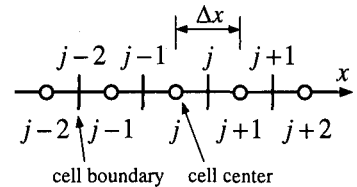


図-1 1次元コロケート格子

して修正段階の3つに区分することができる。コロケート格子配置を用いる場合には、予測段階における圧力勾配の評価位置に着目すると次の3種類の方法が考えられる。1) セル中心で圧力勾配を計算し、流速の推定値を求める方法 (大岡ら, 1997)。この方法を以下では CCP (Cell Center Pressure) スキームと表記する。2) 圧力を含まない推定値をセル境界に空間内挿し、セル境界で圧力勾配を評価する方法 (牛島ら, 2002)。これを CBP (Cell Boundary Pressure) スキームと表す。3) スタガード格子の Fractional Step 法と同様に、予測段階では圧力を全く考慮しない方法。ただし、3) の方法は自由水面流れの計算で流体質量を精度良く保存させることが容易でないため、ここでは CCP および CBP スキームを考察の対象とする。

両スキームの本質的な特徴を把握するため、図-1 に示す 1 次元場の等間隔コロケート格子を考える。

運動方程式を離散化することにより、CCP スキームではセル境界における流速の推定値 $u_{b,j}^*$ は次のようになる。

$$u_{b,j}^* = \frac{u_{c,j+1}^n + u_{c,j}^n}{2} + \frac{CD_{j+1}^n + CD_j^n}{2} \Delta t - \frac{\Delta t}{2\rho} \left(\frac{p_{j+2}^n - p_j^n + p_{j+1}^n - p_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \quad \dots\dots\dots (1)$$

CD は移流項と拡散項、 p は圧力で、これらはセル中心で定義される。また、 ρ は流体密度、 u は流速で、下添字 c , b は、それぞれセル中心およびセル境界で定義された値である。

同様に CBP スキームでは、セル境界における流速の推定値 $\bar{u}_{b,j}$ は次のようになる。

* 正 会 員 工博 京都大学助教授 環境地球工学専攻
** フェロー 工博 京都大学教授 環境地球工学専攻

$$\bar{u}_{b,j} = \frac{u_{c,j+1}^n + u_{c,j}^n}{2} + \frac{CD_{j+1}^n + CD_j^n}{2} \Delta t - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{j+1}^n - p_j^n}{\Delta x} \dots \dots \dots (2)$$

式(1)と式(2)を比較すると、CBPスキームでは近接する圧力からその勾配が評価されており、コンパクトな構成となっている。

次に、圧力計算段階では、予測段階で得られたセル境界上の流速の推定値 $u_{b,j}^n$ あるいは $\bar{u}_{b,j}$ と連続式から導かれる $\phi (= p^{n+1} - p^n)$ に関する連立方程式を解く。予測段階における p^n の扱いの相違により、圧力計算段階における基礎式が異なる。CCPスキームでは、 ϕ の連立方程式は次のようになる。

$$\frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta x^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{u_{c,j+1}^n - u_{c,j-1}^n}{2\Delta x} + \rho \frac{CD_{j+1}^n - CD_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{p_{j+2}^n - 2p_j^n + p_{j-2}^n}{4\Delta x^2} \dots \dots \dots (3)$$

一方、CBPスキームでは次式となる。

$$\frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta x^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{u_{c,j+1}^n - u_{c,j-1}^n}{2\Delta x} + \rho \frac{CD_{j+1}^n - CD_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{p_{j+1}^n - 2p_j^n + p_{j-1}^n}{\Delta x^2} \dots \dots \dots (4)$$

式(3)と式(4)の右辺第3項を比較すると、 p^n の2階微分の離散化式として、CCPスキームではセル幅 $2\Delta x$ 、またCBPスキームではセル幅 Δx の中央差分が用いられていることがわかる。このため、格子分割における最小波長 $2\Delta x$ の圧力振動あるいは水面振動が生じたときに、CCPスキームはこれを正しく検出できない可能性がある。これを確認するために、波長 $2\Delta x$ の水面変動を初期値として与えた場合の計算を行う。この計算では、

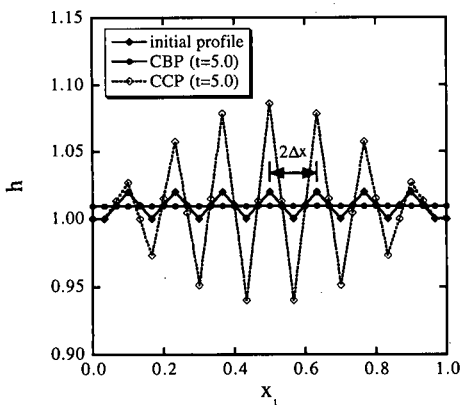


図-2 自由水面形状の比較

適当な代表量で物理量は無次元化されている。計算にはコロケート格子配置に基づく既報(牛島ら, 2002)の手法を用いる。動粘性係数を0.01とすることにより、流体の粘性によって初期の水面変動が徐々に減衰する条件とする。

図-2に初期状態($t=0.0$)および $t=5.0$ における水深 h を示す。同図中では、プロット点は $\Delta x/2$ ごとに付されている。図-2に示すように、CBPスキームによる計算では、初期条件として与えられた水面変動は減衰して、 $t=5.0$ ではほぼ水平な水面形状となる。一方、CCPスキームによる計算結果では、図-2に示されるように、 $t=5.0$ では水面変動が増幅してしまう不自然な結果となった。このように、CCPスキームでは波長 $2\Delta x$ の水面振動や圧力変動を適切に扱えない場合があるため、予測段階ではCBPスキームを用いる必要があると考えられる。

3. C-ISMAC 法による自由水面流れの解法

コロケート格子配置を用いて自由水面流れの計算を行う場合には、CBPスキームを使用する必要があることが上記により示された。このスキームでは、セル中心において流速の推定値が陽的に求められるが、これには圧力勾配が含まれていないので、スタガード格子と異なり、定常解においても推定値と流速値が一致しない。このため、Ikohagi・Shin (1991) によりスタガード格子上で提案された陰的 SMAC 法をコロケート格子で利用するには、何らかの工夫が必要となる。以下では、推定値と流速値の残差成分が0となるように改良を加えた解法である、C-ISMAC 法の計算手順を示す。

基本変数を直交座標系 x_i の流速成分とする場合、自由水面流れに対する Navier-Stokes 式と連続式は一般座標系 ξ_m 上でそれぞれ以下のように表される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_m \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} = -\delta_{i2} g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \dots \dots \dots (5)$$

$$\frac{\partial (JU_m)}{\partial \xi_m} = 0 \dots \dots \dots (6)$$

ここに、 u_i は x_i 方向の流速成分、 U_m は流速の反変成分であり、 t , g , ν はそれぞれ時間、重力加速度そして動粘性係数である。なお、 δ_{i2} はクロネッカーのデルタであり、 x_2 は鉛直上方に向かう座標成分としている。また、 J は変換のヤコビアンである。

式(5)の移流項と拡散項に梯形則を用いて時間方向に離散化すると次のように表される。

$$\begin{aligned}
 u_i^* = & u_i^n - \alpha U_m^n \frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_m} \Delta t - (1-\alpha) U_m^n \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} \Delta t \\
 & + \beta \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \\
 & + (1-\beta) \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \\
 & - \delta_{iz} g \Delta t - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \dots\dots\dots (7)
 \end{aligned}$$

本研究では、Ikohagi・Shin (1991) と異なり、移流項と拡散項の時間差分を独立に扱えるように、 $n+1$ ステップにおける各項には、それぞれ α と β を乗じている。 α と β は 0 から 1 までの値を取り、1 の場合には完全陰解法、0 では陽解法となり、0.5 のときには 2 次精度のクランク・ニコルソン法となる。なお、式 (7) では、 $n+1$ ステップの移流項には U_m^n を用いて線形化している。

CBP スキームでは、セル中心において圧力項を除く次式から流速の推定値 u_i^* が計算される。

$$\begin{aligned}
 u_i^* = & u_i^n - \alpha U_m^n \frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_m} \Delta t - (1-\alpha) U_m^n \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} \Delta t \\
 & + \beta \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \\
 & + (1-\beta) \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t - \delta_{iz} g \Delta t \\
 & \dots\dots\dots (8)
 \end{aligned}$$

ここで、流速の推定値を次式のように残差成分 $\tilde{u}_i$ を用いて表示する。

$$u_i^* = u_i^n + \tilde{u}_i \dots\dots\dots (9)$$

スタガード格子を用いる場合には、流速の推定値に圧力項が考慮されているので、定常解では $\tilde{u}_i$ は 0 へ収束する。しかし、式 (8) では、圧力項が含まれていないため、残差成分が 0 へ漸近しない。このため、C-ISMAC 法では、セル中心における推定値の算出に一時的に圧力勾配を考慮した次式を利用する。

$$\begin{aligned}
 [1 + D(\alpha, \beta)] \tilde{u}_i = & -D(1, 1) u_i^n - \delta_{iz} g \Delta t \\
 & - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \dots\dots\dots (10)
 \end{aligned}$$

ここに、 $D(\alpha, \beta)$ は次式で定義される微分演算子である。

$$\begin{aligned}
 D(\alpha, \beta) = & \alpha \Delta t U_m^n \frac{\partial}{\partial \xi_m} \\
 & - \beta \Delta t \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \dots\dots\dots (11)
 \end{aligned}$$

式 (10) には圧力項が含まれるので、定常解では残差成分 $\tilde{u}_i$ は十分小さい値となる。このため、式 (10) 左辺に含まれる移流項と拡散項に対する空間的な離散化には低次のスキームを利用し、右辺の対応する項には高次精度のスキームを適用する。左辺の移流項に 1 次風上差分、拡散項に中央差分を利用する場合には、式 (10) は次のような $\tilde{u}_i$ の連立 1 次方程式に帰着する。

$$\begin{aligned}
 \sum_{p,q=-1,0,1} a_{j+p,k+q} \tilde{u}_{i,j+p,k+q} \\
 = -U_{m,j,k}^n C_{im1,j,k}^n + DF_{i,j,k}^n \dots\dots\dots (12)
 \end{aligned}$$

ここで、 (j, k) は 2 次元場における格子点を示し、 $a_{j+p,k+q}$ は n ステップの流速と座標変換に関するテンソル量から得られる係数である。本研究では、式 (10) 右辺の移流項には 5 次精度の QSI スキーム (牛島ら, 2001) を用いており、 $C_{im1,j,k}^n$ は、写像空間中において、格子点 (j, k) に対して ξ_m 方向に並ぶ 6 個の格子点上の u_i^n を 5 次スプライン関数で表現したときの 1 次項の係数である。また、式 (12) 右辺の $DF_{i,j,k}^n$ は拡散項であり、ここでは左辺と同様の中央差分を用いた。上記のように、C-ISMAC 法では、高次精度スキームを適用した項を陰的に扱わないで済むので、SIMPLE 系の解法と比較して離散化式の導出が容易である。特に、QSI スキームの場合などのように、陰的な表現自体が困難なスキームにおいては C-ISMAC 法は極めて有効である。

式 (12) は、適当な行列解法を適用して解くことができ、得られた $\tilde{u}_i$ を式 (9) に用いて、セル中心における流速の推定値 u_i^* が求められる。次に、C-ISMAC 法では、以下のように u_i^* から圧力項を取り除く。

$$\tilde{u}_i^* = u_i^* + \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial q^n}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \dots\dots\dots (13)$$

この操作により、 $\tilde{u}_i^*$ は CBP スキームで利用される圧力を含まない流速の推定値となる。

得られた $\tilde{u}_i^*$ をセル境界へ空間内挿し、 n ステップの水深 h^n から計算される静水圧 p_0 を用いて次式より推定値の反変成分 $\tilde{U}_{b,m}$ を得る。

$$\tilde{U}_{b,m} = U_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho} g_{mj} \frac{\partial p_0}{\partial \xi_j} \dots\dots\dots (14)$$

式 (6) で与えられる連続式と式 (14) 等から ϕ に関する方程式が得られる。ここでは、 ϕ は静水圧からの偏差分に相当する。自由水面流れでは、流体質量を精度良く保存させることが重要であるので、C-HSMAC 法 (牛島ら, 2002) により圧力と流速を同時緩和することが有効である。得られた ϕ を用いて次式より p^{n+1} を定める。

$$p^{n+1} = p_0 + \phi \dots\dots\dots (15)$$

また、C-HSMAC 法で求められた水表面上の流速の反変成分 U_{s2}^{n+1} を用いて、次式より $n+1$ ステップの水深を求める (牛島ら, 2002)。

$$h^{n+1} = h^n + \frac{JU_{s2}^{n+1} \Delta \xi_1}{\Delta x_1} \Delta t \dots\dots\dots (16)$$

セル中心における u_i^{n+1} は、重力項をすでに含んでいる $\tilde{u}_i^*$ を用いて次式より求められる。

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \dots\dots\dots (17)$$

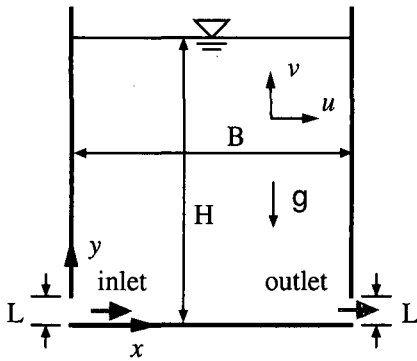


図-3 自由水面を有する容器の形状

4. 計算手法の適用性

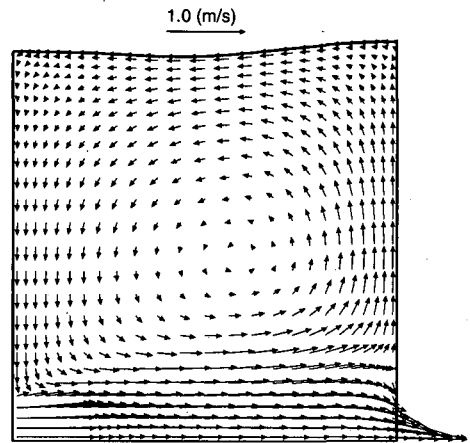
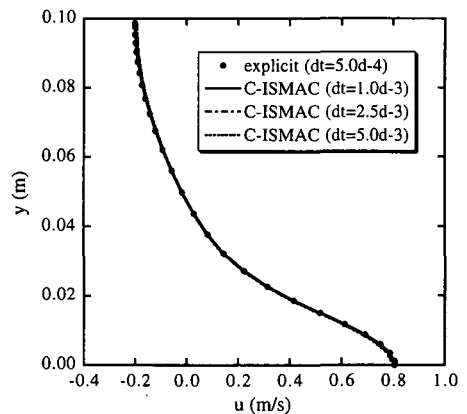
流入のある容器内において、自由水面を有する流れ場の計算に C-ISMAC 法を適用する。流入流速は時間 T_0 内に 0 から一定の値 u_0 まで線形に増加して、最終的に定常となる流れを対象とする。容器の形状を図-3 に示す。直交座標系の原点は容器の左下隅にとり、 x, y 方向の流速成分をそれぞれ u, v とする。初期液位 H および B を 0.1 m 、 L を 0.01 m とし、動粘性係数は $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ 、密度は $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、重力加速度は 10.0 m/s^2 とした。流入流速 u_0 は 1.0 m/s とし、 T_0 は 2 s とした。また、壁面では摩擦が作用しないものとする。計算は、流況がほぼ定常となる $t/T_0 = 3.0$ まで行った。

表-1 に標準計算と C-ISMAC 法に要した計算時間、そして関連するパラメータを示す。ここで、陽解法に基づく同条件の計算 (牛島ら, 2002) を以下では標準計算、また図中では explicit と表記する。標準計算では、 Δt を $1.0 \times 10^{-3} \text{ s}$ とすると計算が不安定となった。一方、C-ISMAC 法では Δt を $5.0 \times 10^{-3} \text{ s}$ としても安定な計算が可能であった。このときの計算時間は、標準計算の約 14% であり、計算速度は約 7 倍となっている。図-4 にこの計算条件で得られた $t = 6.0 \text{ (s)}$ における流速ベクトルの分布を示す。

表-1 計算時間、クーラン数および拡散数の比較

計算手法	$\Delta t \text{ (s)}$	T_n	$1/T_n$	C_{nm}	D_{nm}
標準計算	5.0×10^{-4}	1.00	1.00	0.25	0.17
C-ISMAC	1.0×10^{-3}	0.54	1.86	0.49	0.34
C-ISMAC	2.5×10^{-3}	0.26	3.78	1.23	0.85
C-ISMAC	5.0×10^{-3}	0.14	7.13	2.45	1.70

$t = 6.0 \text{ (s)}$ における容器内の流速分布を比較した結果を図-5 と図-6 に示す。水平方向流速の分布に関しては、図-5 に示されるように、C-ISMAC 法の計算結果は

図-4 C-ISMAC 法で計算された流速ベクトル分布 (計算開始から 6 s 後、 Δt は $5.0 \times 10^{-3} \text{ s}$)図-5 u の分布 ($y/H = 0.5$, 計算開始から 6 s 後)

標準計算の結果とほぼ一致した。一方、図-6 に示される鉛直方向の流速分布においては、 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-3} \text{ (s)}$ とした場合には、容器右端側の上昇流速が標準計算のそれよりわずかに小さく評価されている。以上より、流速分布に関しては、標準計算の 4 ~ 5 倍の計算速度でほぼ同程度の精度を有する計算が可能であると言えよう。

次に、図-7 は $t = 6.0 \text{ (s)}$ における水面形状を比較したものである。容器左右端で水位が高く、右端側で最大水深が生じ、中央部のやや左側で最も水深が低くなった。 Δt を $5.0 \times 10^{-3} \text{ s}$ としたときには、最大および最小水深の差がやや過小に評価されているが、これより Δt を小さくした場合には標準計算の水面形とよく一致する計算結果が得られている。

5. おわりに

本研究では、スタガード格子で提案された陰的 SMAC 法をコロケート格子の流体計算法で利用する C-ISMAC

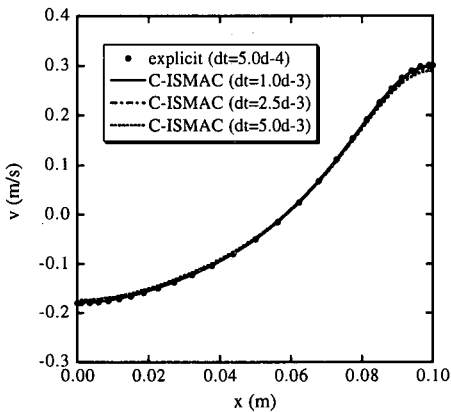


図-6 v の分布 ($x/B=0.5$, 計算開始から 6 s 後)

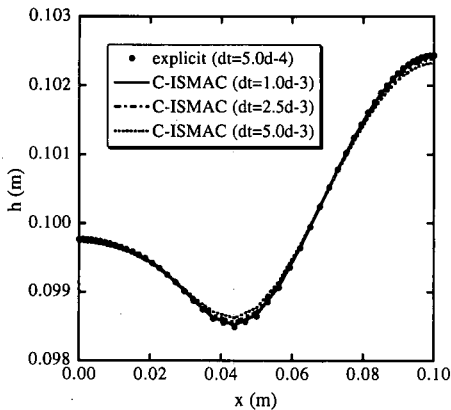


図-7 自由水面の形状 (計算開始から 6 s 後)

法を提案し、計算手順を自由水面流れに対して示した。

最初に、予測段階における h^n の評価方法が異なる CCP スキームと CBP スキームを示し、圧力計算段階で扱われる ϕ の基礎式の相違を明らかにした。さらに、CCP スキームでは、波長 $2\Delta x$ の水面振動あるいは圧力変動を捕えることが困難であることを示した。次に、この結果を考慮して、CBP スキームに対して陰的 SMAC 法

を適用する解法である、C-ISMAC 法を提案した。C-ISMAC 法では、セル中心で一旦圧力を含めて残差成分の連立方程式を導き、得られた流速の推定値から圧力を除去して CBP スキームと同等の推定値を得る。離散化の際には、残差成分のみを陰的に扱い、これに低次のスキームを用いる一方、定常解に収束する成分は陽的に扱えるので、高精度スキームを適用する。得られた推定値から圧力を除去し、セル境界へ空間内挿した後にそこで再び圧力勾配を考慮する。

C-ISMAC 法の有効性を確認するため、自由水面流れの計算を行った。その結果、計算時間を短縮化できると同時に、QSI スキームを用いた MAC 系解法と同等の精度を有する計算が可能であることが示された。C-ISMAC 法は上記の特性に加えて、コロケート格子配置の有用性を保持しているため、非圧縮性流体の解法が適用される各種の自由水面流れの計算において有効であると考えられる。

参考文献

- 牛島 省・禰津家久 (2002): 移動一般座標系を用いたコロケート格子による自由水面流れの数値解析手法, 土木学会論文集, No. 698/II-58, pp. 11-19.
- 牛島 省・禰津家久・山上路生・坂根由季子 (2001): 局所 5 次スプライン (QSI 法) を利用したコロケート格子による流体解析手法, 土木学会論文集, 691/II-57, pp. 73-83.
- 大岡龍三・村上周三・持田 灯 (1997): LES におけるコロケーショングリッドのエネルギー非保存性の検討, 生産研究 49(1), pp. 19-26.
- 梶島岳夫・太田貴士・岡崎和彦・三宅 裕 (1997): コロケート格子による非圧縮流れの高次差分解析, 機械学会論文集 B 編 63(614), pp. 3247-3254.
- Ikohagi, T. and B. R. Shin (1991): Finite-difference schemes for steady incompressible Navier-Stokes equations in general curvilinear coordinates, *Computers and Fluids* 19(3/4), pp. 479-488.
- Zang, Y., R. L. Strees, and J. R. Koseff (1994): A non-staggered grid, fractional step method for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates, *J. Comp. Phys.* 114, pp. 18-33.