

SPS 乱流モデル付き拡張 MPS 法による碎波過程の数値解析

後藤 仁志*・林 稔**・織田 晃治***・酒井 哲郎****

粒子法は、水塊の分裂・合体を伴うような水面の複雑な挙動の追跡に簡単なアルゴリズムで柔軟に対応できる利点を有しているが、乱流場の解析に対しては僅かに著者らの SPS 乱流モデルによる噴流の解析があるに過ぎない。本稿では、碎波・遡上過程における粒子スケール以下の乱流特性を考慮するため、SPS 乱流モデルを組み込んだ MPS 法による数値シミュレーションを実施した。さらに、SPS 乱流特性の評価において鍵となる圧力擾乱除去のための PS フィルタの選択についても、流速変動の波数スペクトルを通じて検討した。数値シミュレーションの結果は、少なくとも実験室スケールの現象については、SPS 乱流モデルが有効に機能することを示している。

1. 緒 言

碎波帯は、活発な流体運動とそれに付随する漂砂等の物質輸送に特徴付けられる複雑な力学的構造を有している。近年、VOF 法 (Hirt・Nichols, 1981) や密度関数法 (Miyata ら, 1988) などの自由表面の追跡手法が急速に普及し、Navier-Stokes 式の解を碎波の存在下で求めることが可能となってきた。さらに、碎波に誘起される乱流の取り扱いを焦点とした研究も活発化し、渡部ら (1998) の密度関数法で水面追跡を行う 3D-LES コードや睦田ら (1998) の C-CUP 法 (Yabe・Wang, 1991) を用いた 3D 気液二相流解析コードなど、計算力学的なアプローチが積極的に展開されている。また、位相平均構造を表す Reynolds 方程式を乱流モデル (例えば、 $k-\epsilon$ モデル) と組み合わせて乱流特性を推定するフレームワークは、CADMAS-SURF (磯部ら, 1999) などの VOF 法系の波動場解析汎用コードでも導入されている。

碎波の解析には自由表面追跡が鍵となるが、計算格子を用いる方法には数値拡散の問題が付き纏い、複雑なスキームの導入を余儀なくされ、コードが複雑かつ長大となる。これに対して、計算格子を用いない粒子法は、Lagrange 的なモデルであるので数値拡散とは無縁であり、水塊の分裂・再合体といった複雑な水面の挙動にも柔軟に対応できる利点を有しており、碎波等の急変流の解析に対する有効性も示されつつある (例えば、Koshizuka ら, 1998; 後藤ら, 1998)。しかし、これまでの粒子法の適用は、原則として Navier-Stokes 式を基礎としており、LES において格子スケール以下の乱流構造を扱う SGS (Sub-Grid-Scale) 乱流モデルに相当する SPS (Sub-Particle-Scale) 乱流モデルを導入せずに、碎波・遡上過程の解析が行われてきた。そこで、本研究では、著者らが提案し、自由噴流に対して適用した SPS 乱流モデル

(Gotoh ら, 2001) を組み込んだ MPS 法を用いて、一様斜面上の碎波・遡上過程の数値解析を実施する。

2. 数値解析の概要

(1) 支配方程式

連続式と Navier-Stokes 式に、LES と同様のフィルタリング操作

$$u_i = \overline{u_i} + u'_i \dots \dots \dots (1)$$

を施し、運動方程式において Leonard 項と cross 項を省略すると、粒子スケール (PS=Particle-Scale) の流れの基礎式 (連続式、運動方程式) は以下のように書ける。

$$\frac{Du_i}{Dx_i} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_m^2} + g_i - \frac{\partial (\overline{u'_i u'_m})}{\partial x_m} \dots (3)$$

Navier-Stokes 式と比較して明らかなように、運動方程式に Reynolds 応力項が新たなる付加項として出現する。

(2) MPS 法による解法

MPS 法 (Koshizuka・Oka, 1996) では、固定計算格子を用いず、計算領域に配置された多数の粒子 (計算点) 間の相互作用として基礎式の各項が離散化される。PS の連続式は、均一で質量が変化しない粒子を用い、粒子数を一定に保つことで厳密に満足される。さらに、粒子数密度 (単位体積あたりの粒子数) を一定値 n_0 に保つことにより、非圧縮条件が満足される。

一方、PS の運動方程式 (式 (3)) をベクトル形式で表示)

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{g}} + \mathbf{f}_{\text{SPS}} \dots \dots (4)$$

($\bar{\mathbf{u}}$: 流速ベクトル, $\bar{p}$: 圧力, ρ : 流体の密度, $\bar{\mathbf{g}}$: 重力加速度ベクトル, ν : 渦動粘性係数, $\mathbf{f}_{\text{SPS}}$: SPS-Reynolds 応力) については、粒子周囲の影響円内の他の粒子との相互作用を通じて離散化する。この際の取扱いは、SPS の乱流の影響を表す付加項である Reynolds 応力を除く

* 正 会 員 工博 京都大学助教授 工学研究科土木工学専攻
** 正 会 員 工修 和歌山県 西牟婁振興局建設部
*** 学生会員 京都大学大学院 工学研究科土木工学専攻
**** フェロー 工博 京都大学教授 工学研究科土木工学専攻

と、Navier-Stokes 式の解法としての MPS 法 (越塚, 1997) を PS の物理量に対して適用すればよい。MPS 法では、移流項は粒子移動の追跡を通じて計算されるため、移流項の差分化に起因する数値拡散が生じない。

粒子 i の圧力項 (gradient) および粘性項 (Laplacian) は、

$$-\frac{1}{\rho} \langle \nabla p \rangle_i = -\frac{1}{\rho} \frac{D_0}{n_0} \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{\bar{p}_j - \bar{p}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{w}(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\nu \langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i = \frac{2\nu D_0}{n_0 \lambda} \sum_{j \neq i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad \dots\dots\dots (6)$$

のように、粒子周囲の影響円内の他の粒子との相互作用としてモデル化される (D_0 : 次元数, λ : モデル定数)。粒子間相互作用が生じる範囲 (影響円) は、重み関数

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & \text{for } r \leq r_e \\ 0 & \text{for } r > r_e \end{cases} \quad \dots\dots\dots (7)$$

により規定される。また、粒子数密度は重み関数を用いて

$$\langle n \rangle_i = \sum_{j \neq i} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad \dots\dots\dots (8)$$

と定義される (Koshizuka・Oka, 1996)。

(3) SPS 乱流モデル

渦粘性係数モデルで Reynolds 応力項を記述すると

$$-\overline{u_i u_m} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_m} + \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{im} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる (k : 乱れエネルギー)。渦動粘性係数 ν_t およびエネルギー散逸率 ε に関する次元解析的表現

$$\nu_t = C_\nu k^{1/2} \Delta; \varepsilon = \frac{C_\varepsilon k^{3/2}}{\Delta} \quad \dots\dots\dots (10)$$

(Δ : 粗視化スケール ($=d_0$: 粒子径), C_ν, C_ε : モデル定数) と粒子スケール以下の小領域での局所平衡性の仮定

$$-\overline{u_i u_m} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_m} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_m} + \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_m} = \varepsilon \quad \dots\dots\dots (11)$$

から、渦動粘性係数は

$$\nu_t = (C_\varepsilon \Delta)^2 \left\{ \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_m} + \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_m} \right\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (12)$$

となり、基礎式が完結する (C_ε : Smagorinsky (1963) 定数)。

計算対象となる 2 次元場では、Reynolds 応力項は、

$$f_{\text{SPSX}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} k \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$f_{\text{SPSY}} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\nu_t \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} k \right) \quad \dots\dots\dots (14)$$

(u, v : x, y 方向の流速成分) と書ける。また、渦動粘性

係数および乱れエネルギーは、エネルギー生成項 P_r を用いて、

$$\nu_t = (C_\varepsilon \Delta)^2 P_r^{1/2}; k = \frac{C_\nu}{C_\varepsilon} \Delta^2 P_r \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$P_r = 2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

と表現できる。Reynolds 応力項は 2 段階計算の第 1 段階で陽的に処理し、式中の偏微分項の計算は、MPS モデルの勾配の定義を参考に、

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle_i = \frac{D_0}{n_0} \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{\phi_j - \phi_i}{x_j - x_i} \cdot w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

のように定義する (Gotoh ら, 2001)。なお、モデル定数に関しては、式 (10)、および (15) より、

$$C_\varepsilon^2 = C_\nu^3 C_\varepsilon^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (18)$$

の関係が成立し、 $C_\varepsilon = 1.0$ として、乱流混合層に対する Smagorinsky 定数の標準値 $C_\varepsilon = 0.15$ を用いると、 $C_\nu = 0.08$ となる。また、重み関数の有効半径 r_e については、勾配について $r_e = 2.1d_0$, Laplacian について $r_e = 3.1d_0$, 偏微分について $r_e = 3.1d_0$ とした (Gotoh ら, 2001)。

3. 碎波・遡上過程の数値シミュレーション

(1) 計算条件

計算領域は、全長 6.0 m の一様斜面に 1.0 m の一様水深部 (静水深 $h = 20.0$ cm) を接続した数値造波水槽であり、沖側の造波壁を強制移動させて、周期 2.0 s, 波高 11.0 cm の規則波を発生させた。造波板の運転には、水理実験で用いられる反射波吸収型造波法 (川口, 1986) を採用している。なお、粒子法では沖側境界壁を運動させて造波するので、水理実験の造波方式の知見を援用した造波法が容易に導入できる。計算に用いた粒子径は $d = 1.0$ cm, 粒子総数は約 11,000 である。造波開始直後から水面波形は安定し、概ね規則的な水面変動となるので、以下では、運転開始から 3 周期経過後の碎波・遡上過程について解を表示することとしている。

(2) 一様斜面上の碎波・遡上過程

シミュレーションによる解の瞬間像を図-1 に、SPS の乱れエネルギー k の空間分布を図-2 に、流速ベクトル (PS の瞬間値) を図-3 に、それぞれ示す。

時刻 $t = 6.6$ s に発生した plunging jet は、時刻 $t = 6.7$ s に着水を開始しているが、この間、主波峰の前面には高レベルの SPS 乱れエネルギーの集中が見られる。このような特性は、主波峰の前面では jet の運動とともに高流速部が生じて、周辺の流体との速度勾配が大きくなり、乱れエネルギーの生成が活発化することに対応したものであろう。高乱れエネルギー域は jet の着水の進行とともに引き伸ばされ、時刻 $t = 6.8$ s には主波峰の前面から

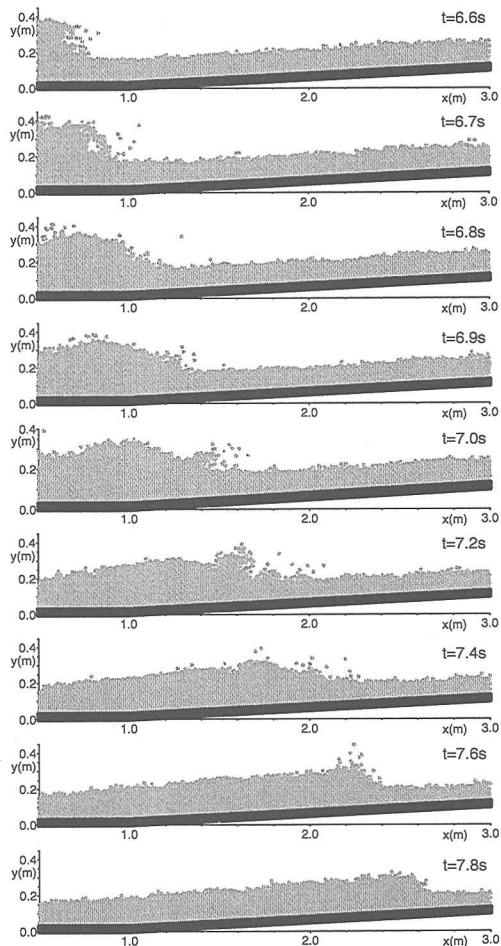


図-1 砕波・遡上過程の瞬間像

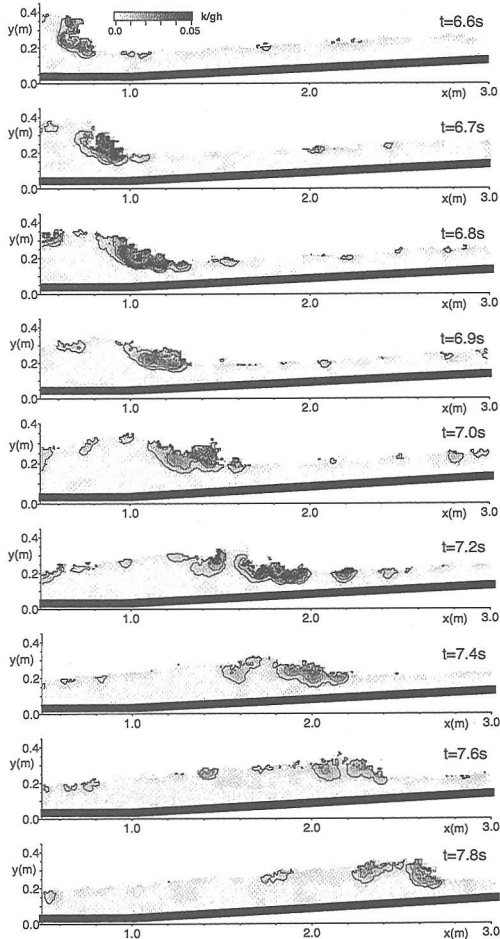


図-2 SPS 乱れエネルギー分布

底脚部にも及び、波峰より下部の流体内部にも広がっている。時刻 $t=6.9$ s には高乱れエネルギー域のエネルギーレベルがやや減少するが、続く時刻 $t=7.0$ s には2次的な jet の発生（スプラッシュアップ）によって jet 付近を中心に乱れエネルギーレベルが再度増加している。時刻 $t=7.2$ s には、2 次的な jet の着水に対応した高乱れエネルギー領域が主波峰の底脚部より岸側の水面に広がっている。さらに時刻が経過して $t=7.4$ s 以降になると、ボア状のフロント部が形成され、大規模で組織立ったスプラッシュは生じない。この状態でも、フロントの水面付近には比較的高速の流体運動が維持されているから、周囲流体との間で高い shear が生じて、乱れエネルギーの生成が持続して、高乱れエネルギー領域がボアフロントの水面付近に維持される。

このように、図-2 および図-3 を対応付けて眺めると、SPS の乱流場の特性が、PS の流速場における速度分布に見られるせん断層の特性と対応して生じるという本

モデルの構造が明瞭に確認できる（渦粘性モデルで Reynolds 応力を完結させているので、むしろ自明のことではあるが）。

LES における GS (=Grid Scale) および SGS の乱れと同様に、本モデルでも PS と SPS の乱れが存在する。一般に、非定常流れにおける乱れの評価は平均流速の評価自体に依存するので、取り扱いには必ずしも容易ではない。比較的周期的な特性を有する波動場・振動流場では、位相平均流速との偏差として流速変動を定義する。これに従うと、まず計算領域内の全ての流速定義点で位相平均流速を算定し、個々の流速定義点での時系列と位相平均流速との偏差として PS の乱れを算定する必要が生じる。固定格子を用いる LES では、この方法で GS の乱れを算定し、SGS の乱れと合わせて乱れ強度を評価する方法が採用されることが多い。一方、粒子法では、物理量の定義点の座標が時々刻々と変化するので、位相平均流速の算定には、固定点を新たに導入して内挿補間する必

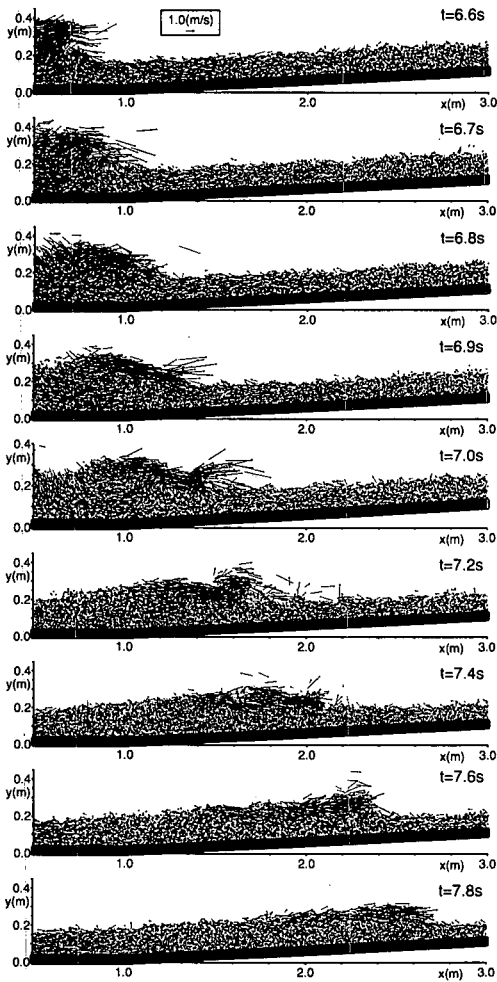


図-3 砕波・遡上過程の流速場

要が生じる (LES と同様の位相平均処理は可能ではあるが、物理量の計算上の定義点と位相平均処理における評価点が一致せず、処理効率が低下する)。厳密には、PS と SPS の乱れの両者を計算して合算し、乱れエネルギーを算定すべきであるが、粗視化スケールの選択が適切ならば、乱れエネルギーの大半を SPS で評価することも可能であると考えられる。つまり、図-2 の乱れエネルギー分布は、PS の変動は平均流速場 (粗視化された速度場) における非定常特性であり、SPS の乱れのみが変動特性であると定義して、乱れエネルギーを評価した結果と見ることができる。

本シミュレーションで計算された SPS 乱れエネルギーの最大値は、概ね $k/gh=0.05$ 付近であるが、PIV による既往の計測結果 (例えば、宮本ら, 1998) における乱れエネルギーのピーク付近の等値線は概ね $k/gh=0.078$ 程度の値を示しており、また、Reynolds 方程式を $k-\varepsilon$ モデルで完結させた VOF 法の計算 (水谷ら, 1999)

でも、ボアフロント近傍の等値線レベルが $k/gh=0.04$ 程度となっていることを考えると、少なくとも実験室スケールの既往の研究結果との対応は許容範囲に入っていると判断できる。

4. 砕波・遡上域における SPS 乱流モデルの妥当性

(1) 圧力擾乱の存在

粒子法では、物理量の定義点である個々の粒子の座標が粒子間相互作用によって決定されている。MPS 法では粒子数密度を全領域で一定に保持するから、2つの粒子が過剰に接近すると粒子間の圧力が急増して、粒子間に排斥力が作用し、粒子数密度を既定値に合わせる修正が行われる。このことは、個々の粒子 (計算点) の座標は決して固定されず、時々刻々と変化することを意味しているが、先に述べたように、粒子の座標の微小な変動は圧力場の擾乱によって支えられている。したがって、固定計算格子を用いない Lagrange 型の方法を採用かぎり、圧力擾乱は不可避の要素であり、粒子の揺らぎによる圧力擾乱の影響を除去した物理量の特性を如何に捉えるかという点が課題の一つでもある。上記の記述からも理解できるように、圧力擾乱に起因する粒子の揺らぎは粒子スケール以下の微小なもので、粒子法が主として急変流に適用されてきたこともあり、この種の揺らぎによる解の精度への影響はそれほど問題視されてこなかった。しかし、SPS の構造を議論する際には、圧力擾乱に起因する乱れが同スケールの現象として存在することとなり、この影響を除去せずに計算すると誤差を助長する危険がある。本研究の SPS 乱流モデルにおける偏微分操作 (式 (17)) において、空間平均操作 (フィルタリング) を行っているのは、この危険を回避するためである。

(2) フィルタリングの効果の評価

懸念される点は、圧力擾乱による PS の高周波の流速変動が、SPS の乱流特性の計算過程における PS 流速の偏微分操作に誤差をもたらさないかという点である。この点に関する概略的な評価は、SPS 乱れエネルギーの等値線からも可能であり、重大なエラーは存在しないものと推測できる。

フィルタリングの効果についてより直接的な評価を行うため、斜面の下端部付近の $x=1.2\text{ m}$, $y=0.15\text{ m}$ の固定点において Euler 観測を行い流速の水平成分の時系列を得た。Euler 観測は、フィルタサイズ (重み関数のパラメータ r_e) を $r_e=1.5d_0$, $3.1d_0$, $5.1d_0$ と変化させて実施し、位相平均とフィルタリングした時系列の偏差を PS 変動成分と定義して、その波数スペクトルを図-4 に示した。フィルタサイズが $r_e=1.5d_0$ の場合には、波長 $1/\kappa=0.1\text{--}1.0\text{ cm}$ (粒子径 $d_0=1.0\text{ cm}$ の $0.1\text{--}1.0$ 倍) の領域に

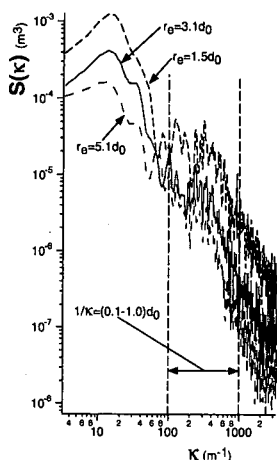


図-4 PS変動成分の波数スペクトル

顕著なエネルギーの集中が見られるが、フィルタサイズが $r_e = 3.1d_0$ になると、この領域のエネルギーレベルは顕著に低下する。フィルタサイズが $r_e = 3.1d_0$ と $r_e = 5.1d_0$ とでは、高波数領域に大きな相違が見られるものの、粒子径の 0.1-1.0 倍の領域では大きな差はない。相互作用の計算負荷は、フィルタ径の 2 乗に比例して増大するので、同様の効果なら可能な限り小さいフィルタを使用すべきである。本シミュレーションでは、1 ステップにおける最大流速での移流距離が粒子径の 0.2 倍以内になるように、時間ステップの設定におけるリミッターが導入されているので、圧力擾乱に起因する粒子の揺らぎのスケールも確実に粒子径以下の領域に収まっている。以上のことから、計算に用いたフィルタサイズ $r_e = 3.1d_0$ の妥当性が確認された。

5. 結 語

本稿では、著者らが提案し、自由噴流に対して適用した SPS 乱流モデルを組み込んだ MPS 法を用いて、一様斜面上の砕波・遡上過程の数値シミュレーションを実施し、遡上水塊の運動と乱流場の特性に関して時間発展的な挙動を推定した。既往の断面 2 次元の数値解析や可視化による水理実験と SPS の乱れエネルギーレベルがほぼ対応し、少なくとも実験規模の現象に対しては、本稿で選択した粒子スケールとフィルタサイズの組み合わせが、PS で非定常運動を記述し、SPS で乱流特性を記述するという仕分けに対応した設定となっているものと判断できた。また、SPS の計算過程での PS の圧力擾乱の影

響を除去する目的で導入したフィルタリングが有効に機能していることを、PS 変動成分の波数スペクトルから確認した。

異なる水理条件でのフィルタリングの妥当性の検証、LES によるシミュレーションが既に実施されている 3D への対応などが、今後の課題である。

参 考 文 献

- 磯部雅彦, 高橋重雄, 余 錫平, 榊山 勉, 藤間功司, 蔣 勤, 秋山 実, 大山洋志 (1999): 数値波動水路耐波設計への適用に関する研究—VOF 法基本プログラムの作成—, 海洋開発論文集, 第 15 巻, pp. 321-326.
- 川口 隆 (1986): 波面検出及び速度制御を用いた無反射造波方式, 三井造船技報, 第 128 号, pp. 20-24.
- 越塚誠一 (1997): 数値流体力学, インテリジェントエンジニアリングシリーズ, 培風館, p. 223.
- 後藤仁志, 酒井哲郎, 沖 和哉, 芝原知樹 (1998): 粒子法による巻き波型砕波を伴う斜面遡上過程の数値シミュレーション, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp. 181-185.
- 水谷夏樹, 安田孝志, 小笠原敏記 (1999): 孤立波の砕波過程への $k-\varepsilon$ モデルの適用と乱流構造に関する研究, 海岸工学論文集, 第 46 巻, pp. 156-160.
- 宮本恭交, 長尾昌朋, 新井信一, 上岡充男 (1998): 周期波の砕波帯の可視化手法を用いた乱流計測, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp. 111-115, 1998.
- 睦田秀実, 河合ひろみ, 安田孝志 (1998): C-CUP 法による気液界面の直接数値計算, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp. 55-59.
- 渡部靖憲, 森恵 広, 佐伯 浩 (1998): 砕波の 3 次元 Large Eddy Simulation, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp. 146-150.
- Gotoh, H., T. Shibahara and T. Sakai (2001): Sub-Particle-Scale Turbulence Model for the MPS Method—Lagrangian Flow Model for Hydraulic Engineering—, *Computational Fluid Dynamics J.*, Vol. 9 No. 4, pp. 339-347.
- Hirt, C. W. and B. D. Nichols (1981): Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries, *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, pp. 201-225.
- Koshizuka, S. and Y. Oka (1996): Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 123, pp. 421-434.
- Koshizuka, S. A. Nobe and Y. Oka (1998): Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method, *Int. J. Numer. Mech. Fluids*, Vol. 26, pp. 751-769.
- Miyata, H., M. Katsuyama, Y. G. Lee and H. Kajitani (1988): A finite-difference simulation method for strongly interacting two-layer flow, *J. Soc. Naval Archit. Japan*, Vol. 163, pp. 1-16.
- Smagorinsky, J. (1963): General circulation experiments with the primitive equations, I. The basic experiment, *Mon. Weath. Rev.* Vol. 91, pp. 99-164.
- Yabe, T. and P. Y. Wang (1991): Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid, *Jour. of the Physical Society of Japan*, Vol. 60, No. 7, pp. 2105-2108.