

水路湾曲部における孤立波のマッハ反射に関する研究

由比政年*・菊本詳子**・間瀬 肇***・石田 啓****

1. 序 論

大規模な港湾あるいは河口域周辺に存在する複雑な水路・河川網に侵入する津波の透過・反射特性を明らかにすることは、適切な堤防高さを設定し、隣接地域への越波・越流災害を防ぐ上できわめて重要である。このため、直線的な水路を伝播する波浪の特性が多くの研究により明らかにされてきた。一方、水路・河川網を特徴付けるのは、複雑な湾曲部、分岐部、合流部の存在である。したがって、現実の津波の伝播過程を予測するためには、水路・河川網の湾曲部、分岐部、合流部それぞれにおける波浪変形特性の解明が必要となる。しかしながら、湾曲・分岐・合流といった複雑形状を有する水路での波浪の伝播特性を検討した研究はきわめて少なく、関連する工学的知見の蓄積も決して十分とは言えない。こうした状況を踏まえて、著者らは、90 度の湾曲水路、分岐水路を対象として、孤立波の伝播特性を検討してきた (Shi et al., 1998; 由比ら, 1999; 由比ら, 2001)。本研究では、水路湾曲部における浅海孤立波の変形、中でも水路壁におけるマッハ反射に着目して、従来の研究を発展させる。

曲水路における波の変形に対しては、水路の湾曲角と水路幅が支配的な影響を持つと考えられる。90 度の湾曲水路に対しては、外周壁面での孤立波の反射に際して、波峯高が入射波振幅の 2 倍以上にも達し得ることが示されている (由比ら, 1999; Yui et al., 2000)。一方、湾曲角の小さい曲水路においては、水路の外周壁面に対して波が浅い角度で入射することになり、マッハ反射が発生して壁面近傍の波高が大幅に増加し、越波災害に至る危険性も予想される。こうした観点から、以下では、体系的な数値解析を実施することにより、①壁面でのマッハ反射によるステム波の発達特性、②湾曲角の増加に伴うマッハ反射からレギュラー反射への遷移、③外周壁面上での波高増加率等の基本特性を明らかにする。

2. 解析の手法

2.1 基礎方程式

水面変位 ζ および任意鉛直位置 z_a における速度ポテンシャル ϕ_a を変数とする拡張型ブジネスク方程式 (Chen and Liu, 1995) は、無次元形で次のように表示できる。

$$\zeta_t = E(\zeta, \phi_a, h), \quad \phi_t = F(\zeta, \phi_a, h) \quad \cdots \cdots (1)$$

ここで、下添字 t は時間 t に関する偏微分を表す。無次元変数の定義は、Chen and Liu (1995) に準ずる。また、 Φ , E , F は、次式により定義される。

$$\Phi = \phi_a + \mu^2(b_1 + b_2)h^2\nabla^2\phi_a + \mu^2b_2h\nabla h \cdot \nabla\phi_a \quad \cdots (2a)$$

$$E = -\nabla \cdot [(\varepsilon\zeta + h)\nabla\phi_a] - \mu^2\nabla \cdot \{h\nabla[(b_1 + b_2)h^2\nabla^2\phi_a + b_2h\nabla h \cdot \nabla\phi_a] + (h^2/2)\nabla[\nabla h \cdot \nabla\phi_a + h\nabla^2\phi_a] - (h^3/6)\nabla\nabla^2\phi_a\} \quad \cdots \cdots (2b)$$

$$F = -\zeta - (\varepsilon/2)(\nabla\phi_a)^2 \quad \cdots \cdots (2c)$$

$$b_1 = b_0^2/2, \quad b_2 = z_a/h \quad \cdots \cdots (2d)$$

ここで、 h は静水深、 ∇ は水平面内のナブラ演算子を表している。非線形性、分散性の尺度となる無次元パラメータ ε , μ は次式で定義される。

$$\varepsilon = a_0/h_0, \quad \mu = h_0/\lambda_0 \quad \cdots \cdots (3)$$

ただし、 h_0 , λ_0 , a_0 は、それぞれ、水深、波長、振幅の代表値を表す。また、プライムは有次元量を示す。

2.2 座 標 変 換

曲水路中の波浪の伝播特性を解析する場合、水路形状を正確に表現し、壁面での境界条件を精度良く指定することが重要となる。このような場合、基礎式を一般曲線座標系 (ξ, η) に変換し、水路側壁の平面形状に適合した座標系を用いて数値解析を行うことが有効である (由比ら, 1999; Yui et al., 2000; Shi et al., 2001)。ここでは、本モデルで用いた座標変換の概略を述べる。

まず、チェインルールより、1 階の空間微分は、

$$f_x = a_{11}f_\xi + a_{21}f_\eta, \quad f_y = a_{12}f_\xi + a_{22}f_\eta \quad \cdots \cdots (4)$$

* 正会員 博(工) 金沢大学助教授 工学部土木建設工学科
** 工 修 日本原子力発電(株)
*** 正会員 工 博 京都大学助教授 防災研究所
**** 正会員 工 博 金沢大学教授 工学部土木建設工学科

と変換できる。ここで、 f は、 ξ, ϕ, h 等であり、下付き文字は偏微分を表す。また、メトリックテンソル a_{ij} ($i=1, 2; j=1, 2$) は、次式で表される。

$$a_{11}=y_{\eta}/J, a_{21}=-y_{\xi}/J, a_{12}=-x_{\eta}/J, a_{22}=x_{\xi}/J \quad (5)$$

式中の J は、変換のヤコビアンである。

$$J=x_{\xi}y_{\eta}-x_{\eta}y_{\xi} \quad (6)$$

チェインルールをもう1度適用することで、2回微分は次のように変換される。

$$f_{xx}=a_{11}^2f_{\xi\xi}+2a_{11}a_{21}f_{\xi\eta}+a_{21}^2f_{\eta\eta}+b_{11}f_{\xi}+b_{12}f_{\eta} \quad (7a)$$

$$f_{xy}=a_{11}a_{12}f_{\xi\xi}+(a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12})f_{\xi\eta}+a_{21}a_{22}f_{\eta\eta}+b_{21}f_{\xi}+b_{22}f_{\eta} \quad (7b)$$

$$f_{yy}=a_{12}^2f_{\xi\xi}+2a_{12}a_{22}f_{\xi\eta}+a_{22}^2f_{\eta\eta}+b_{31}f_{\xi}+b_{32}f_{\eta} \quad (7c)$$

ただし、 b_{ij} ($i=1, 3; j=1, 2$) は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= -a_{12}C_{11} - a_{11}C_{12}, & b_{12} &= -a_{22}C_{11} - a_{21}C_{12} \\ b_{21} &= C_{21}/J, & b_{22} &= C_{22}/J \\ b_{31} &= -a_{12}C_{31} - a_{11}C_{32}, & b_{32} &= -a_{22}C_{31} - a_{21}C_{32} \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= a_{11}^2y_{\xi\xi} + 2a_{11}a_{21}y_{\xi\eta} + a_{21}^2y_{\eta\eta} \\ C_{12} &= a_{11}^2x_{\xi\xi} + 2a_{11}a_{21}x_{\xi\eta} + a_{21}^2x_{\eta\eta} \\ C_{21} &= a_{22}y_{\eta\eta} + a_{12}y_{\xi\eta} - a_{11}a_{12}J_{\xi} - a_{11}a_{22}J_{\eta} \\ C_{22} &= -a_{12}y_{\xi\xi} - a_{22}y_{\xi\eta} - a_{21}a_{12}J_{\xi} - a_{21}a_{22}J_{\eta} \\ C_{31} &= a_{12}^2y_{\xi\xi} + 2a_{12}a_{22}y_{\xi\eta} + a_{22}^2y_{\eta\eta} \\ C_{32} &= a_{12}^2x_{\xi\xi} + 2a_{12}a_{22}x_{\xi\eta} + a_{22}^2x_{\eta\eta} \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

チェインルールをさらに繰り返し適用して、より高次の微分項に対する変換式を求めることも原理的には可能である。しかしながら、その結果はきわめて複雑となり、メトリクスを記憶するために膨大な計算機容量を必要とする。そこで、本研究では、たとえば、 f_{xxx} の計算に際し、まず、式(7)から f_{xx} を差分近似により求め、次に、その値をさらに式(4)に基づいて数値微分するという2段階手順を採用した。4階微分項に対する扱いも同様である。

2.3 境界条件

境界条件の設定は、以下のように行った。まず、入射境界では、拡張型ブジネス方程式の解析解(Wei and Kirby, 1995)に基づいて水面変位と速度ポテンシャルを指定することで孤立波の造波を行った。また、計算領域を十分大きく設定し、波が透過境界に達する前に計算を打ち切ることとした。一方、不透透性の鉛直壁では、次の条件を課した。

$$\nabla \zeta \cdot \mathbf{n} = 0, \partial \phi_a / \partial n = 0 \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{n}$ は壁面の法線ベクトルを表す。

2.4 離散化の手法

基礎式の時間的な離散化手法として、高次精度の予測子・修正子法を用いた。まず、予測子計算では、次式で表される3次精度のAdams-Bashforth法を用いた。

$$\zeta_{i,j}^{n+1*} = \zeta_{i,j}^n + \Delta t(23E_{i,j}^n - 16E_{i,j}^{n-1} + 5E_{i,j}^{n-2})/12 \quad (10a)$$

$$\phi_{i,j}^{n+1*} = \phi_{i,j}^n + \Delta t(23F_{i,j}^n - 16F_{i,j}^{n-1} + 5F_{i,j}^{n-2})/12 \quad (10b)$$

ϕ の予測値を得た後に、式(2a)を座標変換した式をSOR法で解いて、 ϕ_a の値を求める。次に、4次精度のAdams-Moulton法を用いて、修正子計算を行い、

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^n + \Delta t(9E_{i,j}^{n+1*} + 19E_{i,j}^n - 5E_{i,j}^{n-1} + E_{i,j}^{n-2})/24 \quad (11a)$$

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + \Delta t(9F_{i,j}^{n+1*} + 19F_{i,j}^n - 5F_{i,j}^{n-1} + F_{i,j}^{n-2})/24 \quad (11b)$$

さらに、式(2a)から ϕ_a の値を求める。修正子計算は、連続した2回の反復計算結果が、次の基準をすべて満たすまで繰り返し実行される。

$$\delta f = \left| f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+1*} \right| / \left| \sum_i f_{i,j}^{n+1} \right| < 0.0001 \quad (12)$$

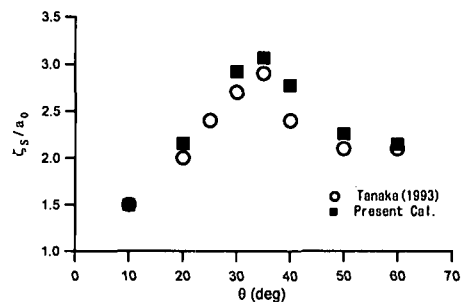
ここで、 f は、 ζ, ϕ_a を、上付きの添え字*は、1回前の反復計算の値を示している。

一方、空間的な離散化にあたっては、1回微分項に4次精度の中心差分を、それ以外の項には2次精度の中心差分を用いた。なお、計算にあたっては、速度ポテンシャルの評価位置は、 $z_a = -0.531h$ とした。

2.5 数値スキームの検証

本研究で用いた数値スキームの精度を検証するために、水平床上で、直線壁に斜め入射する孤立波の伝播変形解析を行った。従来の研究によると、直線壁への波の入射角度が浅い場合には、マッハ反射が発生し、入射波に加えて、ステム波と呼ばれる第3の波が発達して壁面での波高を増大させる。一方、入射角が大きくなると、反射形態は通常のレギュラー反射へと遷移する。

入射角 θ の違いにより、壁面上でのステム波高 ζ_s がどう変化するかを解析し、強非線形ポテンシャルモデルに基づくTanaka(1993)の計算結果と比較した例を図一1に示す。壁面における波高増幅率は、入射角35度付近で、孤立波がマッハ反射する場合に最大となる。入射角がき



図一1 Tanaka (1993) の結果と本モデル計算結果との比較 ($\epsilon=0.3$)

らに増加すると、反射形態はレギュラー反射へと遷移し、増幅率は減少していく。今回開発したモデルによる解析結果は、この傾向を良く再現している。また、入射角 40 度の場合を除いて、Tanaka の結果との定量的な差も小さい。なお、この定量的な差は、今回のモデルが、弱非線形モデルであることに起因すると考えられる。

3. 解析結果および考察

3.1 解析の条件

今回の研究で対象とした水路形状は、同心円状の湾曲部に直線状の上・下流部分を接続したものである(図-2)。水深・水路幅は一様である。以下では、水路幅(W)を水深の 30 倍および 50 倍に、湾曲角を 10 度から 90 度まで変化させて体系的な数値解析を行った結果を示す。なお、入射孤立波の振幅水深比 ε としては、0.1, 0.2, 0.3 の 3 通りの場合を想定した。また、上流側および下流側の直線部分の長さを、それぞれ、水深の 50 倍および 200 倍、曲線部の内周半径を水深の 50 倍と固定した。

3.2 曲線部での波浪変形の特徴

上流部から入射した孤立波は、湾曲部外周壁で反射し波高を増大させる。この時の反射形態は湾曲角の大小により 2 つの形態に分類できる。湾曲角が小さい場合には、孤立波は外壁でマッハ反射する。この場合の湾曲部近傍における空間波形変化の一例を、図-3 に示す。図中の t は、無次元時間、 $t = t' \sqrt{g' h_0} / \lambda_e$ である。なお、孤立波の有効波長 λ_e として、水面変位が孤立波振幅の 1% 以上となる部分の波長を用いている。入射波が曲線部分に到達した段階では、孤立波の形状は 1 次元적であり、初期波形を良く保持している。この後、孤立波が曲線部に入射すると、内周側で波浪が先行する形となり、1 次元的な波形は崩れる。一方、外周部分では、波浪は壁面に衝突・反射し、波高を増加させる。図-3(c)では、壁面近傍でのステム波の発生、入射角と反射角の違い、入射波高に対する反射波高の減少等、マッハ反射の特徴が明確に現れている。ステム波の発達は入射波の振幅水深比が大きいほど速い。また、マッハ反射は、水路幅の大きい水路でより顕著となる。外周壁での波高は、湾曲部より若干下流側で最大となる。この例では、最大波峰高は入射波振幅の 2.5 倍程度にまで達している。同じ条件下で、孤立波が直線壁に直角に入射する場合の最大波高が入射波振幅の 2.2 倍程度であることを考えると、湾曲角が小さい場合であっても、防災上十分な注意が必要であることがわかる。なお、有限幅の水路では、ステム波は定常状態とはなり得ず、波高が最大となった後に内壁へ向けて拡幅し、それに伴って波高が減少する(図-3(d))。この点は外洋に面した直線壁の場合(Tanaka, 1993 等)と大きく異なる。この後、波浪は内周壁、外周壁への反射を繰

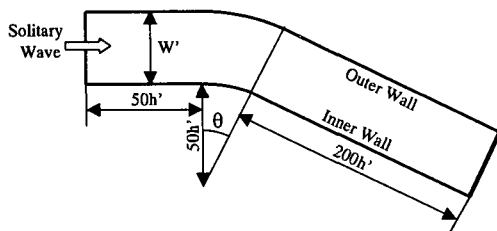


図-2 曲水路の形状

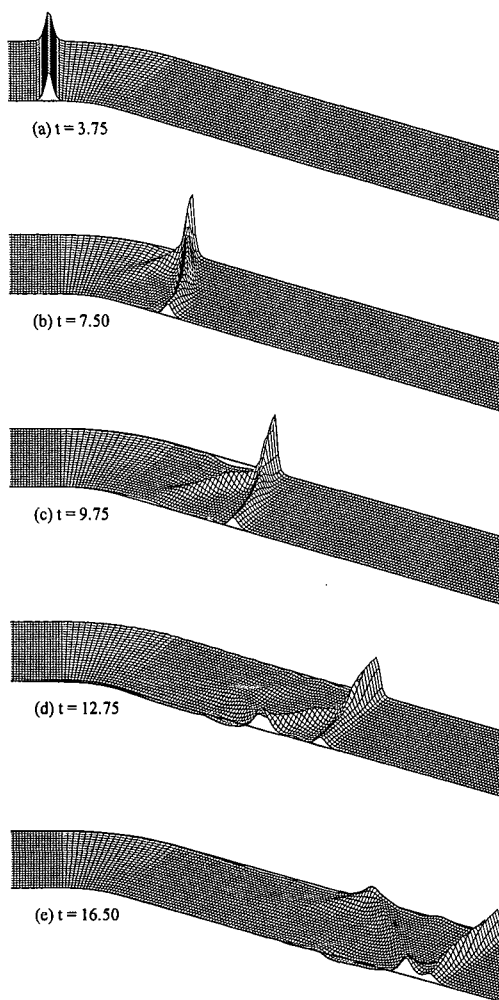


図-3 小湾曲角の水路における孤立波の変形
($W/h' = 50$, $\theta = 30^\circ$, $\varepsilon = 0.3$)

り返しながら進行していく。この時の 2 度目、3 度目の反射形態は、レギュラー反射であり、壁面での波峰高は比較的小さい。

一方、湾曲角が大きい場合(およそ 40 度~50 度以上)には、孤立波は外壁でレギュラー反射する。その例を図-5 に示す。この場合、図-5(a)に示されるように、水路外

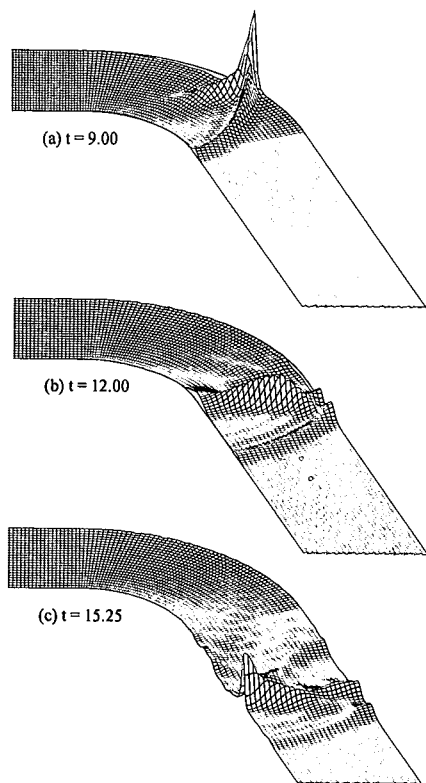


図-4 大湾曲角の水路における孤立波の変形
($W'/h=50$, $\theta=70^\circ$, $\varepsilon=0.3$)

壁における入射波の波高および入射角はほぼ等しくなる。なお、外壁から反射した波は、その後、内周壁へ向けて浅い角度で入射することになり、内周側でマッハ反射する(図-4(c))。このため、内壁における波率高が、この例では入射波振幅の約1.8倍と大きくなる。

3.3 外周壁面上での最大波率高

図-5には、孤立波が曲水路を通過する際の波率高(入射波振幅で規格化したもの)の空間分布を示した。湾曲角が小さく、入射波が外壁でマッハ反射する場合には、湾曲部から少し下流よりの直線部で波率高が最大となる。なお、内壁における2度目の反射による波率高の増加率は小さい。一方、湾曲角が大きく、孤立波が外壁でレギュラー反射する場合には、湾曲部内部、入り口から角度にしておよそ40から50度程度進んだ位置で最大波率高を取るようになる。なお、前節で示したように、湾曲角が大きい場合には、外壁から反射した波が内壁側でマッハ反射することにより、湾曲部後方の内壁付近でも波率高が大きくなる。

外壁上での最大波率高 ζ_w と入射波振幅の比が、湾曲角に対してどう変化するかを、入射波の振幅水深比および水路幅をパラメータとして図-6に示す。湾曲角が大きいほど波高の増加率は大きく、反射形態がマッハ反射か

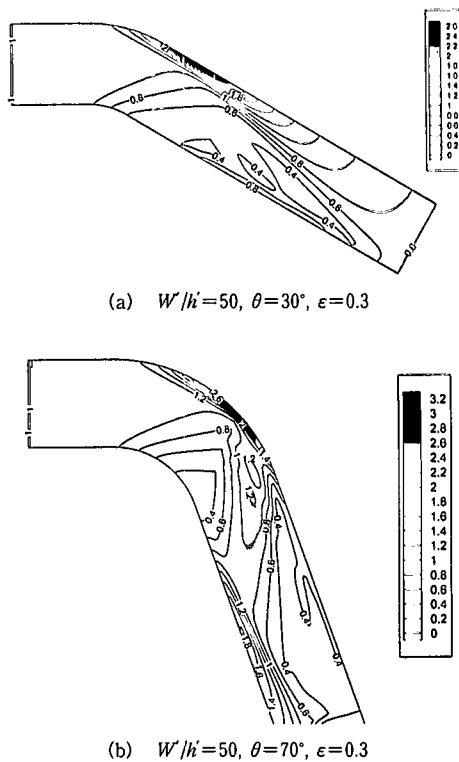


図-5 湾曲部での波率高の空間分布

らレギュラー反射へと遷移する湾曲角付近から一定値に漸近する。増幅率は最大で3倍程度にも達している。前節でも述べたように、湾曲角が小さい場合でも、マッハ反射により、最大波率高は入射波振幅の2.5倍程度まで達し得る。また、外壁上での最大波率高と入射波振幅の比は、入射波の非線形性および水路幅が大きくなるほど増加する。なお、直線壁に孤立波が入射してマッハ反射する場合、最終的なステム波高と入射波振幅の比は、入射波の非線形性が大きくなるにつれて減少する。この点が直線壁の場合と曲水路の場合との相違点である。直線壁の場合でも、一般に、ステム波が十分に発達するには非常に長い伝播距離を必要とする。一方、曲水路においては、その幅が有限であるために、ステム波が完全に発達することではなく、ある値まで波高を増大させた後に次第に減衰していく。したがって、曲水路におけるステム波の発達は、直線壁におけるステム波の過渡的な発達特性と類似したものとなる。

最後に、図-6に示した各ケースにおける最大波率高の漸近値(ζ_{wm})と次式で定義される無次元パラメータ、

$$\beta = W'/\lambda_e \quad \dots\dots\dots (13)$$

との関連を図-7に示す。最大波率高は、この無次元パラメータに対してほぼ線形に変化していることがわかる。解析結果に基づいて算出された回帰式は、次のように表

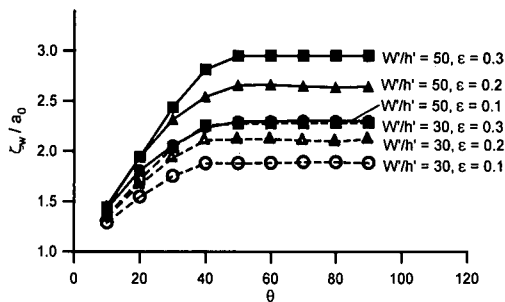


図-6 外周壁上での最大波率高と湾曲角の関連

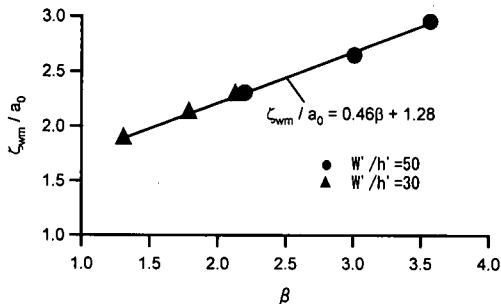


図-7 最大波率高の漸近値とβとの関連

される。

$$\zeta_{wm}/a_0 = 0.46\beta + 1.28 \quad (14)$$

なお、この場合、入射波の非線形性 ε の影響は、孤立波の有効波長 λ_e の中に含まれる。

以上の数値計算の過程において、計算領域内の全質量および全エネルギー(位置エネルギー+運動エネルギー)の保存性を検討した。その結果、両者ともに、代表的な誤差が1%未満の十分な精度で保存されていることを確認できた。ここで、本計算に用いた格子数は、水路の長さ方向に500から700点程度、幅方向に60から80点程度、代表的な時間刻みは無次元時間で0.01である。また、同様の計算を水面変位と速度を変数とするモデル(由比ら, 1999)を用いて行った結果は、今回の結果と非常に良く一致した。この際、今回の数値モデルによる計算時間は、従来の1/3程度に短縮されていることを確認した。これは、未知変数の数が3個(ζ, u_a, v_a)から2個(ζ, ϕ_a)へと減ったことに加え、修正子計算の収束性が向上したためである。

4. 結 論

平面2次元の拡張型ブジネス方程式を一般曲線座標系に変換して数値解析を行い、水路湾曲部における孤立

波の伝播特性を解析した。今回の解析条件下で得られた主な結論は、次のようにまとめられる。

- (1) 水路湾曲部における孤立波の変形の様子は、湾曲角により大きく異なる。湾曲角が約40から50度より小さい場合には、孤立波は水路外壁でマッハ反射する。湾曲角がそれ以上の場合には、外壁での反射形態はレギュラー反射へと遷移する。
- (2) 湾曲角が小さい曲水路でも、マッハ反射により、水路外壁上の最大波高峰は入射波振幅の2.5倍程度まで達し得る。この時、波高峰が最大となる位置は、湾曲部のやや後方となる。ステム波の発達には、入射波の非線形性および水路幅が大きいほど顕著となる。
- (3) 湾曲角の大きい水路では、屈曲部外壁での反射時における波高峰の増幅が顕著であり、その最大値は入射波振幅の3倍程度にも達する。また、水路内壁での2度目の反射形態がマッハ反射となることにより、内壁での波高峰も入射波振幅の2倍程度まで発達し得る。

謝辞：本研究の実施にあたり、日本国土開発(株)の炭谷高明氏(当時金沢大学4年生)に協力していただいた。ここに記して感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 由比政年・石田 啓・間瀬 肇 (1999): 曲水路を伝播する孤立波の透過・反射特性に関する研究, 海岸工学論文集, 第46巻, pp. 31-35.
- 由比政年・中嶋光浩・間瀬 肇・石田 啓 (2001): 分岐水路における孤立波の透過・反射特性の数値解析, 海岸工学論文集, 第48巻, pp. 16-20.
- Chen, Y. and P.L.F. Liu (1995): Modified Boussinesq equations and associated parabolic models for water wave propagation, J. Fluid Mech., Vol. 288, pp. 351-381.
- Shi, A., M. H. Teng, and T. Wu (1998): Propagation of solitary waves through significantly curved shallow water channels, J. Fluid Mech., Vol. 362, pp. 157-176.
- Shi, F., R. A. Dalrymple, J. T. Kirby, Q. Chen, and A. Kennedy (2001): A fully nonlinear Boussinesq model in generalized curvilinear coordinates, Coastal Engineering, Vol. 42, pp. 337-358.
- Tanaka, M. (1993): Mach reflection of a large-amplitude solitary wave, J. Fluid Mech., Vol. 248, pp. 637-661.
- Wei, G. and J. T. Kirby (1995): Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations, J. Waterway, Port, Coast., and Oc. Engrg., ASCE, Vol. 121, No. 5, pp. 251-261.
- Yuh, M., H. Ishida and H. Mase (2000): Numerical study of solitary wave propagation in curved channels, Proc. 27th International Conference on Coastal Engineering, ASCE, pp. 519-532.