

コロケート格子を利用した自由液面を有する流動場の解析手法

牛 島 省*・瀬 津 家 久**・山 上 路 生***・坂 根 由 季 子***

1. はじめに

自由液面を有する流れ場に対して精度の高い数値解析手法を開発することは、波と流れの共存場の数値予測や信頼性の高い数値造波水槽の確立などを行う際に重要である。本報では、砕波や水塊の離脱などが生じない程度の水面変動を伴う流れ、すなわち水深が水平座標の一価関数となる自由水面流れの数値解析手法について考察する。

ここで対象とする自由水面流れの計算では、水面の挙動を正確に取扱うとともに、内部流動に対して精度の高い数値解析スキームを適用することが必要である。非定常かつ空間的に非一様に変形する自由液面を扱う手法としては、空間中に固定された計算格子点を使用する Euler 法に分類されるものとして、マーカ粒子法 (Harlow & Welch, 1965), PIC 法 (Harlow, 1988) や VOF 法 (Hirt & Nichols, 1981), MARS 法 (功刀, 1997) などが提案されている。一方、計算格子点の移動を考える解法としては、格子点移動速度を流速と同一にする Lagrange 法 (Hirt ら, 1970) や両者が独立に定められる ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 法 (Hirt ら, 1974) などが用いられる。さらに、計算格子を用いず、流体を粒子の集まりとして扱う MPS 法 (Koshizuka & Oka, 1996) が近年提案されている。これらの手法には各々適用対象に応じた得失があるが、一般に Euler 法や MPS 法は、水面が大変形する場合や気液相間の複雑現象を扱う場合に有効である。一方、本研究で対象とする自由水面流れにおいては、水面形状の表現や境界条件の設定が比較的正確に行え、しかも内部流動に対して高精度の解析が可能な手法が望ましい。このため、本報では ALE 法に基づき、移動一般座標系を用いる計算手法を扱う。

一般座標系を用いた有限差分法による流体解析では、基本変数として流速の反変成分を staggered 格子上で用いる方法と、直交座標系の流速成分を collocated 格子で

用いる方法が適しているといわれ (Zang ら, 1994), 後者による平行平板間の乱流解析手法の有効性が示されている (梶島ら, 1997)。collocated 格子の利用は、このような計算精度の向上だけでなく、すべての変数がセル中心に配置されるため、水面近傍の境界条件の設定においても変数の扱いが容易であり, staggered 格子と比較して有利であると考えられる。しかし, 同格子を用いた自由水面流れの計算例は少なく, その有効性については実証されていない部分が多い。このため, 本報では collocated 格子における自由水面流れの計算法を示し, その適用性について検討を加えることとした。また, 内部流動を精度良く計算するためには, 基礎方程式中の移流項の取り扱いが重要となる。高精度のスキームが必要とされる乱流の直接計算 (DNS) までを視野に入れた場合, 現時点では 5 次の精度を有するスキームを適切に用いることでほぼ妥当な解が得られることが宮内ら (1995) により示されている。このため, 自由水面下の流れに対しては, 牛島ら (2001) が提案した 5 次精度相当の解析スキームである QSI (Quintic Spline Interpolation) スキームを適用する。

得られた計算手法の妥当性を確認するため, 最初にこれをキャビティ内の流動に適用し, ベンチマーク計算の基準となる結果と比較する。さらに, 重力および表面張力が復元力となる微小静振波 (セイシュ) の計算を行い, その結果について考察を加える。

2. 数値解析手法の概要

(1) 移動一般座標系による水面の取扱い

流体の境界形状が与えられた場合, これを境界条件として, 計算領域内部の格子点位置が定められる。この格子生成法に関しては, これまでにいくつかのものが提案されているが (Thompson ら, 1985), ここでは直交座標系と一般座標系 ξ_m ($m=1, 2$) の関係が次のポアソン方程式に従うものとする (Thompson ら, 1974)。

$$\frac{\partial^2 \xi_m}{\partial x_j \partial x_j} = P_m(\xi_1, \xi_2) \dots\dots\dots (1)$$

ここに, P_m は, 直交座標系により表される物理空間中において, 格子点間隔を制御するために用いられる関数で

* 正 会 員 工 博 京都大学助教授 大学院工学研究科 環境地球工学専攻
** フェロー 工 博 京都大学教授 大学院工学研究科 環境地球工学専攻
*** 学生会員 京都大学大学院 環境地球工学専攻

ある。物理空間中の格子点位置は、(1)式の独立変数と従属変数を交換した次式から求められる。

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} + P_m \frac{\partial x_i}{\partial \xi_m} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

(2)式は楕円型の偏微分方程式であるので、与えられた境界条件のもとに数値解を求めることができる。

自由液面のように、境界形状が時間とともに変形する場合には、ALE法(Hirtら, 1974)に基づき、各時間ステップごとに(2)式を解いて格子生成を行う。

(2) 基礎方程式の離散化

鉛直2次元流れ場において x_2 軸が鉛直上方を向くように直交座標系 x_i ($i=1, 2$)をとる。外力として重力のみを考えると、Navier-Stokes式は次式のように表される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -g\delta_{2i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + FU_i \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 u_i は直交座標系における x_i 方向の流速成分、 g は重力加速度、 δ はクロネッカーのデルタ、 ρ は流体密度、 p は圧力、 FU_i は移流項と拡散項を含む項である。

(3)式に対して時間方向に離散化を行い、圧力項を陰的に扱うと次式が得られる。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left(-g\delta_{2i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + FU_i \right) \Delta t \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 Δt は1ステップの時間きざみ幅、上添字 $n, n+1$ は時間ステップを表す。次のように流速成分を変数とする関数 f を定義する。

$$f(u_i^n) = -u_i^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j \partial x_j} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 ν は動粘性係数である。移流項と拡散項の時間方向の離散化に2次のRunge-Kutta法を適用すると、 FU_i は関数 f を用いて次式で与えられる。

$$FU_i = f(u_i^*) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 u_i^* は次式から求められる。

$$u_i^* = u_i^n + \frac{\Delta t}{2} f(u_i^n) \quad \dots\dots\dots (7)$$

基本変数として直交座標系上の変数を用いる場合、一般座標系において(4)式は次のように表される。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left(-g\delta_{2i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} + FU_i \right) \Delta t \quad \dots\dots\dots (8)$$

なお、物理空間と写像空間中の時間は同一であり、ともに t と表す。

本報の解析手法では、各時間ステップごとに計算された水面形状を境界条件として、(2)式を解いて格子生成を行う。この場合、境界形状の変形により内部の格子点位置も移動するため、 x_i および ξ_m の時間微分が0とは

ならない。従って、このような移動一般座標系においては、基礎方程式中に格子点移動速度成分を含むものとなり、(5)式は次のように表される。

$$f(u_i^n) = -(U_m^n - U_{0m}^n) \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\nu \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 U_m は流速の反変成分、 U_{0m} は物理空間中の格子点の移動速度の反変成分であり、それぞれ以下のように定義される。

$$U_m = u_i \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$U_{0m} = \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad \dots\dots\dots (11)$$

また、連続式は、次のように表される。

$$\frac{\partial (JU_m^{n+1})}{\partial \xi_m} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 J はヤコビアンであり、次式で与えられる。

$$J = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \quad \dots\dots\dots (13)$$

(3) QSIスキームによる移流項の解法

牛島ら(2001)は、直交座標系における等間隔 collocated 格子上でQSIスキームの適用方法を示したが、一般座標系でもほぼ同様で、以下のような手順をとる。まず、写像空間中において、格子点上に離散化された流速 u_i に対して、 ξ_m 方向に5次スプライン関数 S_{im} を求める。スプライン関数を求めるための格子点は、流速の反変成分 $U_m^n - U_{0m}^n$ の符号を考慮し、風上側に3点、その反対側に2点とる。 S_{im} は ξ_m に関する5次の多項式となるが、この1次の項の係数 C_{im1} を用いれば、(9)式右辺第1項は次のように表される。

$$-(U_m^n - U_{0m}^n) \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} = -(U_m^n - U_{0m}^n) C_{im1} \quad \dots\dots\dots (14)$$

5次スプライン関数は、Herriotら(1976)により提案された手法により求め、その係数 C_{im1} を用いて(14)式により移流項を計算する。

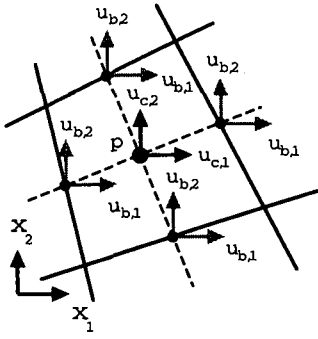
(4) collocated 格子上での解法

Rhie & Chow (1983)により提案された collocated 格子では、セル中心に流速と圧力を配置する。そして、圧力と流速の振動解を防ぐために、さらにセル境界面で定義される流速を圧力計算に利用する。

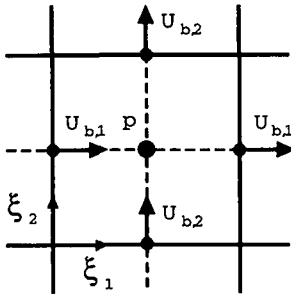
この変数配置に従い、図-1(a)に示すように、物理空間中においてセル中心に位置し、次式を満足する流速 $u_{c,i}$ を導入する。

$$u_{c,i} = u_i^n + (-g\delta_{2i} + FU_i) \Delta t \quad \dots\dots\dots (15)$$

(15)式は、(8)式から圧力項を除いたものとなっている。すなわち、次式の関係が成り立つ。



(a) 物理空間中の変数配置



(b) 写像空間中の変数配置

図-1 各空間中の変数の定義位置

$$u_i^{n+1} = u_{c,i}^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \dots\dots\dots (16)$$

一方、図-1(a)に示すように、セル境界上に $u_{b,i}$ なる流速を定義する。これらは $u_{c,i}$ を空間内挿することにより求める。

次に、図-1(b)に示すように、セル境界上で流速の反変成分 $U_{b,m}$ を求める。 $U_{b,m}$ により表示された連続式と、collocated 格子で用いられる $U_{b,m}$ と圧力の関係式はそれぞれ次のように表される。

$$\frac{\partial (JU_{b,m}^{n+1})}{\partial \xi_m} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial U_{b,m}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} g^{mj} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_j} \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 g^{mk} は基本テンソルの反変成分である。

$$g^{mk} = \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \dots\dots\dots (19)$$

$n+1$ ステップにおいて、(17) 式と (18) 式を同時に満足する流速と圧力を求めるため、HSMAC 法 (Hirt & Cook, 1972) を利用した。これより p^{n+1} が得られるので、セル中心における $n+1$ ステップの流速は、(16) 式から求められる。

3. 計算手法の適用性

(1) 正方形キャビティ内の流れ

本報の流体計算手法を Ghia ら (1982) により扱われた正方形キャビティ内の流れに適用する。これは、計算スキームの精度比較を行うためのベンチマーク計算として過去にしばしば取り上げられているものである。最初にスキームの相違を見るため、比較的粗い等間隔格子 (セル数 50×50) を利用した計算を行った。その結果、図-2(a)、図-2(b) に示すように、QSI スキームを用いた場合には、5 次風上差分より精度の高い結果が得られることが確認された。

次に、格子点を壁面近傍に密に配置した場合には、図-2(c)、図-2(d) に示されるように、QSI スキームでは、さらに少ないセル数 (42×42) でも Ghia (1982) の結果とほぼ一致する解が得られた。

(2) 矩形容器内の微小静振波

計算手法を矩形容器内に生ずる振幅が微小な静振波 (セイシュ) へ適用し、理論解との比較を行う。図-3 に示すように、矩形容器幅を l 、流体が静止した状態の水深を h とし、容器両端に腹、中央に節を持つ静振波を考える。この静振波は、初期条件として次式の水面形を与えることで発生する。

$$\eta = A \cos\left(\frac{\pi x_1}{l}\right) \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 η は図-3 に示すように、静止水面を基準とする水面高さである。これと同様の静振波の計算は、これまで解析手法の検証のためにしばしば行われているが (Ramaswamy, 1990; Ushijima, 1998)、いずれも復元力として重力のみを考え、水面変動の定性的な挙動を見るものであった。ここでは、復元力として重力と表面張力の両方を考慮し、理論解との定量的な比較を行う。

容器内の流体が完全流体 ($\nu=0$) であるとき、微小振幅波理論から得られる表面張力を考慮した分散関係式を用いると、この静振波の周期 T は次式で与えられる。

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k\left(g + k^2 \frac{\sigma}{\rho}\right) \tanh(kh)}} \dots\dots\dots (21)$$

k は波数で、ここでは $k = \pi/l$ となる。従って、初期水面形を (20) 式で与えると、流体が非粘性であるため、理論上は (21) 式の周期を有する水面振動が減衰せずに持続するものとなる。

上記のような微小静振波へ本報の計算手法を適用する。計算条件として、容器幅 l 、水深 h および流体密度 ρ をすべて 1.0 とし、初期条件として与える (20) 式の η の振幅は $A=0.01$ とする。計算セル数は、 15×15 とした。非粘性流体の場合、液面における流速の境界条件と

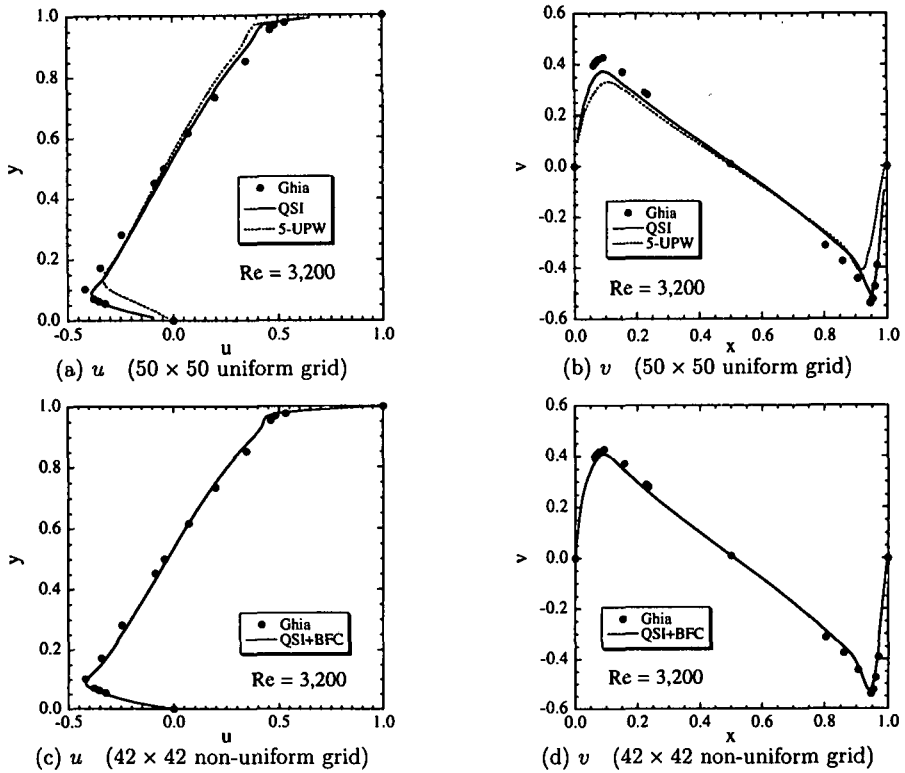


図-2 正方形キャビティ内の流速分布の比較

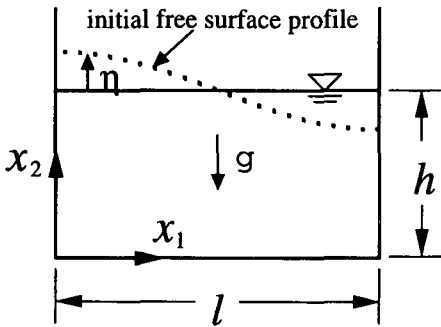


図-3 矩形容器の形状と座標系

して応力境界条件が利用できないため、液面上で $\partial u_{si} / \partial \xi_2 = 0$ という条件を設定した。ここに、 u_{si} は液面上の流速成分である。圧力の境界条件としては、次式を用いた。

$$p_s = p_a - \frac{\sigma h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 p_s および p_a はそれぞれ液面上および気体側の圧力、 σ は表面張力である。また、 $h_x = \partial h / \partial x_1$ および $h_{xx} = \partial^2 h / \partial x_1^2$ である。

計算では、最初に σ あるいは g を 0 とし、復元力が重力あるいは表面張力のみとなる静振波の計算を行い、

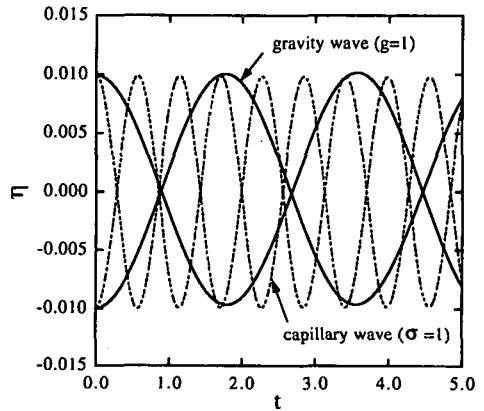


図-4 重力波および表面張力波の η の時系列

水面変動の状況を確認した。容器両端 ($x_1=0, l$) における η の時間的な変動の一例を図-4 に示す。復元力が重力あるいは表面張力のいずれの場合でも、初期の水面形により生じた静振波が減衰せずに持続するものとなっている。

次に、重力と表面張力が同時に作用する場合の静振波の計算を行い、理論値と比較した。 $g=1$ かつ $\sigma=0$ のときの周期を T_0 とするとき、(21) 式にここでの計算条件を用いると、 T/T_0 は次式のように表される。

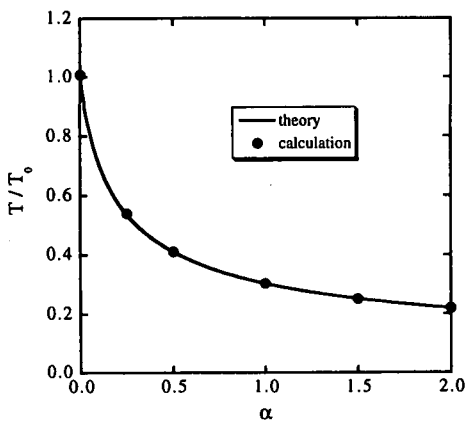


図-5 重力と表面張力が作用する静振波の周期の比較

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2 \alpha}} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 $\alpha = \sigma/g$ である。(23)式と計算値を比較した結果を図-5に示す。この結果から、重力と表面張力の両者が作用する場合の静振波の周期も適切に再現されることが示された。

4. おわりに

本報では、移動一般座標系に基づき、collocated 格子に従う変数配置を用いる自由水面流れの数値解析法について、その解法を示し、適用性の検討を行った。基礎方程式の移流項に対しては、局所5次スプライン内挿に基づくQSIスキームを用いるものとした。この解析手法を正方形キャビティ内の流れに適用した結果、ベンチマークの基準となる計算結果とよく一致する結果が得られ、5次風上差分手法より高精度であることが示された。さらに、重力および表面張力が復元力となる矩形容器内の微小静振波の計算を行った結果、理論解と一致する計算結果が得られることが示された。

参 考 文 献

- 牛島 省, 瀬津家久, 山上路生, 坂根由季子 (2001): 5次スプライン関数を用いた移流項の高次精度解析手法 (QSI法) の提案, 水工学論文集, 第45巻, pp. 571-576.
 功刀資彰 (1997): 自由表面を含む多相流の直接数値解析法, 機

- 械学会論文集 (B編) 第63巻 (609), pp. 1576-1584.
 梶島岳夫, 太田貴士, 岡崎和彦, 三宅 裕 (1997): コロケート格子による非圧縮流れの高次差分解析, 機械学会論文集 (B編) 第63巻 (614), pp. 3247-3254.
 宮内敏雄, 平田 徹, 店橋 護 (1995): 高次精度差分法による三次元一様等方性乱流の直接数値計算 (スペクトル法および実験との比較), 日本機械学会論文集 (B編) 第61巻 (592), pp. 4400-4405.
 Ghia, U., K. N. Ghia, and C. T. Shin (1982): High-Resolutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J. Comput. Phys.* 48, pp. 387-411.
 Harlow, F. H. (1988): PIC and its progeny. *Comput. Phys Commun.* 48, pp. 1-10.
 Harlow, F. H. and J. E. Welch (1965): Numerical Calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids* 8(12), pp. 2182-2189.
 Herriot, J. G. and C. H. Reinsch (1976): Procedures for quintic natural spline interpolation. *ACM Transactions on Mathematical Software* 2(3), pp. 281-289.
 Hirt, C. W., J. L. Cook, and T. D. Butler (1970): A Lagrangian method for calculating the dynamics of an incompressible fluid with free surface. *J. Comput. Phys.* 5, pp. 103-124.
 Hirt, C. W. and J. L. Cook (1972): Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain. *J. Comp. Phys.* 10, pp. 324-340.
 Hirt, C. W., A. A. Amsden, and J. L. Cook (1974): An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds. *Journal of Computational Physics* 14, pp. 227-253.
 Hirt, C. W. and B. D. Nichols (1981): Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries. *J. Comp. Phys.* 39, pp. 201-225.
 Koshizuka, S. and Y. Oka (1996): Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid. *Nucl. Sci. Eng.* 123, pp. 421-434.
 Ramaswamy, B. (1990): Numerical simulation of unsteady viscous free surface flow. *Journal of Computational Physics* 90, pp. 396-430.
 Rhie, C. M. and W. L. Chow (1983): Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal* 21, pp. 1525-1532.
 Thompson, J. F., F. C. Thames, and C. W. Mastin (1974): *J. Comput. Phys.* 15(299).
 Thompson, J. F., Z. U. A. Warsi, and C. W. Mastin (1985): *Numerical Grid Generation*. Elsevier Science, New York.
 Ushijima, S. (1998): Three-dimensional arbitrary Lagrangian-Eulerian numerical prediction method for non-linear free surface oscillation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 26, pp. 605-623.
 Zang, Y., R. L. Street, and J. R. Koseff (1994): *J. Comp. Phys.* 114, pp. 18-33.