

固気液多相共存場に対する統一数値解法の構築と 複雑水理現象への応用

川崎 浩司*・大谷 知樹**・中辻 啓二***

1. はじめに

気圧変動や水表面に作用する風外力は密度成層水域の内部流動に大きな影響を与え、無(貧)酸素水塊の湧昇、成層破壊、内部波の発生など複雑な物理現象を引き起こす。近年、数値計算により、沿岸海域の内部構造を明らかにしようとする試みが行われている。しかし、気象変動による水面変形・内部流動の応答、水表面で発生・卓越する乱れの影響を十分に評価できないなど、気液界面(自由水面)の取り扱いには未だ多くの問題が残されている。一方、気相領域と液相領域を同時に解く数値解法の考案(例えば、陸田ら, 1998; 由比ら, 1998; 二瓶・灘岡, 2000)により、水表面に与える風外力の影響を直接的に取り扱うことが可能になりつつある。しかしながら、一般に固気液多相共存場における異相間の相互干渉を高精度に表現することは困難である。

本研究では、風外力・気圧変動に伴う密度成層水域の内部構造を究明するための一手段として、固気液多相共存場に対する統一数値解法を構築することを目的とする。そして、様々な複雑水理現象に適用することにより、本数値解法の妥当性・有用性を検証する。さらに、物理量の質量保存を厳密に保証することが可能な数値スキームである CIP-CSL (Constrained Interpolation Profile—Conservative Semi-Lagrangian) 法の有用性についても検討する。

2. 固気液多相共存場に対する統一数値解法

2.1 基礎方程式

基礎方程式は、2 次元圧縮性流体に対する質量保存式、Navier-Stokes 方程式、圧力方程式、異相間の割合を示す密度関数の保存式、バロトロピー流体に対する状態方程式から構成される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{F} \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = -\rho C_s^2 \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi_l \mathbf{u}) = 0 \quad (4)$$

$$\rho = f(p) \quad (5)$$

ここで、 ρ は流体密度、 $\mathbf{u}$ は流速ベクトル (u, w)、 p は圧力、 $\mathbf{F}$ は粘性項、重力項などの外力項ベクトル (F_x, F_z)、 C_s は局所音速、 t は時間、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial z)$ を示す。また、 ϕ_l は l 相 ($l=1\sim 3$; ϕ_1 : 固相, ϕ_2 : 液相, ϕ_3 : 気相) の密度関数であり、 $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 1$ ($0 \leq \phi_l \leq 1$) の関係を満たす。

2.2 計算アルゴリズム

非圧縮性流体と圧縮性流体を統一的に解く数値解法として、Yabe and Wang (1991) によって提案された C-CUP 法がある。C-CUP 法は、非移流項を有限差分により計算した後、CIP 法を用いて移流項を解く方法である。しかし、Yabe (1997) は最初に移流項を計算した方が質量の保存性に優れていると報告している。したがって、本計算では、次に示すように、基礎方程式 (1)~(4) を部分段階法により移流項と非移流項に分割し、移流項を解いた後、非移流項を計算することにした。

● 移流項 (Advection Term)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_l = 0 \quad (9)$$

● 非移流項 (Non-Advection Term)

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^*}{\Delta t} = -\rho^* \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \quad (10)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^*} \nabla p^{n+1} + \mathbf{F}^* \quad (11)$$

$$\frac{p^{n+1} - p^*}{\Delta t} = -\rho^* C_s^2 \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \quad (12)$$

$$\frac{\phi_l^{n+1} - \phi_l^*}{\Delta t} = -\phi_l^* \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \quad (13)$$

* 正会員 博(工) 大阪大学大学院助手 工学研究科土木工学専攻

** 正会員 修(工) 水資源開発公団 滝沢ダム建設所

*** 正会員 工 博 大阪大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻

ここで、 Δt は時間ステップ間隔である。また、上付き $n+1$ は時刻 $(n+1)\Delta t$ での物理量、上付き $*$ は移流項の計算後の物理量を示す。

まず、移流項では、Yabe and Aoki (1991) が開発した CIP (Cubic Interpolated Propagation) 法を採用して計算を行った。非移流項に対しては、計算アルゴリズムの煩雑さを極力省くために、非圧縮性流体を対象に開発された SMAC (Simplified Marker And Cell) 法を圧縮性流体まで取り扱えるように展開した。そして、その解法を用いて次の時間ステップにおける各物理量を算定した。なお、気液界面で生じる表面張力の影響を、Brackbill et al. (1992) が考案した CSF (Continuum Surface Force) モデルにより評価した。また、局所音速 C_s の算定方法に関しては、陸田ら (1998) と同様である。

以下に、非移流項における数値解法の詳細を述べる。

2.3 非移流項における数値解法

式 (10)～式 (13) には、次の時間ステップにおける物理量 u^{n+1} 、 p^{n+1} などが含まれているため陽的に解くことができない。そこで、SMAC 法と同様、運動方程式の離散化において、流速の予測値 $\tilde{u}$ を導入することにする。

まず、次に示すように、移流項の計算で得られた物理量を用いることにより、流速場の予測値 $\tilde{u}$ を算定する。

$$\frac{\tilde{u} - u^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^*} \nabla p^* + F^* \dots \dots \dots (14)$$

式 (11) から式 (14) を引いた式の発散を求め、式 (12) を用いて $\nabla \cdot u^{n+1}$ を消去することにより、次式に示す圧力補正值 δp に関する Poisson 方程式を誘導する。

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^*} \nabla \delta p \right) = \frac{1}{\rho^* C_s^2 \Delta t^2} \delta p + \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{u} \dots \dots \dots (15)$$

ここで、 $\delta p = p^{n+1} - p^*$ である。

上式から理解できるように、局所音速 C_s が大きい場合、すなわち非圧縮性が仮定される場合には右辺第一項は他の項に比べて微小となり、無視することができる。これは、本数値解法が圧縮性流体場を対象とした手法でありながら、非圧縮性流体も統一的に解くことができることを意味する。なお、本研究では、式 (15) を解くために、反復解法の一つである ILUCGS 法 (不完全 LU 分解付自乗共役勾配法) を採用した。

最後に、式 (15) より得られた圧力補正值 δp を用いて、次の時間ステップにおける各物理量を次式より計算する。

$$u^{n+1} = \tilde{u} - \frac{\Delta t}{\rho^*} \nabla \delta p \dots \dots \dots (16)$$

$$p^{n+1} = p^* + \delta p \dots \dots \dots (17)$$

$$\rho^{n+1} = \rho^* - \rho^* \nabla \cdot u^{n+1} \Delta t \dots \dots \dots (18)$$

$$\phi^{n+1} = \phi^* - \phi^* \nabla \cdot u^{n+1} \Delta t \dots \dots \dots (19)$$

2.4 固相領域の取り扱い

固相領域の取り扱いに関しては、Xiao et al. (1997) と同様である。具体的には、固相領域は剛体かつその運動形態が移動と回転であると仮定することにより、固相領域に作用する圧力を用いて物体重心の移動速度と角速度を求め、剛体運動を解析した。

3. 気液相共存場への統一数値解法の適用

3.1 ダム崩壊問題

移動境界流れ解析の検証問題の一つであるダム崩壊問題を取り上げ、本計算手法の妥当性を検討する。計算領域を $7.5 \text{ m} \times 5.0 \text{ m}$ とし、 x 、 z 方向のメッシュサイズを $\Delta x = \Delta z = 0.05 \text{ m}$ と一定にした。また、ダムの幅 L 、高さ H を 1.5 m 、 3.0 m 、時間ステップ間隔 Δt を 0.0001 s とした。なお、密度、重力、大気圧、粘性係数、表面張力係数などの物性値の設定は、陸田ら (1998) と同様とした。また、流速の境界条件に関しては、slip 条件を課した。

図-1 は液相形状と流速場の時間変化を同時に図示したものである。計算開始直後、重力の影響により、水柱が崩壊し始める。このとき、水塊の流動に伴う大きな循環流が発生している。 $t = 1.0 \text{ s}$ 以降では、液相先端が右壁に衝突し、右壁面を遡上する。遡上した水塊は最高点 $z = 4.7 \text{ m}$ に達し、重力の影響により下方に移動し始める。しかし、右壁下部では上向きの流速が存在するため、 $z = 1.2 \text{ m}$ 付近で水平方向流速を誘発し、水塊の膨らみが生じている。この一連の現象は、由比ら (1998) や二瓶・灘岡 (2000) による計算結果と同様な傾向を示す。図-2 に、数値計算および水理実験 (Martin and Moyce, 1952) による液相先端の時間変化を示す。ここで、液相先端は液相の密度関数 $\phi_2 = 0.5$ と定義した。同図より、計算結果は実験結果を良好に再現しており、本数値解法の妥当性が検証される。

3.2 交換密度流

図-3 は交換密度流の計算例であり、液相部における密度分布の時間変化を示す。なお、図中の点線は気液界面 (自由水面) を表し、初期水深は $h_0 = 0.155 \text{ m}$ である。また、計算領域を $1.0 \text{ m} \times 0.20 \text{ m}$ とし、 x 、 z 方向のメッシュサイズを $\Delta x = 0.01 \text{ m}$ 、 $\Delta z = 0.005 \text{ m}$ と一定にした。各相の初期密度分布は $t = 0.00 \text{ s}$ の図面に示すとおりである。計算開始直後から密度差に起因する水平方向の圧力勾配によって、密度の重い液体は密度フロントを形成しながら密度の軽い液体に侵入していく。そして、せん断力に起因する連行渦が発生し、密度界面の拡散を促進させている。なお、計算結果は赤堀ら (1999) による実験結果とよく一致することを確認した。一方、各地点での水表面の時系列変化を示す図-4 より、密度フロントの進行に伴い、St. 1、St. 3 で水位の上昇・下降が認めら

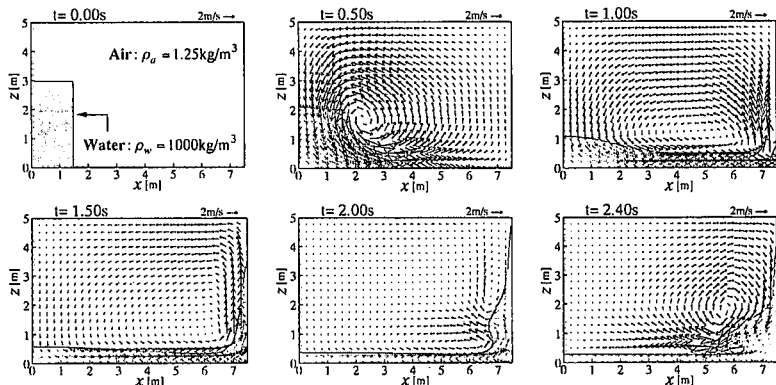


図-1 ダム崩壊現象の計算結果

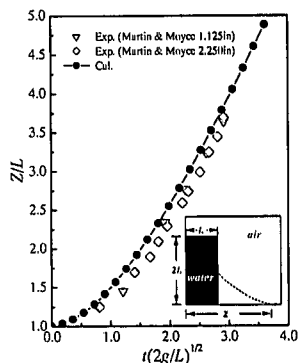


図-2 液相先端の到達距離

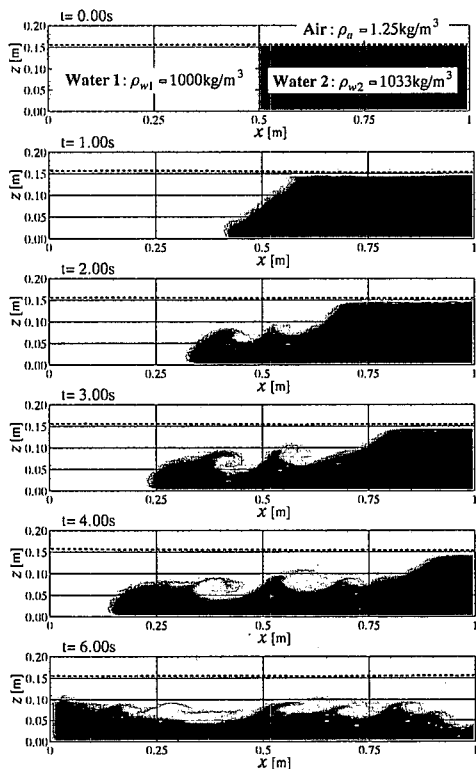


図-3 交換密度流の計算結果

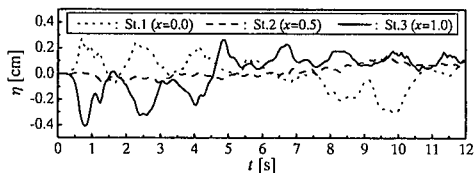


図-4 水位の時間変動

れる。微小に振動する周期は $T_s \approx 1.6$ s であり、表面セシユの理論周期 1.62 s とほぼ等しい。以上のことから、本数値解法を、気液相・多層流動場、すなわち風・気圧

変動影響下での密度成層場に適用できると考えられる。

4. 固気液相共存場への統一数値解法の適用

4.1 水と構造物の衝突問題

図-5 は流体圧力の作用に伴う物体の移動現象の計算例である。なお、 $t=0.00$ s の図面に示すように、ダム前面部に物体を配置した場合を想定した。また、物体（固相領域）の密度 ρ_s を 1000.0 kg/m^3 、ダムの高さ H を 2.0 m とし、それ以外の計算条件は 3.1 節で前述した条件と同じに設定した。同図より、ダム崩壊後、流出した水が物体に衝突し、物体はその形状を変えることなく右方へ移動している。さらに、物体が右壁に衝突した後、流出水が物体上に乗上げていく様子が認められる。紙面の制約上図示できないが、物体の密度を $\rho_s = 8000.0 \text{ kg/m}^3$ と設定した場合、物体の移動速度は物体の自重の影響により $\rho_s = 1000.0 \text{ kg/m}^3$ の場合に比べて遅くなることを確認した。

4.2 静水面への剛体の自由落下現象

静水面から上方 1.2 m の地点より剛体（幅 $0.5 \text{ m} \times$ 高さ 1.0 m ）を自由落下させたときの計算結果を図-6 に示す。計算領域および各相の初期密度分布は $t=0.00$ s の図面に示すとおりである。また、メッシュサイズを $\Delta x = \Delta z = 0.05 \text{ m}$ と設定した。物体は自重の影響により自由落下し、水表面と衝突する。そして、物体は水中に進入するものの、物体の密度が水の密度よりも軽いため、浮力の影響により物体は浮上する。その後、物体は横転する。一連の計算を通して、各異相間の数値拡散がほとんど生じていないため、物体は初期形状をほぼ保持していることが認められる。さらに、固気液多相共存場における流動場や異相間の相互干渉を高精度に計算していることがわかる。以上のことから、本数値解法は波・流れと構造物の動的応答特性の解明にも大いに役立つと考えられる。

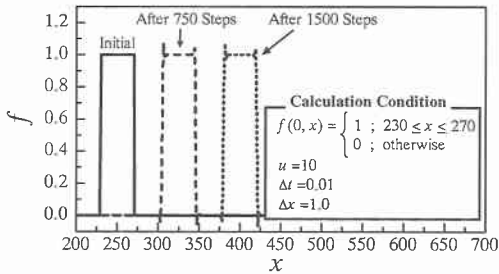


図-8 1次元 CIP-CSL 法による方形波の伝播

ように、式 (23) の右辺における第2項、第3項は次式より求めることができる。

$$\Delta m_i = \int_{x_i - u_i \Delta t}^{x_i} F_i(x) dx \quad (24)$$

次に、CIP-CSL 法の有用性について検討する。図-8は、Courant 数 $C(=u\Delta t/\Delta x)=0.1$ の場合で、1次元保存方程式による方形波の伝播状況を示す。同図より、方形波の隅角部でわずかにオーバーシュート・アンダーシュートが認められるものの、750, 1500 ステップ後ともに、初期形状の特徴を保持しながら方形波が移流している。一方、図-9は小林・肖 (2000) が提案した手法と同様の2次元 CIP-CSL 法を回転流動場に適用した計算例である。初期条件としては、図-9(a)に示すように、鍵穴形状の断面を有する高さ1の柱を考えた。また、時間ステップ間隔を $\Delta t=0.314$ 、メッシュサイズを $\Delta x=\Delta z=1$ とし、 $(x, z)=(100, 100)$ を中心に角速度 $\omega=0.02$ を与えることにより回転場を設定した。図-9(b)より、図-8と同様、計算結果は初期形状の特徴をほぼ保持しながら回転運動をしていることがわかる。このことは、CIP-CSL 法が斜め方向への物理量の移流に対しても高い精度をもっていることを示す。さらに、図-10から判断できるように、CIP-CSL 法はほぼ厳密に質量を保存している。したがって、複雑な流動場に対して、CIP-CSL 法を十分に適用できるといえる。

6. おわりに

本研究では、固気液多相流動場を統一的に解く数値解法を構築した。そして、様々な水理現象に適用することにより、本数値解法の妥当性を検証した。その結果、本数値解法は固気液相の各異相界面の挙動を精度よく追跡できるとともに、各相の流動場を高精度に数値解析できる手法であることが実証された。さらに、物理量の保存方程式に対する新しい数値スキームである CIP-CSL 法の有用性を確認した。今後は、乱流モデルの取り込み、3次元への拡張、CIP-CSL 法の導入などを検討すると

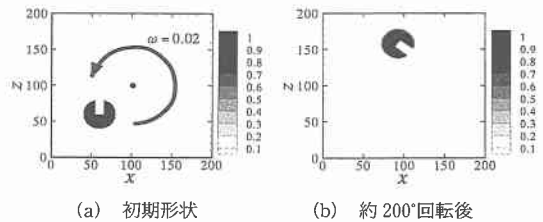


図-9 2次元 CIP-CSL 法によるキーホールの回転

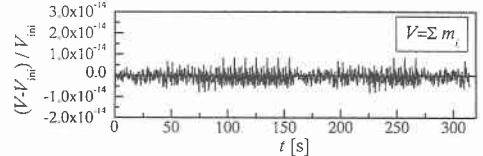


図-10 キーホール回転に対する質量の保存性

もに、風外力・気圧変動に伴う密度成層水域や砕波現象に適用し、その内部構造を検討する予定である。

謝辞：本研究の一部は日本学術振興会科学研究費補助金（基盤研究（B）（1）：代表 岩田好一朗、奨励研究（A）：代表 川崎浩司）による成果であることを付記しておく。

参考文献

- 赤堀良介・清水康行・中山 卓 (1999): 鉛直方向に密度境界面を持つ流体の混合に関する数値計算, 水工学論文集, 第43巻, pp. 521-526.
- 小林久紀・肖 鋒 (2000): 非次元分割による多次元保存形 CIP, 日本応用数理学会講演集, Vol. 10, pp. 32-33.
- 二瓶泰雄・難岡和夫 (2000): GAL モデルに基づく移動境界流れ解析法の構築とその応用, 土木学会論文集, No. 642/II-50, pp. 19-30.
- 陸田秀実・河合ひろみ・安田孝志 (1998): C-CUP 法による気液界面の直接数値計算, 海岸工学論文集, 第45巻, pp. 55-59.
- 由比政年・石田 啓・保智正和 (1998): 界面の大変形を伴う気液二相流体場の数値解析, 海岸工学論文集, 第45巻, pp. 61-65.
- Brackbill, J. U., D. B. Kothe and C. Zemach (1992): A continuum method for modeling surface tension, J. Computational Physics, Vol. 100, pp. 335-354.
- Martin, J. C. and W. J. Moyce (1952): An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, Vol. 244, pp. 312-324.
- Tanaka, R., T. Nakamura and T. Yabe (2000): Constructing exactly conservative scheme in a non-conservative form, Comput. Phys. Commun., Vol. 126, pp. 232-243.
- Xiao, F., T. Yabe, T. Ito and M. Tajima (1997): An algorithm for simulating solid objects suspended in stratified flow, Comput. Phys. Commun., Vol. 102, pp. 147-160.
- Yabe, T. (1997): Unified solver CIP for solid, liquid and gas, Computational Fluid Dynamics Review 1997.
- Yabe, T. and T. Aoki (1991): A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation, Comput. Phys. Commun., Vol. 66, pp. 219-232.
- Yabe, T. and P.-Y. Wang (1991): Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid, J. Physical Society of Japan, Vol. 60, No. 7, pp. 2105-2108.