

斜面を遡上する内部波の変形・砕波に関する可視化実験と $k-\epsilon$ モデルを用いた数値解析

梅 山 元 彦*・新 谷 哲 也**

1. 緒 言

海洋や閉鎖水域の密度成層境界面を伝播する内部波については、鉛直二層流体中における理論的考察がなされて以来、多くの研究者によって異なった条件下での研究が行なわれてきた。内部波は沿岸の海洋環境にも重要な役割を果たしており、内部波の砕波による下層からの栄養塩の拡散やそれに伴う水質変化などはその一例である。最近では水平スケールが著しく小さく波高の大きい内部波の存在が沿岸での観測によって明らかにされており (Petruncio ら, 1998), それら観測された内部波の斜面上での砕波変形を三次元シミュレーションによって再現しようとする試みもある (Fringer ら, 2000)。内部波は現在のところ水温の多点観測でしか測定できず、しかも発生が間欠的であるために、その現象を観測値だけを手がかりに解明することは困難である。一方、内部波の実験は表面波と比べて手間がかかり、しかも測定値の精度に問題があるために、一般的な測定法である連続写真や電気伝導度計を使った方法では、現象の任意時間の一断面、または一地点の時間変動を測定することは可能であっても、理論値と比較するにはいささか問題があった。

本研究では斜面を伝播する内部波の変形と砕波後の境界面付近の混合および流況を解析するために、非線形長波理論と $k-\epsilon$ モデルを使って理論計算を行なう。そして、それを水理模型実験により求めた可視化解析の結果と比較することによって解の妥当性を検討する。

2. 斜面を遡上する非線形内部長波

水深が岸に向かって直線的に浅くなってゆく海底地形を考える。海は密度の異なる二層から構成されるものとして、 x 軸を上層と下層の間の密度境界面上を沖方向に、 y 軸を密度境界面と海底との接点から鉛直上向きにとる (図-1)。岸に向かって伝播する内部波は長波の性質をもつものと仮定すれば、連続の式および運動の式は次のように表すことができる。

$$(\eta + h)_t + [u(\eta + h)]_x = 0, \dots\dots\dots (1)$$

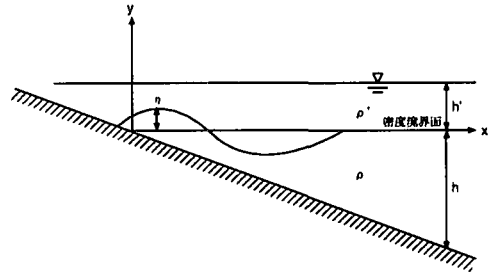


図-1 座標系

$$u_t + uu_x + g^*(\eta + h)_x = g^* h_x, \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 η は内部境界面の鉛直変位、 u は内部波粒子速度、 h は任意地点での下層厚であり、

$$g^* = g \frac{\rho - \rho'}{\rho}.$$

また、 g は重力加速度、 ρ は下層密度、 ρ' は上層密度である。内部波の波速を C とすると次の関係がある。

$$C^2 = g^* \frac{(\eta + h)h'}{\eta + h + h'}, \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 h' は上層の厚さである。(3) を使って (1) と (2) を書き換えると

$$2\left(1 + \frac{\eta + h}{h'}\right)C_t + u_x C + 2\left(1 + \frac{\eta + h}{h'}\right)C_x = 0, \dots\dots\dots (4)$$

$$u_t + uu_x + 2\left(1 + \frac{\eta + h}{h'}\right)^2 C C_x = g^* h_x, \dots\dots (5)$$

となる。次に、(4) と (5) の和および差を作り、簡素化のために下層厚を

$$h = \frac{m}{g^*} x, \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 m は定数であり、 $\eta + h \ll h'$ とすれば、次の一對の特性曲線の方程式が得られる。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm C) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u \pm 2C - mt) = 0. \dots\dots (7)$$

(7) は $dx/dt = u + c$ 上では $u + 2C - mt$ は一定であることを表し、 $dx/dt = u - c$ の上では $u - 2C - mt$ が一定であることを表している。従って

* 正会員 Ph.D. 東京都立大学大学院工学研究科 土木工学専攻
** 正会員 工修 東京都立大学助手大学院工学研究科 土木工学専攻

$$u+2C-mt=\alpha \quad \text{along} \quad \frac{dx}{dt}=u+C, \cdots (8)$$

$$u-2C-mt=\beta \quad \text{along} \quad \frac{dx}{dt}=u-C, \cdots (9)$$

とすると, $dx/dt=u+C$ 上で α は一定であるが β は変数になり, $dx/dt=u-C$ 上で β は一定であるが α は変数になり, 次の連立微分方程式が得られる.

$$x_\beta=(u+C)t_\beta \cdots \cdots \cdots (10)$$

$$x_\alpha=(u-C)t_\alpha \cdots \cdots \cdots (11)$$

さらに, 独立変数として, λ と σ を次のように導入すると

$$\frac{\lambda}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}=u-mt, \cdots \cdots \cdots (12)$$

$$\frac{\sigma}{4}=\frac{\alpha-\beta}{4}=C, \cdots \cdots \cdots (13)$$

(10) と (11) を (12) と (13) を使って変形した後, それらの和と差とを求めると

$$x_\sigma-ut_\sigma+Ct_\lambda=0, \cdots \cdots \cdots (14)$$

$$x_\lambda-ut_\lambda+Ct_\sigma=0. \cdots \cdots \cdots (15)$$

次に, (15) を λ で微分した式と (16) を σ で微分した式の差をとると

$$\sigma(t_{\lambda\lambda}-t_{\sigma\sigma})-3t_\sigma=0, \cdots \cdots \cdots (16)$$

になる. また, (14) と (15) を (12) と (13) を使って変形すると, それぞれ次の式が得られる.

$$\left(x-\frac{u^2}{2m}-\frac{\sigma}{16m}\right)_\sigma+\frac{\sigma u_\lambda}{4m}=0, \cdots \cdots \cdots (17)$$

$$\left(x-\frac{u^2}{m}\right)_\lambda+\frac{u}{2m}+\frac{\sigma u_\sigma}{4m}=0. \cdots \cdots \cdots (18)$$

(17) は流関数 ψ をつかうと

$$\psi_\lambda=4\left(x-\frac{u^2}{2m}-\frac{\sigma}{16m}\right), \cdots \cdots \cdots (19)$$

$$\psi_\sigma=-\frac{\sigma}{m}u, \cdots \cdots \cdots (20)$$

である. これを (18) に代入すると

$$(\sigma\psi_\sigma)_\sigma-\sigma\psi_{\lambda\lambda}=0. \cdots \cdots \cdots (21)$$

この式は (16) と同じ意味であり, ψ が求まれば u , C , x , t は (20), (13), (19), (12) から求めることが出来る. また境界面の鉛直変位量は (3), (17), (13) から

$$\eta=-\frac{m}{g^*}\left(\frac{u^2}{2m}+\frac{\psi_\lambda}{4}\right). \cdots \cdots \cdots (22)$$

表面波に対する非線形浅水波理論の解は Carrier ら (1957) や首藤 (1965) に詳しく示されているが, ここでは斜面を進行する内部波について Mei (1989) と同様の方法で解くと次式が得られる.

$$\begin{aligned} \eta = & -\frac{8g^*}{\sigma^2}A\left[J_1\left(\frac{\omega}{2m}\sigma\right)\cos\left(\frac{\omega}{2m}\lambda\right)\right. \\ & +\left\{J_0\left(\frac{\omega}{2m}\sigma\right)-\frac{2m}{\omega\sigma}J_1\left(\frac{\omega}{2m}\sigma\right)\right\}\sin\left(\frac{\omega}{2m}\lambda\right)\Big]^2 \\ & +A\left\{J_0\left(\frac{\omega}{2m}\sigma\right)\sin\left(\frac{\omega}{2m}\lambda\right)+J_1\left(\frac{\omega}{2m}\sigma\right)\cos\left(\frac{\omega}{2m}\lambda\right)\right\}, \\ & \cdots \cdots \cdots (23) \end{aligned}$$

ここで, J_0 と J_1 は第 1 種のベッセル関数, A は定数, ω は角振動数である. $x>0$ においては,

$$\begin{aligned} \sigma &= 4c \approx 4\sqrt{g^*h} = 4\sqrt{mx}, \\ \lambda &\sim -2mt, \end{aligned}$$

であるから, (23) は次のように書き表せる.

$$\begin{aligned} \eta = & -\frac{g^*}{2mx}A\left[2\omega\sqrt{\frac{x}{m}}\cos\omega t\right. \\ & -\left\{J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{m}}\right)-\frac{1}{2\omega}\sqrt{\frac{m}{x}}J_1\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{m}}\right)\right\}\sin\omega t\Big]^2 \\ & -A\left\{J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{m}}\right)\sin\omega t-J_1\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{m}}\right)\cos\omega t\right\}. \\ & \cdots \cdots \cdots (24) \end{aligned}$$

3. k - ε モデルを使った砕波後の変形

水槽内の 2 次元の内部波運動を記述するための基礎方程式は質量保存式, 運動方程式, 密度の保存式であり, これらの式に非圧縮性とブーシネスク近似を仮定すると次式のように表される.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \cdots \cdots \cdots (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}\left\{(\nu+\nu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}+ \frac{\partial}{\partial y}\left\{(\nu+\nu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}, \cdots \cdots \cdots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial y}-\frac{\rho-\rho'}{\rho}g \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}\left\{(\nu+\nu_t)\frac{\partial v}{\partial x}\right\}+ \frac{\partial}{\partial y}\left\{(\nu+\nu_t)\frac{\partial v}{\partial y}\right\}, \cdots \cdots \cdots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}+u\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x}+v\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\nu}{S_c}+\frac{\nu_t}{\sigma_t}\right)\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x}\right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\frac{\nu}{S_c}+\frac{\nu_t}{\sigma_t}\right)\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y}\right\}, \cdots \cdots \cdots (28) \end{aligned}$$

ここで, u と v はそれぞれ x 方向と y 方向の速度であり, $\bar{P}$ は平均圧力, $\bar{\rho}$ は平均密度である. ν と ν_t は, それぞれ動粘性係数と渦動粘性係数であり, S_c と σ_t は, それぞれシュミット数と乱流シュミット数である.

乱流項を完結させるために, k - ε 二方程式モデルを採用する. 乱流エネルギー k とその散逸率 ε の輸送方程式はそれぞれ次式で表される (Nakayama, 1995).

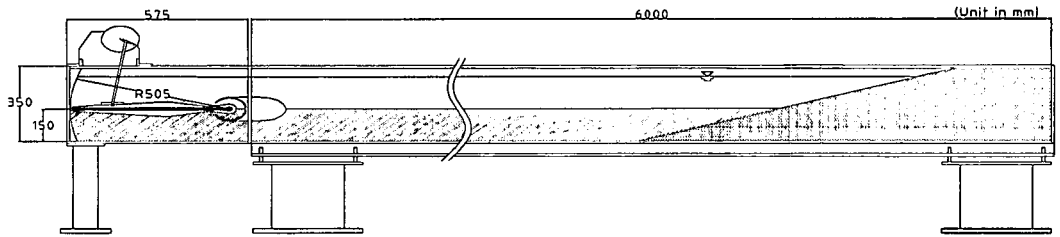


図-2 内部波造波実験装置

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right\} + P_r + G - \varepsilon, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right\} \\ &+ c_{e1} \frac{\varepsilon}{k} \{ P_r + (1 - c_{e3}) G \} - c_{e2} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (30) \end{aligned}$$

ここで、 P_r は次式で表される平均ひずみによる乱流生成項であり、次式で与えられる。

$$P_r = \nu_t \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}, \quad (31)$$

ここで、式中の G は以下に示される浮力による乱流生成項である。

$$G = g \frac{\nu_t}{\sigma_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad (32)$$

また、渦動粘性係数は以下の式で計算される。

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (33)$$

(29), (30), (33) において係数の値は $c_\mu = 0.09$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $c_{e1} = 1.44$, $c_{e2} = 1.92$, $c_{e3} = 1.0$ とした。

モデルでは、水面の境界条件は変位なしのスリップ境界とし、造波機位置で造波機の運動に対応するように周期的なフラックスを与えた。それ以外の壁面はノンスリップ境界とし、壁面に近接する第一格子点において壁法則によるマッチングを行った。基礎方程式はスタッガード格子を用いた有限体積法によって離散化し、計算領域(造波機部分を除いた水平 600 cm, 鉛直 30 cm の領域)を、水平方向と鉛直方向にそれぞれ等間隔格子(265 × 50)に分割した。また、運動方程式と平均密度の輸送方程式中の移流項の差分には高精度風上差分の QUICK スキームを用い、 k と ε の輸送方程式中の移流項の差分にはハイブリッドスキームを用いた。これらの離散化された方程式に SIMPLE アルゴリズムを適用して収束解を得た。また、計算はクーラン数が 0.5 を越えないように時間ステップを調整して実行した。

4. 可視化実験と理論計算結果

実験は、図-2 に示す長さ 650 cm, 幅 15 cm, 深さ 35 cm の両面ガラス張り水槽を用いて行なった。内部波は密度境界面の位置に設置したフラップ式水平板をモーターでゆっくりと振動させることによって発生させた。なお、この水平板の回転軸は水槽底面から 15 cm の高さで固定してある。斜面は造波機の端から 330 ~ 530 cm の間に設置し、その勾配は 0.15 とした。水槽には、先ず下層に青色に着色した塩水を入れ、次に上から真水を注いで二層の流体を充填した。下層の塩分密度は 1.0225 g/cm^3 で厚さは 15 cm, 上層の真水の厚さは 15 cm とした。また、内部波周期を 4.8 ~ 10.6 s の範囲で造波させた。密

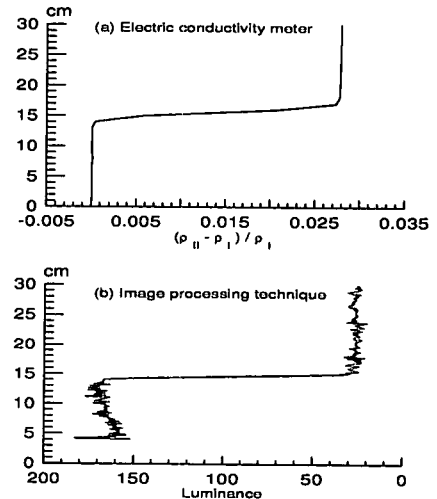


図-3 静止状態での鉛直塩分分布および照度分布

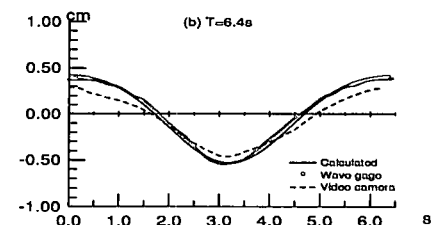


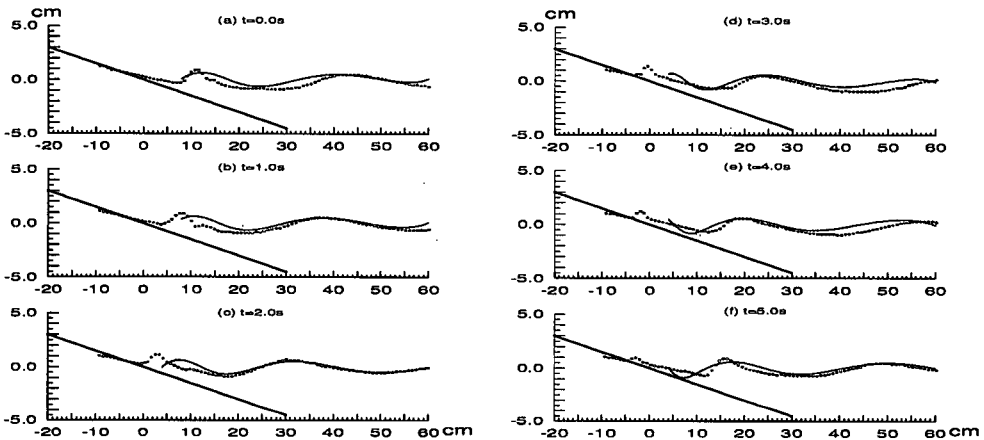
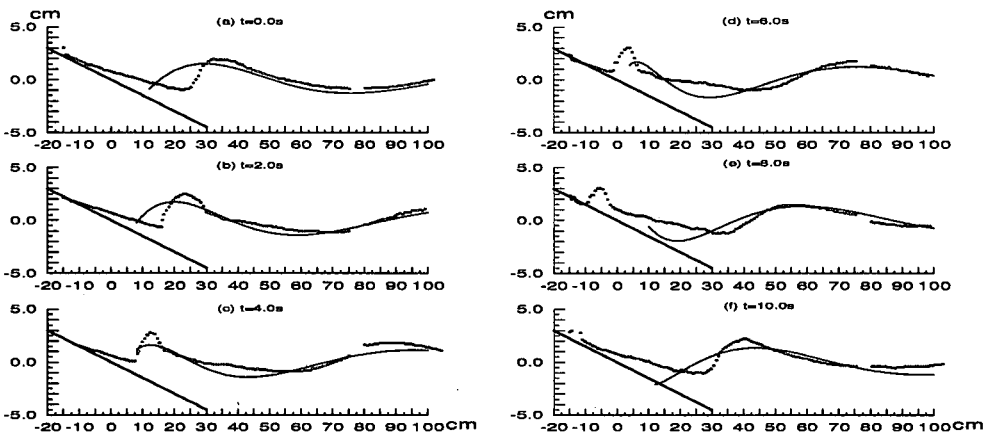
図-4 内部波高計、画像解析による内部境界面の鉛直変動

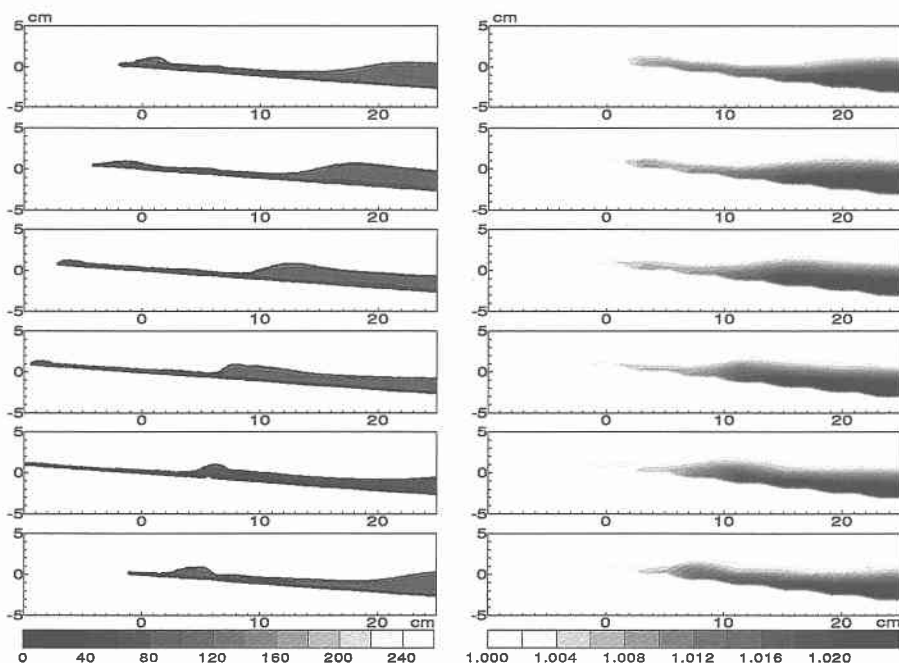
度境界面の変動は造波機から 253 cm の地点に設置した内部波高計で測定するとともに、斜面上の領域を 3 台のデジタルビデオカメラで撮影した。ビデオカメラは水槽から 2 m 離し、撮影範囲はそれぞれ造波装置から、252.9~297.9 cm, 301.9~348.2 cm, 348.2~393.2 cm とした。撮影された空間画像は、画像処理ソフトを用いることによって最高で 0.3 秒間隔の輝度分布図に変換することができる。それぞれの画像は密度境界面の変位や砕波によって密度層が破壊した後の密度変化の検討に用いた。

実験に先だって、静止状態での二層状況を確認するために鉛直方向の塩分分布および照度分布を測定した。塩分分布は電気伝導度計を用いて水面から鉛直に 1.0 cm 間隔で計測し、照度分布はビデオカメラからの可視解析画像をデジタル化することによって求めた。図-3 にはそれぞれの結果が示されているが、ともに二層が構成されていることがわかる。また、内部波高計によって得ら

れる時間変動と、連続する画像から予測される密度境界面変動量の整合性を確認するために、水槽に斜面を設置しない状態での内部波造波実験も行った。図-4 は、下層密度が $\rho=1050 \text{ mg/cm}^3$ で周期が $T=6.4 \text{ s}$ の場合の両者を比較したものである。画像解析の結果の方が内部波高計の結果よりも振幅が小さくなる傾向にあるが、両者共に下に凸の形状をしている点は一致している。なお、同図には内部波高計の結果と比較するために、三次オーダーの内部波理論によって得られた密度境界面の時間変動曲線が描かれている。

図-5 は、 $T=4.8 \text{ s}$ の場合の内部波の斜面上での変形を造波開始から 1 分 46 秒を $t=0$ として 1 秒間隔でプロットしたものである。○印は実験結果を実線は (24) 使って計算した結果を示している。実験結果から内部波は進行性の波であることがわかる。理論値はどの時間においても実験値とかなり良好な整合性を示していることがわかる。図-6 は、 $T=10.6 \text{ s}$ の場合の内部波形を造波


 図-5 内部波の斜面上での変形 ($T=4.8 \text{ s}$)

 図-6 内部波の斜面上での変形 ($T=10.6 \text{ s}$)



図一七 砕波後の密度境界面近傍での密度変化 ($T=4.8$ s).

左が実験結果 (単位: 256 階調の輝度) で, 右が数値計算結果 (単位: g/cm^3) である.

開始から 2 分 3 秒を $t=0$ として 2 秒間隔でプロットしたものである。周期が長くなると, 内部波の先端付近での砕波が顕著になってくる。実験波形は斜面に近づくほど理論値との整合性が悪くなるのがわかる。これは, 理論式が $x>0$ で定義されているためと考えられる。

図一七は斜面上部において砕波する内部波の一周期間の変化を実験結果と k - ϵ モデルによる数値計算結果を用いて比較したものである。図中, 実験結果の数値は輝度を, 計算結果の数値は密度を示している。内部波が斜面を遡上するにつれて内部波が前傾斜し, 砕波しながら先端部分に新たな内部波を生成していく過程が実験結果から読みとれるが, これは数値計算でうまく再現できていることがわかる。このように砕波後の両者の波形変化の過程は定性的には良く対応しており, 解析法は妥当であると言える。

5. 考 察

本研究では, 一定勾配の海底面上に形成された二層流体の内部境界面を伝播する内部波の変形および砕波によって引き起こされる混合現象を予測するために非線形長波理論と k - ϵ モデルを提案し, それぞれの解析結果の妥当性を可視化実験によって検討した。可視化実験で得られた内部波形は, 内部波周期および波高が小さいほど理論との整合性が良く, それらが増加するにつれて内部波の前傾が起こるために理論では再現しにくくなること

がわかった。しかしながら, 今回の可視化実験は砕波前の斜面上での内部境界面の変動を求めるには有効な手段であることが証明された。次に, k - ϵ モデルを用いた数値解析では斜面上部に遡上した後の内部波の変形・砕波過程をシミュレートしたが, その結果, 数値計算結果は実験結果と良好な対応を示すことが確認できた。今後, モデルの向上のためにさらに高次の風上差分を導入すれば数値拡散が減少し, 計算結果は実験結果に近づく可能性も考えられる。

参 考 文 献

- 首藤伸夫・松村圭二 (1965): 長波について——様傾斜斜面上へのうねあげ高一, 第 12 回海岸工学講演会論文集, pp. 176-179.
- Carrier, G. F. and H. P. Greenspan (1957): Water waves of finite amplitude on a sloping beach, *J. Fluid Mech.*, Vol. 4, pp. 97-109.
- Fringer, O. B., S. W. Armfield and R.L. Street (2000): Direct numerical simulation of unstable finite amplitude progressive interfacial waves, 5th Int. Symp. on Stratified Flows, Vol. II, pp. 749-754.
- Mei, C. C. (1989): The applied dynamics of ocean surface waves, World Scientific, 740 p.
- Nakayama, A. (1995): PC-Aided numerical heat transfer and convective flow, CRC Press, 298 p.
- Petruncio, E. T., L. K. Rosenfeld and J. D. Paduan (1998): Observations of the internal tide in Monterey Canyon, *J. Phys. Ocean.*, vol. 28, pp. 1873-1903.