

波の統計量に及ぼす非線形性の影響

——主として数値シミュレーションを用いた解析——

小松崎泰光*・加藤 始**・信岡尚道***

1. 緒 言

波の統計理論は、従来定常ガウス過程を前提とした線形理論で構築されてきた。しかし、実際の波には非線形の性質があり、不規則な水位波形の頻度分布が正規分布からずれる現象（図-1）や周波数スペクトルの低周波・高周波側の増大など多様な現象として現れる。従来、波の統計量の研究は、一般的に非線形性の弱い現地波浪観測データや線形数値シミュレーションを使って行われてきた。そのため、波の統計量に及ぼす非線形性の影響についてはあまり説明されていない。また、加藤ら（1999）は、波のスペクトルを基にした波浪の統計量の特性に関する研究において、風洞水路の幅が風波の非線形性に影響するのではないかと指摘している。

本研究においては、2 次の非線形性を考慮した一方向不規則波シミュレーションを行って各種統計量を算出し、従来の線形理論における統計量と比較することによって、波の統計量に及ぼす非線形性の影響について明らかにすることを目的とする。さらに、方向分散を考慮した多方向非線形不規則波シミュレーションを行うことにより、方向分散が波の非線形性に及ぼす影響についても検討する。

2. 波の統計量と非線形性を表すパラメータ

2.1 水位に関する統計量

波の統計理論は水位の確率分布が正規分布で表わされるという前提に基づいているが、実際の海の波は正規分布からややひずんだ形をしている（図-1）。こうした分布形のひずみを表わす指標としては skewness（歪み度）があり、波の上昇量を η とすると、

$$\text{skewness} = \frac{1}{\eta_{rms}^3} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\eta_i - \bar{\eta})^3 \dots\dots\dots (1)$$

で表される。線形波の場合、skewness=0 である。波の非線形性が強くなると、波の峰が尖って谷がなだらかなるため、分布形は上下非対称になり、その値は 0 より大

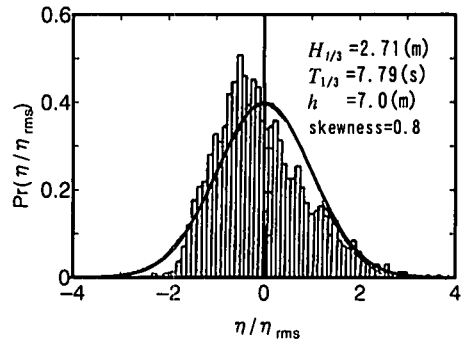


図-1 表面波形の頻度分布の観測例（角野ら，1986）

きくなる。そのため、skewness は水面波形の非線形性を示す指標として用いられている。

また、Goda（1983）は水面波形の非線形性を表わすものとして次式の $\Pi_{1/3}$ を提案し、この値が大きくなるほど非線形性が強まることを示した。

$$\Pi_{1/3} = (H_{1/3}/L_A) \cot^3(k_A h) \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 L_A は有義波周期に対応する微小振幅波の波長、 k_A はその波数、 h は水深である。

2.2 周期に関する統計量

波の線形性を前提とした Rice の理論によると、波形から計算した波の平均周期 T_M とスペクトルモーメントから求めた周期 T_{02} は次のように関係づけられる。

$$T_{02}/T_M = 1.0 \dots\dots\dots (3)$$

ここに

$$T_{02} = \sqrt{m_0/m_2} \dots\dots\dots (4)$$

で、 m_0 、 m_2 は波の周波数スペクトル $S(f)$ のモーメントとして次式で与えられる。

$$m_n = \int_0^\infty f^n S(f) df \quad (n=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (5)$$

しかし、Rice の理論は実際の海で厳密には成り立たないことが合田ら（1974）により報告されている。

2.3 スペクトル幅に関する統計量

スペクトル帯域の指標として、スペクトル幅パラメ

* 正会員 工修 東亜建設工業(株)
** 正会員 工博 茨城大学名誉教授
*** 正会員 工博 茨城大学助手 工学部都市システム工学科

ター ε および ν があり, 次式で表される.

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_2 m_4}} \dots\dots\dots (6a)$$

$$\nu = \sqrt{\frac{m_0 m_2}{m_1^2} - 1} \dots\dots\dots (6b)$$

ε が 0 に近いときを狭帯域スペクトル, 1 に近いときを広帯域スペクトルという.

3. シミュレーション手法

3.1 シミュレーション波形の定式化

2 次までの非線形性を考慮した表面波形 $\eta(x, t)$ は Hasselmann (1962) に基づいて摂動展開することにより

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \eta^{(1)}(x, t) + \eta^{(2)}(x, t) \\ &= \int_{k \in \omega} dA \exp\{i(k \cdot x - \omega t)\} \\ &= \int_{k \in \omega} \{dA^{(1)} + dA^{(2)}\} \exp\{i(k \cdot x - \omega t)\} \quad (7) \end{aligned}$$

で与えられる (Hudspeth, 1979; 橋本, 1993). ここに, $dA^{(1)}$, $dA^{(2)}$ は表面波の 1 次及び 2 次の Fourier-Stieltjes 成分の複素振幅である. 1 次の複素振幅 $dA^{(1)}$ は, 1 次の周波数スペクトル $S^{(1)}(\omega)$ 及び 1 次の方向スペクトル $S^{(1)}(\omega, \theta)$ の定義より次式で与えられる.

$$dA^{(1)} = \begin{cases} \sqrt{S^{(1)}(\omega) d\omega} : (\text{一方向}) \\ \sqrt{S^{(1)}(\omega, \theta) d\theta d\omega} : (\text{多方向}) \end{cases} \dots\dots\dots (8)$$

また, 2 次の複素振幅 $dA^{(2)}$ は $dA^{(1)}$ を用いて次式で表せる.

$$\begin{aligned} dA^{(2)}(k, \omega) &= \int_{k_1 \in \omega_1} H(k_1, k_2, \omega_1, \omega_2) \\ &\quad \times dA^{(1)}(k_1, \omega_1) dA^{(1)}(k_2, \omega_2) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

式 (9) 中の $H(k_1, k_2, \omega_1, \omega_2)$ は表面波の 2 次の非線形核関数であり, 次式で表される (Tick, 1963).

$$\begin{aligned} H(k_1, k_2, \omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{2g} [2(\omega_1 + \omega_2) D(k_1, k_2, \omega_1, \omega_2) - \frac{g^2 k_1 k_2}{\omega_1 \omega_2} \\ &\quad + \omega_1 \omega_2 + \omega_1^2 + \omega_2^2] \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(k_1, k_2, \omega_1, \omega_2) &= [2(\omega_1 + \omega_2) \{g^2 k_1 k_2 - (\omega_1 \omega_2)^2\} - \omega_1 \omega_2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) \\ &\quad + g^2 (|k_1|^2 \omega_2 + |k_2|^2 \omega_1) / [2\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2)^2 \\ &\quad - g(|k_1| + |k_2| \tanh(|k_1 + k_2| h))] \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここに, g は重力加速度, k_i と ω_i は線形成分波の波数ベクトルと角周波数であり, それらは分散関係式

$$\omega_i^2 = g|k_i| \tanh(|k_i| h) \dots\dots\dots (12)$$

を満たし, かつ

$$k_i(-\omega_i) = -k_i(\omega_i) \dots\dots\dots (13)$$

の関係がある.

3.2 スペクトル形

非線形不規則波をシミュレーションする場合は, 一方向では周波数スペクトルを, 多方向では方向スペクトルを必要とする (式 (8)). 本研究で使したスペクトル形について以下に述べる.

3.2.1 周波数スペクトル

周波数スペクトル $S(f)$ は有義波高を $H_{1/3}$, 有義波周期を $T_{1/3}$ として, 次式で与えられる修正 JONSWAP 型 (合田, 1987) を用いた.

$$\begin{aligned} S(f) &= \beta_f H_{1/3} T_p^{-4} f^{-5} \exp[-1.25(T_p f)^{-4}] \\ &\quad \times \gamma^{\exp[-(T_p f - 1)^2 / 2\sigma^2]} \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\sigma = \begin{cases} 0.07 : (f \leq f_p) \\ 0.09 : (f > f_p) \end{cases} \dots\dots\dots (15)$$

ここに, β_f , γ , σ は定数である. γ の値は 1.0, 3.3, 7.0 と変化させて計算した.

3.2.2 方向スペクトル

方向スペクトルは, 周波数スペクトル $S(f)$ と方向関数 $G(f|\theta)$ を用いて次式で与えられる.

$$S(f, \theta) = S(f) G(f|\theta) \dots\dots\dots (16)$$

なお, 方向関数は式 (17) で提案されている光易型方向関数 (Mitsuyasu, 1975) を使用し, 方向集中度 $S_{\max}$ を 10, 25, 75, 200 として計算した.

$$G(f|\theta) = G_0 \cos^{2S} \left(\frac{\theta}{2} \right) \dots\dots\dots (17)$$

$$G_0 = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2S} \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta \right]^{-1} \dots\dots\dots (18)$$

$$S = \begin{cases} S_{\max} (f/f_p)^6 : f \leq f_p \\ S_{\max} (f/f_p)^{-2.5} : f > f_p \end{cases} \dots\dots\dots (19)$$

ここに, f : 周波数, f_p : ピーク周波数, θ : 方向角, S : 方向集中度であり, $S_{\max}$ は方向分布の最大集中度を表わすパラメータである.

3.3 シミュレーション条件

一方向及び多方向のシミュレーション条件を表-1, 表-2 に示す. なお, 成分波数 $N=256$, サンプリングタイム $\Delta t=0.5$ s, 周波数領域 f は合田 (1987) にならって, $f=0.0 \sim 6.5 f_p$ (f_p : ピーク周波数, Hz) とした. また一様乱数を用いて位相差 $0 \sim 2\pi$ を与えた.

4. 一方向シミュレーション波形の解析

4.1 一方向シミュレーション波形のスペクトル

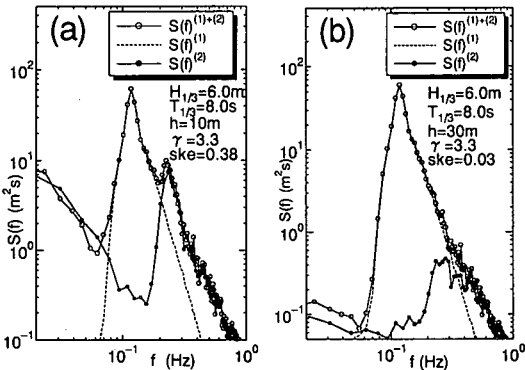
一方向非線形シミュレーション波形より算出した周波数スペクトルの一例を図-2a, b に示す. 図-2a の設定水深 10 m の場合に, スペクトルの低周波側と高周波側

表一 シミュレーション条件 (一方向)

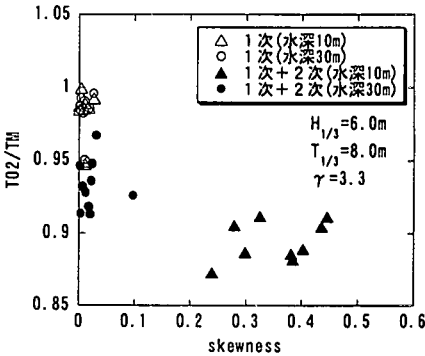
設定波高	設定周期	設定水深	γ	ケース数
6.0(m)	8.0 s	10 m	1, 3.3, 7.0	10
		30 m		10
4.0(m)		10 m		10
		30 m		10

表二 シミュレーション条件(多方向)

設定波高	6.0 m
設定周期	8.0 s
設定水深	10, 30 m
γ	3.3
S_{max}	10, 25, 75, 200
方向角分割数	32
ケース数	10



図一2 シミュレーション波形より算出したスペクトル
(a : 水深 10 m, b : 水深 30 m)



図一3 skewness と T_{02}/T_M の関係

(2 倍周波数成分)に顕著な 2 次の非線形成分が現れていることがわかる。このとき、skewness=0.38 であった。一方、図一2b の非線形成分の増大があまり見られない設定水深 30 m の場合、skewness=0.03 であり、skewness が非線形性の強弱に対応して変動していることがわかる。このことから、線形波形、非線形性の強い波形（水深 10 m）、非線形性の弱い波形（水深 30 m）より算出した各統計量について skewness を中心に比較し、線形統計量と非線形性を考慮した統計量にどのような変化が現れるかを検討する。

4.2 一方向シミュレーション波形の統計解析

図一3 に skewness と T_{02}/T_M の関係の一例を示す。1 次波形の場合、 T_{02}/T_M の平均値は 0.98~0.99 であり、Rice の理論値 1.0（式（3））にかなり近い値をとるが、2 次まで考慮した場合、skewness が大きくなるにつれて、 T_{02}/T_M は 1.0 より小さくなっているのがわかる。これは、式（4）により、スペクトルから波の平均周期 T_{02} を求める際に、非線形性による高周波側のエネルギーの増大により、スペクトル 2 次モーメント m_2 が大きくなったためである。一方、非線形性の弱い波形（水深 30 m）において、skewness はあまり増大していないが、 T_{02}/T_M の減少は大きい。これは、図一2a のように高周波側に 2 倍周波数成分のピークが現れるような非線形性の強い波でなくとも、図一2b のように、1 次のパワーに 2 次のパワーが加わることによって、 T_{02}/T_M は Rice の理

論値 1.0 よりもかなり小さくなることを示している。 m_2 における非線形性の影響は T_{02}/T_M の算出に大きく影響することがわかる。

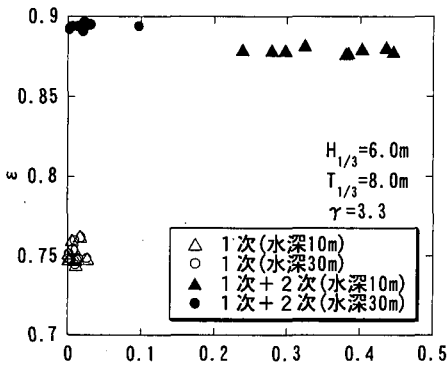
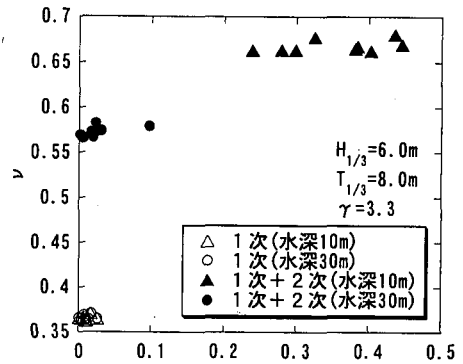
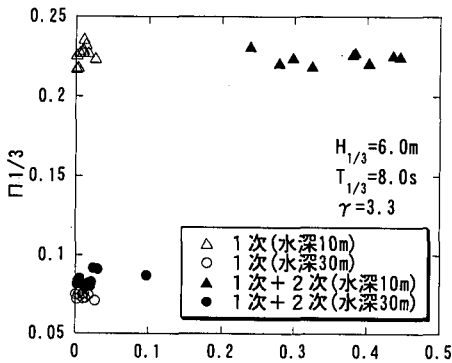
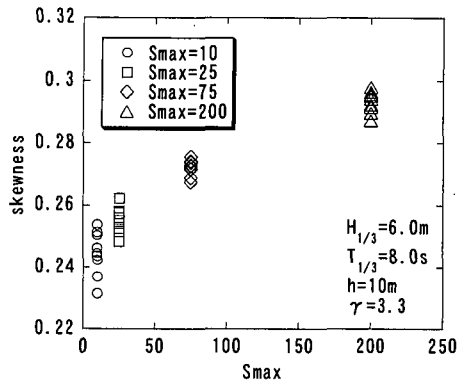
図一4a, b に 1 次波形と 2 次まで考慮した波形より算出された skewness とスペクトル幅パラメーター ϵ, ν （式（6a, b））の関係を示す。この図より、2 次まで考慮すると、 ϵ, ν はともに 1 次の場合よりも値がかなり大きくなるのがわかる。 ϵ, ν はスペクトルモーメントから計算されるため、 T_{02} と同様に非線形性の影響によるスペクトルの高周波側のエネルギーの増大によるものと考えられる。

図一5 に 1 次波形と 2 次まで考慮した波形より算出された skewness と合田 (1983) の提案した非線形パラメーター $\Pi_{1/3}$ （式（2））の関係を示す。2 次まで考慮した場合、skewness が大きくなるにつれて $\Pi_{1/3}$ も大きくなっており、波の非線形性の傾向をよくとらえている。しかし、1 次波形においても水深が浅い場合（10 m）には、 $\Pi_{1/3}$ は大きくなっている。このことより、Goda の提案した非線形パラメーター $\Pi_{1/3}$ は、非線形性の強弱に対応した変動を見せるが、一方では水深の影響を強く受けるということがわかる。

5. 方向分散の非線形性への影響

5.1 統計量への影響

方向分散を考慮した多方向非線形不規則波より算出さ

図-4a skewness と ε の関係図-4b skewness と ν の関係図-5 skewness と $\Pi_{1/3}$ の関係図-6 S_{max} と skewness の関係

れた統計量において、1次波形の場合、最大集中度 S_{max} が変化しても各統計量に変化は見られなかった。一方、2次まで考慮した波形の場合には、skewness の値に変化が見られた。図-6 は2次まで考慮した場合の S_{max} と skewness の関係を示している。 S_{max} が大きくなるにつれて skewness が大きくなる、つまり方向分散が小さくなるにつれて非線形性が強まることがわかる。

5.2 風波データとの比較

図-7a は1章で述べた、加藤ら (1999) の解析結果であり、風波 I (茨大、水路幅: 0.3 m) と風波 K (港研、水路幅: 1.5 m) における $H_{1/3}$ と skewness の関係を示したものである。同じ $H_{1/3}$ に対する skewness は、風波 K よりも風波 I の方が大きいことがわかる。

図-7b は2次までの多方向非線形不規則波より算出された $H_{1/3}$ と skewness の関係を示したものである。この図より、 S_{max} が大きくなるにつれて、skewness が大きくなっていることがわかる。図-8 は2次まで考慮した多方向非線形不規則波の、 $S_{max}=10$ と $S_{max}=75$ におけるスペクトルの計算例を示したものである。この図より、2倍周波数成分のピーク値及び高周波側のエネルギーは、 $S_{max}=75$ の場合に比べ、 $S_{max}=10$ の場合には減少し

ていることがわかる。これは、 S_{max} 小さくなる、つまり方向分散が大きくなるにつれて、非線形性は弱くなることを表している。風洞水路の風波は、水路幅が狭いほど方向分散が小さいと考えられるため、風洞水路の風波における非線形性の強さは水路幅に影響されるということがわかった。

6. 結 論

本研究の主要な結論を以下に示す。

- (1) シミュレーション波形の結果において、スペクトルモーメントから求まる周期 T_{02} と波形から計算した平均周期 T_M の比 T_{02}/T_M は、波の非線形性が強くなると線形理論値 1.0 より減少することを示した。これは、非線形性の影響によりスペクトル2次モーメント m_2 が大きくなるのが原因であることを確認した。
- (2) 非線形性を考慮した場合のスペクトル幅パラメータ ε , ν は、線形の場合と比較するとその値はかなり増大することを示した。 ε , ν はスペクトルモーメントから計算されるため、非線形性の影響によるスペクトルの高周波側のエネルギーの増大が原因であると考えられる。

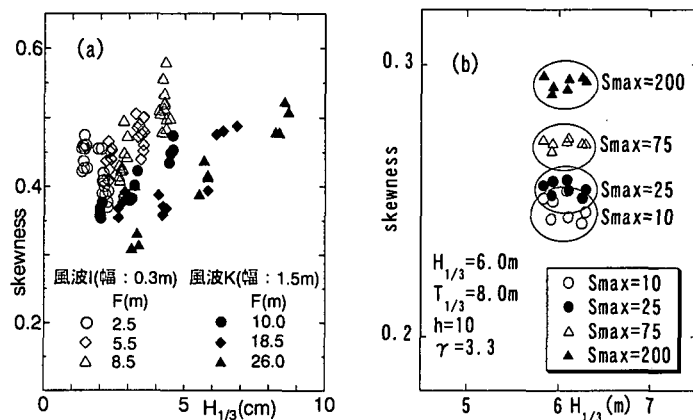


図-7 $H_{1/3}$ と skewness の関係
(a: 風洞水路, b: 多方向シミュレーション)

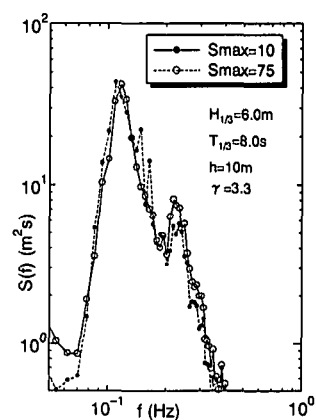


図-8 波形のスペクトル
(多方向シミュレーション)

(3) Goda (1983) が波の非線形性を示す指標として提案した非線形パラメーター $\Pi_{1/3}$ は、非線形性の強弱に対応した変動を見せるが、一方では水深の影響を強く受けるということがわかった。

(4) 多方向非線形不規則波シミュレーションを用いて、方向分散が大きいほど波の非線形性が弱くなることを示した。この原因は、方向分散が大きくなるとスペクトルの2倍周波数成分のピーク値及び高周波側のエネルギーが減少するためである。風洞水路の風波は、水路幅が狭いほど方向分散が小さいと考えられるため、風洞水路の風波における非線形性の強さは水路幅に影響されることを明らかにした。

参 考 文 献

- 角野 隆・関野高志・梅沢一之 (1986): 浅海域における波浪特性に関する現地観測, 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 149-153.
- 加藤 始・小高奈美・松本礼子他 (1999): 沿岸波浪のスペクトル統計量とそれに及ぼす波の非線形性の影響について, 海岸

工学論文集, 第46巻, pp. 221-255.

- 合田良實・永井康平 (1974): 波浪の統計的性質に関する調査・解析, 港研報告, 第13巻, 第1号, pp. 3-37.
- 合田良實 (1987): 数値シミュレーションによる波浪の標準スペクトルと統計的性質, 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 131-135.
- 橋本典明 (1993): 波浪の多方向性と弱非線形性を考慮した水圧波から表面波への換算法について, 港研報告, 第32巻, 第1号, pp. 27-51.
- Goda, Y. (1983): A unified nonlinearity parameter of water waves, Rept. PHRI., Vol. 22, No. 3, pp. 3-30.
- Hasselmann, K. (1962): On the nonlinear energy transfer in a gravity-wave spectrum, Part 1, General theory, J. Fluid Mech., vol. 12, pp. 481-500.
- Hudspeth, R. T. and M.-C. Chen (1979): Digital simulation of nonlinear random waves, J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Div., ASCE, Vol. 105, WW1, pp. 68-84.
- Mitsuyasu, H. et al. (1975): Observation of the directional spectrum of ocean waves using a cloverleaf buoy, J. Physical Oceanography, vol. 5, pp. 750-760.
- Tick, L. J. (1963): Nonlinear probability models of ocean waves, Ocean wave Spectra, Prentice-Hall, pp. 163-169.