

一般化最小自乗法による確率波高の最良線形不偏推定法

北野利一*・間瀬 肇**・喜岡 渉***

1. はじめに

極値波浪解析の目的の 1 つは、与えられた波浪観測データを基に、ある再現期間に対する確率波高を精度良く推定することである。最尤法による推定は、一般に、漸近的に有効となる推定法であることが示されているのに対し、最小自乗法による極値波浪解析についての既往の研究では、極値波浪データへの極値分布のフィッティング法についての議論がなされているが、最終的に重要な確率波高の推定誤差についての理論的な検討が、これまでに十分にされているとはいえない。

泉宮・齋藤 (1997) で提案されている重み付き最小自乗法においては、プロットングポジションから決まる基準化変量と順序統計量とのフィッティング誤差に各順序統計量の分散の逆数で重みを付け、得られる確率波高の推定誤差が、従来の等重みによる最小自乗法での推定誤差より結果的に小さくなることを示している。しかし、泉宮・齋藤 (1997) の重み付き最小自乗法は、必ずしも最良推定となることを理論的に保証されているわけではなく、最尤法や従来の最小自乗法による誤差分散を数值的に比較し、結果的にどうなったのかを確認しているにすぎない。すなわち、極値統計理論の構築に際し、確率波高の推定誤差を意図して最小化する手段を組み込んだ方法は、これまで検討されていない。

本研究では、まず、従来の最小自乗法および泉宮・齋藤 (1997) の重み付き最小自乗法による確率波高の誤差分散と、誤差分散がとりえる下限値との比較を行い、確率波高の分散がさらに最良化できる可能性を示す。次に、重み付き最小自乗法における重み係数を変数とみなし、確率波高の誤差分散が最小となるように重み係数を決定できる一般化最小自乗法を構築し、確率波高が最良線形不偏となる推定法を提案する。

2. 確率波高の誤差分散についての理論

2.1 重み付き最小自乗法による確率波高の誤差分散

泉宮・齋藤 (1997) により提案されている重み付き最小自乗法による母数推定のアイデアは、順序統計量の分散が順位により異なることに基づき、基準化変量 y_i および推定母数 $\hat{A}$, $\hat{B}$ により表わされる順序統計量の期待値 $\hat{x}_i$ と観測される標本の順序統計量 x_i との差の自乗を、各順位の分散 $\sigma^2(x_i)$ の逆数で重み付けた総和を最小化するものである。つまり、

$$\sum_i \frac{(x_i - \hat{x}_i)^2}{\sigma^2(x_i)} = \sum_i \frac{(x_i - \hat{A}y_i - \hat{B})^2}{\sigma^2(x_i)} \rightarrow \min \dots (1)$$

により、母数を決定する。上式の最小化条件を満足する推定母数は、標本サイズを N とすると、以下のとおり陽に導かれる。

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_i x_i \sigma_i^{-2} \sigma_y^{-2} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{y} \\ -\bar{y} & \bar{y}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ 1 \end{pmatrix} \dots (2)$$

ここで、記法として $1_i = 1$ ($i=1 \sim N$) を使い、 $\bar{y}$, $\bar{y}^2$ および σ_y^2 は基準化変量 y_i の重み付け平均、自乗平均および分散を表し、それぞれ、

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{N} \sum_i \frac{1_i y_i}{\sigma_i^2}; \quad \bar{y}^2 = \frac{1}{N} \sum_i \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}; \\ \sigma_y^2 &= \frac{1}{N} \sum_i \frac{(y_i - \bar{y})^2}{\sigma_i^2} \dots (3) \end{aligned}$$

である。また、 σ_i^2 は順序統計量の分散 $\sigma^2(x_i)$ を次式のよう

$$\sigma_i^{-2} = \sigma^{-2}(x_i) / \left\{ \frac{1}{N} \sum_i \sigma^{-2}(x_i) \right\} \dots (4)$$

なお、合田 (1988) を代表として従来から用いられている最小自乗法は、順序統計量の誤差分散の違いを考慮せずに、式 (1)~(3) に含まれる重みを等価 ($\sigma_i^{-2}=1$) にしたものである。

再現期間 R 年とする確率波高 x_R は、 P_y を $y=(x-B)/A$ の累積分布関数とすれば、

$$x_R = (A, B) \begin{pmatrix} y_R \\ 1 \end{pmatrix}; \quad y_R = P_y^{-1} \left(1 - \frac{1}{R} \right) \dots (5)$$

として母数の線形和で表わされる。従って、最小自乗法による確率波高の推定値 x_R は、式 (2) より、

* 正会員 工博 名古屋工業大学講師 社会開発工学科
** 正会員 工博 京都大学助教授 防災研究所
*** 正会員 Ph.D. 名古屋工業大学教授 社会開発工学科

$$x_R = \frac{1}{N} \sum_i x_i \sigma_i^{-2} \sigma_y^{-2} (y_i, 1_i) \begin{pmatrix} 1 & -\bar{y} \\ -\bar{y} & \bar{y}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_R \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となり、標本 $x_{i=1-N}$ に対して線形となる。また、順序統計量の期待値が、真の母数 A_0, B_0 を用いて、

$$E(x_i) = A_0 y_i + B_0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

となるように各順位の基準化変数 y_i を選べば、母数および確率波高の推定は不偏となる。

確率波高の誤差分散 $\sigma^2(x_R)$ について、泉宮・齋藤 (1997) では等重みの場合に限った、一般性に欠ける表現になっているが、重み付きの場合も容易に導出できる。

誤差分散 $\sigma^2(x_R)$ を

$$\begin{aligned} \sigma^2(x_R) &= E(\hat{x}_R - x_R)^2 = y_R^2 E(\hat{A} - A_0)^2 \\ &\quad + 2y_R E(\hat{A} - A_0)(\hat{B} - B_0) + E(\hat{B} - B_0)^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8)$$

と展開した場合、推定母数の分散・共分散の和で表わされる。推定母数の分散・共分散は、式 (2) を用いて、

$$\sigma_y^2 E(\hat{A} - A_0)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i,j} \tilde{S}_{ij} \frac{(y_i - \bar{y} 1_i)(y_j - \bar{y} 1_j)}{\sigma_y^2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y E(\hat{A} - A_0)(\hat{B} - B_0) \\ = \frac{1}{N} \sum_{i,j} \tilde{S}_{ij} \frac{(y_i - \bar{y} 1_i)(\bar{y}^2 1_j - \bar{y} y_j)}{\sigma_y^2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$E(\hat{B} - B_0)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i,j} \tilde{S}_{ij} \frac{(\bar{y}^2 1_i - \bar{y} y_i)(\bar{y}^2 1_j - \bar{y} y_j)}{\sigma_y^2} \quad \dots\dots\dots (11)$$

として理論的に得られる。なお、上式に現れる $\tilde{S}_{ij}$ は、統計量の共分散行列 S_{ij} を以下のように重み付けたものである。

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{N} \sigma_i^{-2} \sigma_j^{-2} S_{ij} \quad \dots\dots\dots (12)$$

共分散行列 S_{ij} は、泉宮・齋藤 (1997) が漸近理論を用いて導出しており、尺度母数の自乗 A^2 に比例する。また、式 (9)～(11) に含まれる $\bar{y}, \bar{y}^2, \sigma_y^2$ および $\tilde{S}_{ij}$ について重み付けをしなければ、式 (8) で得られる $\sigma^2(x_R)$ は、泉宮・齋藤 (1997) で得られている従来の最小自乗法による確率波高の分散の推定式に等価である。

2.2 Cramér-Raô の不等式による確率波高の最小分散

一般に、不偏推定量の分散には下限値が存在する。このことは、Cramér-Raô の不等式により示される。すなわち、真値を θ_0 とする母数ベクトル θ の不偏推定量 $\hat{\theta}$ に対して、

$$E(\hat{\theta} - \theta_0)(\hat{\theta} - \theta_0)^T \geq J_\theta^{-1} \quad \dots\dots\dots (13)$$

として表わされる。右辺の行列 J_θ は Fisher の情報行列とよばれるもので、確率変数 $x(x = x_{i=1-N})$ の密度関数を

p_N とすれば、

$$(J_\theta)_{ij} = E\left(\frac{\partial \log p_N}{\partial \theta_i} \frac{\partial \log p_N}{\partial \theta_j}\right) \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。左辺は不偏推定母数の共分散行列であり、対角項が母数の分散である。式 (13) の等号が成立する時、母数の分散は最小となる。そのような不偏推定量は有効推定量とよばれている。なお、Cramér-Raô の不等式は、Schwarz の不等式の表現をかえたものであり、有効推定量の存在を示すものではないことに注意する。また、期待値の計算で現れる積分と母数による微分の順序交換を仮定する必要から、Weibull 分布のような分布関数の定義域が、未知母数により定められているような場合には適用できないので、ここでは、Gumbel 分布について検討する。

極値波高の推定に用いられる Gumbel 分布は、母数 A, B とする確率変数 x の密度関数として、

$$p(x; A, B) = \frac{1}{A} \exp\left\{-\frac{x-B}{A} - \exp\left(-\frac{x-B}{A}\right)\right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

と表わされる。ここでは、確率波高 x_R の最小分散を得ることが目的であるので、式 (15) を

$$\begin{aligned} p(x; A, x_R) &= \frac{1}{A} \exp\left\{-\frac{x-x_R}{A} - y_R \right. \\ &\quad \left. - \exp\left(-\frac{x-x_R}{A} - y_R\right)\right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

と変形し、 A および x_R を母数とする分布関数を用いる。なお、 y_R は式 (5) で定められるものと同じある。この時、Fisher の情報行列は、

$$J_{A, x_R} = \frac{N}{A^2} \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{6} + (\gamma - y_R - 1)^2 & \gamma - y_R - 1 \\ \gamma - y_R - 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (17)$$

と得られる。なお、上式の導出に際して、式 (17) の右辺を

$$E\left(\frac{\partial \log p_N}{\partial \theta_i} \frac{\partial \log p_N}{\partial \theta_j}\right) = N \times E\left(-\frac{\partial^2 \log p}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right) \quad \dots\dots\dots (18)$$

と変形し、

$$p_y(y) = \exp(-y - e^{-y}) \quad \dots\dots\dots (19)$$

と規格化された Gumbel 分布の平均および分散が、

$$\left. \begin{aligned} E^y(y) &= -\int_0^\infty e^{-z} \log z \, dz = \gamma \\ E^y(y - \gamma)^2 &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

で得られることを利用した (γ はオイラー定数)。式 (17) および Cramér-Raô の不等式により、確率波高の最小分

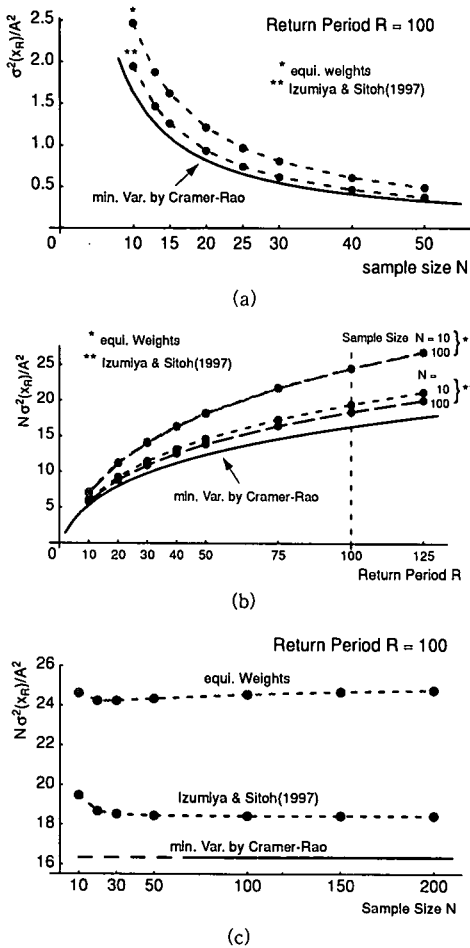


図-1 最小自乗法による確率波高の誤差分散とその下限値の比較 (その1)

散 $\sigma^2_{\min}(x_R)$ は、存在すれば、

$$\sigma^2_{\min}(x_R) = \frac{A^2}{N} \left\{ 1 + \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{-1} (\gamma - y_R - 1) \right\} \dots\dots\dots (21)$$

で与えられる。

共分散行列 S_U は A^2 に比例するので、最小自乗法の確率波高の分散である式 (8) は、標本サイズ N のみに依存する定数 e_{AA} 、 e_{AB} および e_{BB} を適切に定めれば、

$$\sigma^2_{L,S}(x_R) = \frac{A^2}{N} \{ e_{AA} y_R^2 + e_{AB} y_R + e_{BB} \} \dots\dots\dots (22)$$

と変形できる。なお、式 (9)～(11) は、 $\tilde{S}_U$ が含まれるため、 $1/N$ が重複して現れているが、式 (12) の $\tilde{S}_U$ に現れる $1/N$ が式 (22) に現れるものに対応し、式 (9)～(11) の総和記号の前に現れる $1/N$ は、分散・共分散の定義に必要であるという観点から式 (22) での定数 e_{AA} 、 e_{AB} および e_{BB} に含めるべき $1/N$ である点に注意する。Cramér-Raô の不等式による最小分散 $\sigma^2_{\min}(x_R)$ と最小自乗法による分散 $\sigma^2_{L,S}(x_R)$ は、 A^2/N に比例することは共通

し、その比例係数である y_R の 2 次式の係数が異なる。式 (21) と式 (22) を数値的に比較したものを図-1 に示す。

図-1(a) は、 A^2 で規格化した誤差分散の標本サイズによる変化を表わしている。等重みとする従来の最小自乗法での誤差より、泉宮・齋藤 (1997) による重み付けした最小自乗法の誤差が小さく、Cramér-Raô による誤差分散の最小値に近づいていることがわかる。

最小誤差分散を表わす式 (21) の左辺を $N\sigma^2(x_R)/A^2$ と規格化すれば、右辺は N に依存しない量となる。一方、式 (22) の最小自乗法による誤差分散では、係数 e_{AA} 、 e_{AB} および e_{BB} が N に依存する量であることに注意し、誤差分散が $1/N$ で減少するという標本サイズの影響を除いて、誤差分散の特性を考察する。再現期間に対する $N\sigma^2(x_R)/A^2$ の変化を図-1(b) に示す。再現期間が長ければ、誤差分散が増大する特性が明確に現れ、また、泉宮・齋藤 (1997) による最小自乗法での誤差は、標本サイズの増加に応じて、その誤差がより最小化されることがわかる。一方、従来の最小自乗法では、標本サイズが増加しても、誤差に大きな変化が見られない。

$N\sigma^2(x_R)/A^2$ で表わした誤差分散の標本サイズに対する変化を、再現期間を固定して表現したものが図-1(c) である。最小自乗法による誤差分散は、順序統計量の分散の違いを考慮に入れても、標本サイズの増加に対する変化は小さく、最小分散に漸近するような傾向もみられない。標本サイズの増加に応じて、最小分散に漸近する推定法を漸近的に有効推定とよび、望ましい推定法とされるが、図-1(c) での結果を見るとおり、泉宮・齋藤 (1997) の最小自乗法は、漸近的に有効であるとはいえない。なお、漸近的に有効か否かを数値的に検討する場合には、図-1(a) のような図示表現では、その判断を誤る可能性がある。

3. 一般化最小自乗法による確率波高の最良化

3.1 一般化最小自乗法

式 (22) における定数 e_{AA} 、 e_{AB} および e_{BB} 、冒い換えれば、式 (9)～(11) における推定母数の分散・共分散が、各順位に対応する重み σ_i^2 を変数とした関数であることに注目する。つまり、式 (8) において、 σ_i^2 の代わりに、

$$\sum_{i=1-N} \omega_i^{-2} = N \dots\dots\dots (23)$$

を満たすように規格化された重み係数ベクトル $\omega^2 (= \omega_{i=1-N}^2)$ を変数として代入し、若干の整理をすれば、

$$\begin{aligned} \sigma^2_{L,S}(x_R; \omega^2) &= \frac{A^2}{N} \{ y_R^2 e_{AA}(\omega^2) + y_R e_{AB}(\omega^2) + e_{BB}(\omega^2) \} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i,j} \omega_i^{-2} \omega_j^{-2} \frac{S_{ij}}{N} \{ 1_i + \tilde{y}^2(\omega^2) \} \{ 1_j + \tilde{y}^2(\omega^2) \} \end{aligned} \dots\dots\dots (24)$$

となる。 $\sigma_{LS}^2(x_R; \omega^2)$ は、任意に重み付けされた最小自乗法による確率波高の誤差分散の推定式となる。なお、以下に示すように、 $\hat{y}_i^2$ は各順位の基準化変量 y_i の無次元偏差量と再現期間 R 年に対応する y_R の無次元偏差量の積で定義される量であり、 $\bar{y}$ や σ_y も ω^2 の関数であるので、 $\hat{y}_i^2$ も ω^2 の関数である。

$$\hat{y}_i^2(\omega^2) = \frac{y_R - \bar{y}}{\sigma_y} \times \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y} \dots\dots\dots (25)$$

式 (24) より、再現期間により定まる y_R や標本サイズ N により変化する基準化変量 y_i に応じて、重み係数ベクトル ω^2 を変化させれば、 $\sigma_{LS}^2(x_R)$ をできる限り最小とする重み係数を見い出せる可能性がある。従って、

$$\sigma_{LS}^2(x_R; \omega^2) \rightarrow \min \dots\dots\dots (26)$$

で定められる重み係数 ω^2 を決定し、その最良な重み係数 ω^2 を用いて、順序統計量 x_i と基準化変量 y_i とのフィッティング誤差の最小化

$$\begin{aligned} & \sum_i \frac{(x_i - \hat{A}y_i - \hat{B})^2}{\omega_i^2} \\ &= \sum_i \frac{(x_i - \hat{x}_R - \hat{A}(y_i - y_R))^2}{\omega_i^2} \rightarrow \min \dots\dots (27) \end{aligned}$$

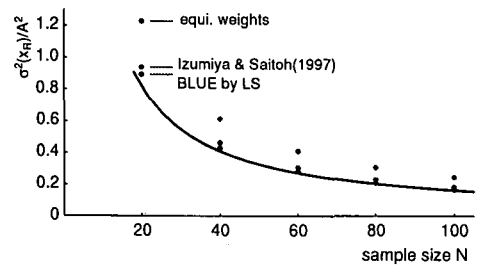
を行うことにより、確率波高の最良線形不偏推定を図るというものである。以上の方法は、確率波高の推定誤差分散とフィッティング誤差の2つ誤差の最小化が行われているという観点から従来の最小自乗法と区別し、本研究で、一般化最小自乗法とよぶことにする。

3.2 数値的検討

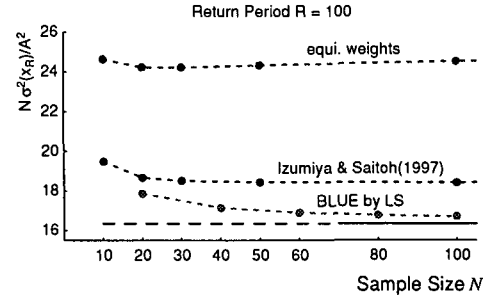
式 (26) における最小化については、最急降下法を用いる。その際、重み係数の初期値に順序統計量の分散 $\sigma^2(x_i)$ を規格化した σ_i^2 を使い、順序統計量の分散 $\sigma^2(x_i)$ および共分散行列 S_{ij} の数値化にあたっては、泉宮・齋藤 (1997) で得られている評価式を利用した。

図-2 は、Gumbel 分布について検討した結果である。図-2(a) より、順序統計量の分散の逆数を重みとした最小自乗法による誤差分散に比して、わずかであるが、式 (26) を用いて最小化した誤差分散 (BLUE by LS) が減少することがわかる。誤差分散における標本サイズの影響を除いたものが図-2(b) である。式 (26) による最小化誤差は、標本サイズが増加するにつれ、最小誤差に漸近する傾向がある。また、重み係数に関しては、図-3 で示すとおり、順序統計量の分散の逆数とする重み係数と比較した時、順序が大きい(極値波高が相対的に小さい)位数で大きく異なる。また、標本サイズを変化させても、順位に対する重み係数の分布形状には違いはほとんど見られなかった。

欠測のある標本(観測された個数を N_o 、欠測数を C)を対象にする場合、欠測データの順位を空位にして扱え



(a)



(b)

図-2 最小自乗法による確率波高の誤差分散とその下限値の比較 (その2)

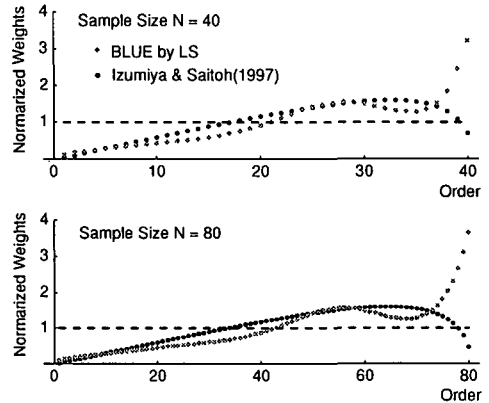
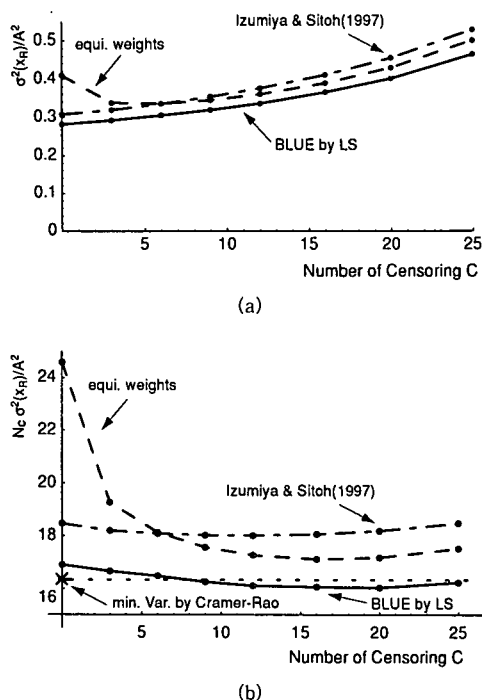
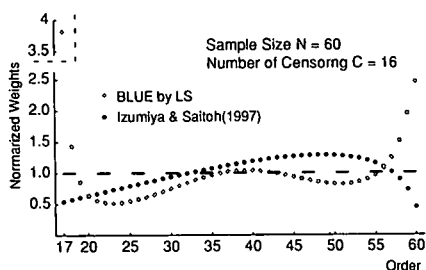


図-3 最良となる重み係数

ばよい。ただし、式 (31) および (32) に含まれる N は欠測データ数も含めた標本サイズ $N_o + C$ であり、式 (31) および (32) 以外の式に含まれる N (例えば、式 (12) ~ (15) での N) は、欠測データ数を除いて、観測値として情報をもっている標本サイズ N_o であることに注意を要する。この点から、欠測データを対象にした場合の誤差分散は、標本サイズ N_o に逆比例することが予想される。図-4(a) に示すように、重み付けられた最小自乗法ではその傾向があるのに対し、等重みの最小自乗法では、標本サイズ N_o に必ずしも逆比例する傾向になっていないことがわかる。その理由は、上位の順序統計量の分散が過大であるため、等重みの最小自乗法では、上位の順



図—4 欠測による確率波高の誤差分散の変化



図—5 欠測のある標本に対する最良な重み係数

序統計量に過度に依存するためである。その結果、式(22)において、欠測により標本サイズが減少し、その逆数 $N_c^{-1} (> (N_c + C)^{-1})$ が大きくなる度合いよりも、欠測値を空位に扱って、 $\{e_{AA}y_R^2 + e_{AB}y_R + e_{BB}\}$ が小さくなる度合いの方が強くなるので、確率波高の誤差分散が小さくなると考えられる。

標本サイズの影響を除いて、最小誤差分散と比較したものが図—4(b)である。式(26)を用いて最小化した誤差分散が、Cramér-Raoによる最小誤差分散より下まわ

る結果になっているが、この原因は、誤差分散の基準化にあたって、標本サイズに N_c を用いていることにある。Cramér-Raoによる最小誤差分散は独立なデータで構成される標本の情報量をもとに導かれたものであるのに対し、順序統計量を用いる最小自乗法では、独立でない順序のついたデータで構成される標本の情報量に基づく。欠測データの順位がわかっている標本は、同じ標本サイズの独立なデータからなる標本に比べ情報量が多いので、Cramér-Raoによる最小誤差分散は、欠測のある標本に対しては過大評価になっているのである。

欠測のある標本についての重み係数の分布は、図—5のとおりであり、順位の高い位数の傾向は、図—2(c)と同じであるが、欠測により残った上位の位数の重みも大きくなることがわかった。

4. 結 語

本研究は、式(1)で表わされる重み付き最小自乗法に対し、重み係数を変化させて最良線形不偏推定とする検討を行った。順序統計量の分散を考慮した重み付き最小自乗法による極値波高の誤差分散は、従来の最小自乗法によるものに比して十分に小さいが、漸近的に有効とはいえない。重み係数を変化させ誤差分散を最小化することにより、漸近的に有効となる傾向が現れることを示した。また、最良推定となる重み係数は、順序統計量の分散による重み係数に比べ、低位の重みは異なる。欠測した標本を対象にした場合には、欠測により残った上位の位数の重みも大きくなることを示した。

本研究は、運輸施設整備事業団「運輸分野における基礎的研究推進制度」による「高潮・高波の推算技術の高度化と防災に関する基礎研究」による研究の一部であることを付記し、ここに謝意を表する。また、グラフ作成に協力頂いた儀保 香氏(名古屋工業大学卒業生)に感謝します。

参 考 文 献

- 泉宮尊司・齋藤雅弘 (1997): 極値統計解析における順序統計量の分散を考慮した母数推定法, 海岸工学論文集, 第44巻, p. 181-185.
- 合田良実 (1988): 極値統計におけるプロットニング公式ならびに推定値の信頼区間に関する数値的検討, 港湾技術研究所報告, 第27巻, 第1号, p. 31-92.