

時間領域における入反射分離法の試み

北 野 利 一*・山 本 陽 平**・喜 岡 渉***・間 瀬 肇****

1. はじめに

沿岸域の波動場解析において、入射波と反射波の分離が必要となる場合がある。合田ら (1976) をはじめ、従来の入反射分離法の基本的な考え方は、空間 2 地点で観測した海面変動を周波数分解し、各周波数毎に微小振幅波の分散関係を満たす波長をもつ三角関数波の入射波と反射波に分解することである。この方法には 2 つの主要な前提条件が含まれる。1 つは周波数分解を行うための定常性・周期性の条件、他の 1 つは周期と波長の対応関係として表面波の分散関係を用いることである。また、有限長データの周波数分解には推定誤差が含まれるにも関わらず、分解後の値をそのまま用いることも疑問点である。前者 2 つの前提条件は、風波のような短周期の不規則波浪については問題が少ないと考えられるが、自由波と拘束波の混在する沿岸域の長周期波を対象とする場合には、1 つの周波数に対し複数の波数が対応するため、満足し得ない条件である。

本研究では、定常的な振動解析に用いられる Fourier 変換の代わりに、振幅・位相が変調する非定常振動を解析する手段として、Hilbert 変換を利用する。その適用にあたって、Hilbert 変換に局所性の性質があることを新たに示す。その結果、各観測点の時間変動を対象にした Hilbert 変換の時間的な局所性と、観測点の距離が短いことによる空間的な局所性を同一視することにより、任意時刻の局所的な振幅および位相に基づいた、時間領域における入反射分離を試みる。なお、時間領域の解析であることから、周波数毎の波数の分散関係を前提条件に用いずに、本研究では、3 観測点の水位変動波形を用いる。

2. 周波数領域における従来の入反射分離

従来用いられる入反射分離法は、成分波がその周波数に応じた波速で伝播するものとして周波数領域で入・反射波を分離するものである。すなわち、適切な距離 x_0 だ

け離れた 2 地点 A と B (図-1 参照) での時間波形 $\eta_A(t)$ および $\eta_B(t)$ を Fourier 変換により得られる成分波の複素振幅 $\zeta_A(\omega)$ および $\zeta_B(\omega)$ は、分散関係式より得られる波数 k を用い、入・反射波の複素振幅をそれぞれ $\zeta_I(\omega)$ および $\zeta_R(\omega)$ とすると、以下の方程式を満たす。

$$\{\zeta_A(\omega), \zeta_B(\omega)\} = \{\zeta_I(\omega), \zeta_R(\omega)\} \begin{pmatrix} e^{-ikx_0} & 1 \\ e^{ikx_0} & 1 \end{pmatrix} \cdots (1)$$

なお、入・反射波の時間波形 $\eta_{I,R}(t)$ は、逆 Fourier 変換により、

$$\eta_{I,R}(t) = \sum_{\omega} e^{i\omega t} \zeta_{I,R}(\omega) \cdots \cdots \cdots (2)$$

として得られる。

上に示した従来の入反射分離法には、2 つの主要な前提条件が含まれている。1 つは、周波数分解を行うための定常性・周期性の条件である。式 (1) の振幅 $\zeta_{A,B}(\omega)$ および $\zeta_{I,R}(\omega)$ は時間に依存せず、各周波数毎に定常的な量であるので、式 (1) に示される入・反射波の空間的な伝播の成立条件は、時間に依存しない関係式となっている。また、周期性に関して、実際に観測されるデータは有限長の離散データであり、たとえ定常な不規則振動であっても、周波数分解に伴うみかけ上の成分が現れて誤差を伴う。この周波数分解誤差を減らすためには、周波数領域での平均化を行えばよいが、平均化の際に位相情報が欠落するため、入・反射波のエネルギースペクトルとして分解できても、時間波形を得ることはできない。もう 1 つの前提条件は、周波数と波数の対応関係として、分散関係式を用いることである。

これら 2 つの前提条件は、風波については問題が少ないと考えられるが、自由波と拘束波が混在する沿岸域の長周期波を対象とする場合には、満足し得ない条件である。その理由は、自由波と拘束波の混在する長周期波浪

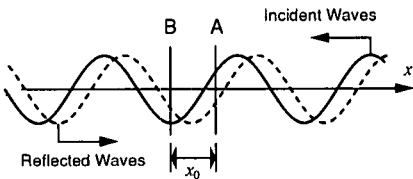


図-1 観測点と入・反射波の関係 (2 点観測)

* 正会員 工博 名古屋工業大学講師 社会開発工学科
** 名古屋工業大学大学院
*** 正会員 Ph.D. 名古屋工業大学教授 社会開発工学科
**** 正会員 工博 京都大学助教授 防災研究所

場は、1つの周波数に対して複数の波数が存在するため、周波数あるいは波数のいずれを固定しても、他方が時間的に変調するため、式(1)に示される空間方向への定常的な伝播を表わす関係式は満足しないからである。

3. Hilbert 変換

定常的な振動解析に用いられる Fourier 変換の代わりに、振幅および位相が変調する非定常振動を解析する手段として、Hilbert 変換を用いる。Fourier 変換は、時間領域の変動を周波数領域の振幅に移す変換であるのに対し、Hilbert 変換は、以下で定義するように、時間領域の振動を時間領域の別の振動に移す変換である。

$$\xi(t) = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau \quad (3)$$

ここで、 $p.v.$ は積分の主値を意味する。区間 $(-\infty, \infty)$ で定義される三角関数 $\exp(i\omega t)$ に対しては、

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau = \frac{2}{i} \exp(i\omega t) \times p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i\tau} e^{i\omega\tau} d\tau = -i \exp(i\omega t) \quad (4)$$

となり、 $\cos(\omega t)$ を $\sin(\omega t)$ に、 $\sin(\omega t)$ を $-\cos(\omega t)$ に移す。なお、積分変換である Hilbert 変換の積分区間は、正・負の無限大を含む領域で定義されているが、対象とする振動関数 $\eta(\tau)$ と関数 $1/\tau$ の畳込み積分であるため、対象とする時刻 $\tau=t$ から十分離れた時刻 $\tau=t \pm T$ の外側である正・負の無限大を含む領域 $(-\infty, t-T)$ および $(t+T, \infty)$ での積分値の寄与は小さい。例えば、周期 $T_0(=2\pi/\omega_0)$ の三角関数に対しては、

$$\begin{aligned} \xi_T(t) &= p.v. \int_{t-T}^{t+T} \frac{\cos(\omega_0\tau + \phi_0)}{\pi(t-\tau)} d\tau \\ &= \sin(\omega_0 t + \phi_0) \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \text{si}(\omega_0 T) \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

のように正弦積分で表わされる。なお、三角関数の Hilbert 変換の性質から、上式で $T \rightarrow \infty$ とすれば、

$$\begin{aligned} \xi_{T \rightarrow \infty}(t) &= \text{Re} \left\{ \exp(i\phi_0) \times p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega_0\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau \right\} \\ &= \sin(\omega_0 t + \phi_0) \quad (6) \end{aligned}$$

となる。以上の結果をグラフ化した図-2に示すとおり、規則的な三角関数波の場合には、前後数波が積分区間内

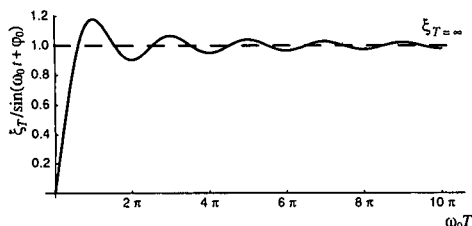


図-2 有限な積分区間による Hilbert 変換の誤差評価

に含まれていれば、十分な精度で定義どおりの無限区間で積分した結果とみなせる。すなわち、Fourier 変換における積分の収束性と同じ条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\eta(t)| dt < \infty \quad (7)$$

のもとで、十分に大きな T をとれば、

$$\begin{aligned} & \left(\int_{-\infty}^{t-T} + \int_{t+T}^{\infty} \right) \frac{\eta(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \times \int_0^{\infty} \frac{\eta(t+T+s) + \eta(t-T-s)}{-\pi(1+s/T)} ds \approx 0 \quad (8) \end{aligned}$$

となり、式(3)は、以下のように近似できる。

$$\xi(t) \approx p.v. \int_{t-T}^{t+T} \frac{\eta(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau \quad (9)$$

このことは、いくらデータ長を増しても全ての周波数成分に無視し得ない誤差の含まれる Fourier 変換とは異なり、Hilbert 変換により得られる値は、対象とする時刻の前後に十分な時間長のデータがあれば、誤差は十分に小さくなるという局所性の性質がある。また、振動関数 $\eta(t)$ を実部に、Hilbert 変換により得られる $\xi(t)$ を虚部とした複素数により、振幅と位相が定義できる。

$$A(t)e^{i\phi(t)} = \eta(t) + i\xi(t) \quad (10)$$

式(9)の振幅 $A(t)$ および位相 $\phi(t)$ は、Hilbert 変換の局所性から、時刻 t の前後の局所的な時間で観測される $\eta(t)$ でほぼ決定されており、時刻 t 近傍での振動特性から定まる振幅と位相である。また、時刻 t 近傍での位相変化から時刻 t における周期を定義することも可能である。以上の局所的振動特性(振幅、位相および位相変化)に基づいた時間領域における入反射分離法を次節で提案する。

時間間隔 Δt でサンプリングされた離散データ $\eta_{i=1 \sim N}$ を対象とする場合には、観測されないデータ $\eta_{i \neq 1 \sim N}$ をゼロとみなし、連続量で定義された式(3)の Hilbert 変換の代わりに、

$$\xi_i = \pi^{-1} \sum_{j \neq i} (i-j)^{-1} \eta_j \quad (11)$$

を用いればよい。なお、観測されないデータによる寄与は小さいので、ゼロでなくてもよい。従って、式(11)の計算を高速化するためには、 k を整数として、

$$\tilde{\eta}_{j=i+kN} = \eta_i \quad (i=1 \sim N) \quad (12)$$

と離散データに周期性をもたせ、式(4)で示した三角関数の Hilbert 変換の性質を利用すれば、FFT が適用できる。すなわち、周期境界となっているデータ $\tilde{\eta}_i$ を Fourier 変換して得られる $\tilde{\xi}_i$ に対し、負の周波数に対応する振幅 $\tilde{\xi}_{i \leq 0}$ をゼロとおいた振幅

$$\zeta_i = \begin{cases} \tilde{\zeta}_i & (i > 0) \\ 0 & (i \leq 0) \end{cases} \dots\dots\dots (13)$$

を逆 Fourier 変換することにより、離散量に対する Hilbert 変換が効率よく計算できる。

4. 時間領域における入反射分離

周波数領域での入反射分離は、波数と周波数の分散関係と2地点での水面変動の時間記録を用いて解析するが、時間領域では、時々刻々と変化する波長と周期の関係をあらかじめ定めることは不可能である。そこで、波長と周期との分散関係に代わる条件として、本研究では、観測地点をもう1点追加して、図-3に示すような3地点での水面変動の時間記録を用いる。

各点での水位変動データを Hilbert 変換して得られる複素振幅 ζ_A , ζ_B および ζ_C は、3で考察したとおり、各時刻 t 周辺の局所的な振動特性から定まる時刻 t の振幅と位相である。3つの観測地点の距離が互いに大きく離れていなければ、局所的な時間を対象に定められた量は、局所的な空間を対象に決まる量でもある。そこで、時刻毎に入・反射波に対して、3観測地点で共通な波長が局所的に定まるものと仮定し、時刻毎の入・反射波の複素振幅 ζ_i および ζ_r を三角関数の一部として空間方向に以下のように展開する。

$$(\zeta_A, \zeta_B, \zeta_C) = (\zeta_i, \zeta_r) \begin{Bmatrix} \exp\left(-\frac{i}{2}\theta_i\right), 1, \exp\left(\frac{i}{2}\theta_r\right) \\ \exp\left(\frac{i}{2}\theta_r\right), 1, \exp\left(-\frac{i}{2}\theta_i\right) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、式表現を簡潔にするため、地点AとCの内点である地点Bは線分ACの中点であるとする。位相角 θ_i および θ_r は、 $0 < \theta_{i,r} < \pi$ を満たす実数であり、入・反射波のAC間での位相変化である。したがって、距離ACを x_0 と表わせば、時刻毎の入・反射波の波数は $\theta_{i,r}/(2\pi x_0)$ となる。

時間領域での入反射分離とは、各時刻で式(14)を満たすように、各時刻での入・反射波の複素振幅 $\zeta_{i,r}(t)$ および位相角 $\theta_{i,r}(t)$ を求めることである。なお、式(14)による入・反射波の関係式は、周波数領域での関係式である式(1)に、地点Cでの関係

$$\zeta_C(\omega) = (\zeta_i(\omega), \zeta_r(\omega)) \begin{pmatrix} e^{ikx_0} \\ e^{-ikx_0} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

を加え、距離と波数により決まる位相角 kx_0 を入・反射波のそれぞれについて $\theta_{i,r}/2$ としたものに形式的には一致する。しかし、式(13)における複素振幅 $\zeta_{A,B,C}$, $\zeta_{i,r}$ および位相角 $\theta_{i,r}$ は時間的に変動する量であり、変調する非定常な入・反射波を対象とした関係式になっている点で意味は異なる。

区間ACにおける入・反射波の位相変化角 $\theta_{i,r}$ および地点A, Cの複素振幅 $\zeta_{A,C}$ を

$$\begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_i + \theta_r \\ \theta_i - \theta_r \end{pmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

および

$$\begin{pmatrix} \bar{\zeta} \\ \Delta\zeta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \zeta_C + \zeta_A \\ \zeta_C - \zeta_A \end{pmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

のように和と差(位相角については係数1/2を付していない点に注意)の組に置き換え、式(14)を変形することにより、

$$\tan \Delta\theta = \text{Im}\left(\frac{\bar{\zeta}}{\Delta\zeta}\right) / \text{Re}\left(\frac{\Delta\zeta}{\bar{\zeta}}\right) \dots\dots\dots (18)$$

および

$$\cos \bar{\theta} = \text{Re}\left(\frac{\bar{\zeta}}{\Delta\zeta}\right) \cos \Delta\theta + \text{Im}\left(\frac{\Delta\zeta}{\bar{\zeta}}\right) \sin \Delta\theta \dots\dots (19)$$

が得られる。基礎式である式(14)にもどって考えると、複素値に関する3つの等式に対し、未知数は2つの複素数 $\zeta_{i,r}$ および2つの実数 $\theta_{i,r}$ の合計6つの実数となっており、未知数の個数と等式の個数は一致する。しかしながら、式(19)で左辺の値が必ずしも区間 $[-1, 1]$ に含まれるわけではないので、実数値 $\bar{\theta}$ を常に得ることができるとは限らない。従って、式(14)の入反射分離の関係式により、全ての時刻で分離可能ではないことに注意する必要がある。式(19)から実数値 $\bar{\theta}$ を得ることができない場合についての議論は後で行う。式(19)から実数値 $\bar{\theta}$ が得られる場合には、再び式(14)を変形することにより、入・反射波の複素振幅 $\zeta_{i,r}$ は以下のように求められる。

$$(\zeta_i, \zeta_r) = \frac{(\zeta_A, \zeta_C)}{e^{-i\bar{\theta}} - e^{i\bar{\theta}}} \begin{Bmatrix} \exp\left(-\frac{i}{2}\theta_r\right), \exp\left(-\frac{i}{2}\theta_i\right) \\ -\exp\left(\frac{i}{2}\theta_r\right), -\exp\left(\frac{i}{2}\theta_i\right) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

なお、上式は観測点での値 $\zeta_{A,C}$ を用いているが、他の組み合わせによる観測点の値 $\zeta_{A,B}$ あるいは $\zeta_{B,C}$ を用いた表現も可能である。

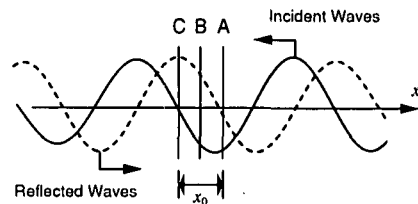


図-3 観測点と入・反射波の関係(3点観測)

5. 数値シミュレーションおよび考察

(1) 規則波に対する入反射分離

無次元周波数を 1 とする単一成分波で、無次元振幅が 1 の入射波と 0.8 の反射波から成る合成波について、時間領域での入反射分離を行った結果を図-4 に示す。ここでは、周波数領域での分離法との違いを顕著にするため、データ長を 10 波未満とした。データ長が周期の整数倍でない場合、図-5 に示すように複数の周波数の成分波に分解されるため、周波数領域で分離した入・反射波は単一成分波にならない。それに対し、時間領域での入反射分離では、両端の 1 波程度を除き、入・反射波は一定振幅の規則波が得られることが確認できる。なお、図中の水平および鉛直の点線は、与えた入・反射波の振幅およびゼロダウncross時刻を表わしている。

(2) 帯域制限波に対する入反射分離

無次元周波数が 0.9~1.1 の函型スペクトルを有する浅海波に対して、反射率を平均的に 0.3 とした合成波の時間領域での入反射分離を行った結果を図-6 に示す。ここでは十分に長いデータを用いた解析結果の一部を示している。矢印で示される時刻付近では、式 (19) で $\bar{\theta}$ が求められないために、入・反射波が分離できない。

位相角 $\bar{\theta}$ が求められない原因の 1 つは、式 (18) における位相角 $\Delta\theta$ が適切に得られないことにある。式 (18) の右辺の分子・分子の量は、式 (14) の関係を代入することにより、

$$\begin{cases} \text{Im}(\bar{\zeta}/\zeta_B) \\ \text{Re}(\Delta\zeta/\zeta_B) \end{cases} = \sin \frac{\bar{\theta}}{4} \text{Im} \left(\frac{\zeta_R - \zeta_I}{\zeta_R + \zeta_I} \right) \times \begin{cases} \sin \left(\frac{1}{4} \Delta\theta \right) \\ \cos \left(\frac{1}{4} \Delta\theta \right) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (21)$$

のように変形できる。距離 AC 間は代表波長に比べて十分短く、その間での平均位相変化角 $\bar{\theta}/4$ は小さいため、 $\text{Im}(\bar{\zeta}/\zeta_B)$ および $\text{Re}(\Delta\zeta/\zeta_B)$ は、いずれも小さい量である。ところで、式 (14) で表わされる入・反射波および各観測点での複素振幅の関係は、厳密には成立し得ない関係式である。それにもかかわらず、本研究では成立すると仮定するので、中央点である観測点 B での入・反射波の

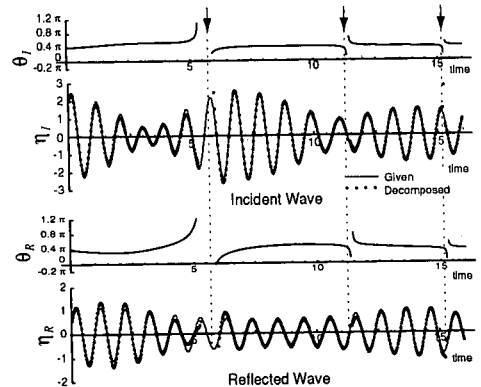


図-6 帯域制限波についての入反射分離結果 (その 1)

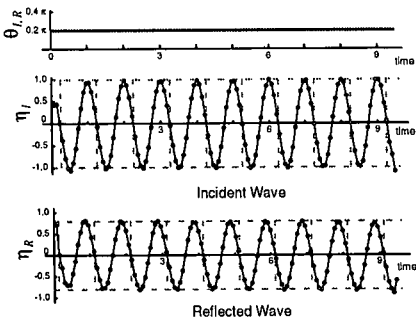


図-4 規則波についての時間領域での入反射分離

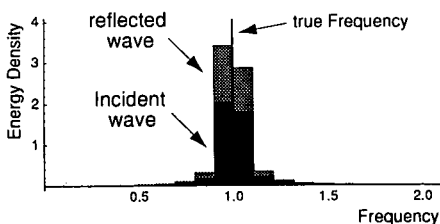


図-5 規則波に対する入・反射波の周波数分解

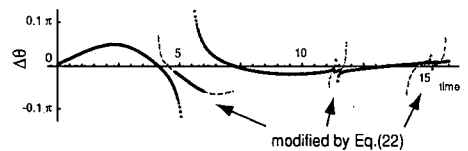


図-7 位相角 $\Delta\theta$ の修正

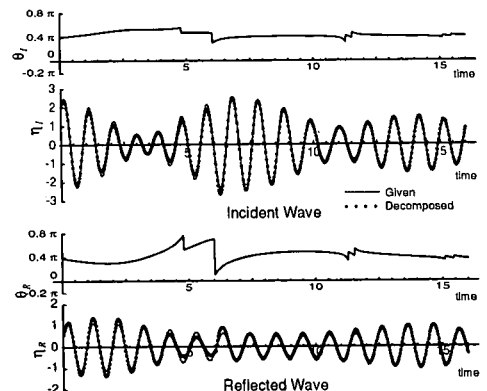


図-8 帯域制限波についての入反射分離結果 (その 2)

複素振幅 $\zeta_{i,R}$ から式 (21) により決まる複素振幅 $\bar{\zeta}/\zeta_B$ および $\Delta\zeta/\zeta_B$ は、実際に観測点で得られる $\zeta_{A,B,C}$ を代入した量とは異なる。従って、式 (18) の左辺、あるいは式 (21) の右辺の $\text{Im}(\bar{\zeta}/\zeta_B)$ および $\text{Re}(\Delta\zeta/\zeta_B)$ に誤差が含まれるとすれば、たとえその誤差が小さくても、小さな量の割算で定義される $\tan \Delta\theta$ には大きな誤差が含まれる。そこで、有限値をとる 0/0 型の極限で用いられるロピタルの定理を利用し、

$$\tan \Delta\theta(t_j) = \left\{ \text{Im} \left(\frac{\bar{\zeta}}{\zeta_B} \right) \right\}_{t_j-1}^{t_{j+1}} / \left\{ \text{Re} \left(\frac{\Delta\zeta}{\zeta_B} \right) \right\}_{t_j-1}^{t_{j+1}} \quad \cdots \cdots (22)$$

とする。ただし、式 (22) において、空間微分すべきところを 3 点観測ではできないため、時間微分で代用している。

図-7 は、式 (18) の左辺が発散する時刻の周辺において、式 (22) により修正した位相角 $\Delta\theta$ を表わしたものである。修正された位相角 $\Delta\theta$ を用いて、入反射分離を行った結果を図-8 に示す。波数を表わす位相角 $\theta_{i,R}$ に不連続が見られるものの分離した入・反射波形は、与えた波形に良好に一致していることが確認できる。

(3) 拘束長周期波を含む入反射波分離

前節 (2) で用いた帯域制限波を、水深 10 m の浅海における周期 30 秒程度の自由長周期波 (波速 9.8 m/s 程度) とみなし、同水深での卓越周期 8 秒の風波 (群速度 7.17 m/s) に伴う拘束長周期波を単一規則波として加えた波を作成した。なお、拘束長周期波の周期は 30 秒と設定し、その波数は自由波の波数の 1.37 ($=9.8/7.17$) 倍とした。

図-9 は上で示した波に対する入反射分離の結果である。図中の矢印は式 (22) を用いて位相角 $\Delta\theta$ を修正した時刻を示す。分離結果は前節 (2) の拘束波がない場合の分離結果に比べ劣るものの、ゼロクロス時刻や波高に関して、与えた入・反射波に大部分の時刻で良好に一致している。

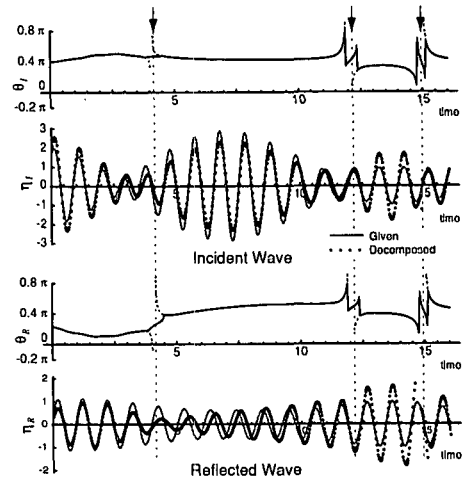


図-9 拘束波を含む不規則波についての入反射分離結果

6. 結 語

本研究では、Hilbert 変換の局所性の利点を活用し、分散関係式を仮定せずに、3 観測点の水位変動の時間波形を用いて、時間領域における入反射分離法を提案した。なお、本手法は、3 観測点の水位変動だけでなく、2 観測点の流速・圧力変動の組み合わせにも適用可能である。本手法の 2 観測点での現地データへの適用については Hossain ら (2001) を参考されたい。

一部の図面作成にあたっては、二宮太一君 (大学院生) の協力に感謝する。また、本研究は、(財)中部電力基礎技術研究所の助成に基づくものであり、ここに謝意を表す。

参 考 文 献

- 合田良実・鈴木康正・岸良安治・菊池 治 (1976): 不規則波における入・反射波の分離推定法, 港湾技研資料, No. 248, 24 p.
- Hossain, A.・北野利一・喜岡 涉 (2001): 沖浜における長周期波の挙動, 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp. 271-275.