

DEM 法と VOF 法を併用した三次元固液混相流解析モデルの開発とその適用例

重松孝昌*・廣瀬真由**・錦織陽一***・小田一紀****

1. はじめに

時々刻々と変化する水面形状の変化を解析あるいは予測する手法として, 例えば VOF 法などの数値モデルが開発され, これらの手法を用いた砕波に関する解析や構造物と波動場との干渉問題に関する解析例が数多く見られるようになってきた。しかし, これらの研究では, その対象は流体運動の解析にとどまっている。粒子間接触力の影響を無視することができないほど粒子が比較的高密度で液体中に存在し, しかも水面変動を伴うような三次元固液混相流モデルはほとんどないのが実情である。したがって, 地滑り津波に代表されるような, 粒子群の運動が水面変動を伴う周回流体の運動を誘起するような固液混相流現象を詳細に検討した研究例は, 極めて少ないように思われる。

Heinrich (1992) は, Hirt ら (1981) が開発した VOF 法を用いて, 斜面上を転がり落ちる固体によって誘起される波動場の解析を行っているが, 単一の固体の運動しか考慮できない。また, Liu ら (1999) は透過性構造物が存在する場の波浪変形を計算することができる手法として, RANS 乱流モデルと VOF 法を併用した手法を開発しているが, 多孔質層を構成する粒子は運動しないとしており, 固液混相流場の解析に適用することはできない。また, 個別要素法と VOF 法を併用して, 流体運動に伴う粒子の運動を解析・予測しようとする試みも見られるが, 流体・粒子間の相互作用が十分に考慮されていない。二次元現象の解析に留まっているのが実状である。

このような状況に鑑み, 本研究は, 水面変動および粒子間作用力の影響を扱うことができる三次元固液混相流モデルの構築を目的とする。

2. 計算手法

(1) 基礎式

本研究では, 粒子の運動解析には三次元個別要素法を

適用している。三次元個別要素法の詳細については, 重松ら (2000) を参照されたい。ここでは, 流体運動の計算手法について詳述したい。

まず, 固相・液相・気相が混在するときの空隙率 ε を以下のように定義する。

$$\varepsilon = \frac{V_a + V_f}{V_a + V_f + V_o + V_p} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに, V_a は気相が占める体積, V_f は液体が占める体積, V_p は固相のうち粒子相が占める体積, V_o は不動固体が占める体積を表す。流体の基礎方程式は, この空隙率 ε を用いて次のように表される。

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon u_i}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon u_i u_j}{\partial x_j} \\ = -\frac{\varepsilon}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left(\frac{\partial \varepsilon u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \\ + \frac{1}{\rho_f} F_{pi} - \varepsilon g_i \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここに, u_i 流速, p は圧力, ρ_f は流体の密度, ν は動粘性係数, g_i は重力加速度である。 F_{pi} は流体が粒子から受ける相互作用力で, 川口ら (1992) と同様に, 次式を用いて算定した。

$$F_{pi} = \beta(u_{pi} - u_i) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに, u_{pi} は粒子の速度である。 β は, 構造物の占有体積分を除いた領域での空隙率 ε_p の値に応じて以下のように決められる。

$$\beta = \begin{cases} \frac{1 - \varepsilon_p}{d_p \varepsilon_p^3} \left\{ 150 \frac{(1 - \varepsilon_p) \mu \varepsilon_p}{d_p} + 1.75 \rho_f \varepsilon_p^2 |u_{pi} - u_i| \right\}, & (\text{for } \varepsilon_p \leq 0.8) \\ \frac{3}{4} C_D \frac{\rho_f (1 - \varepsilon_p) |u_{pi} - u_i|}{d_p} \varepsilon_p^{-2.7}, & (\text{for } \varepsilon_p > 0.8) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$C_D = \begin{cases} \frac{24(1 + 0.15 R_e^{0.687})}{R_e}, & R_e \leq 1000 \\ 0.43, & R_e > 1000 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6)$$

* 正会員 工博 大阪市立大学講師 大学院工学研究科土木工学専攻
** 正会員 工修 水資源開発公団
*** (株)大林組
**** 正会員 工博 大阪市立大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻

$$R_e = \frac{\varepsilon_p d_p |u_{pi} - u_i|}{\nu} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 d_p は粒径、 C_D は抵抗係数、 R_e はレイノルズ数である。式(4)～(7)を含めた式(2)および式(3)を二次精度の上流差分を用いて解いた。

(2) Saturate 関数

本研究では、Hirtら(1981)によって開発されたVOF法のスキームを拡張して、自由液面形状を予測した。

VOF法は、各々のセルにおける液体の存在体積比率を F (VOF関数)として表し、これを用いて自由液面の形状を記述しようとするものである。VOF関数 F は、セル内に液体と気体のみが存在する状態における液体の存在比率を表すものであり、次式で計算される。

$$F = V_f / (V_a + V_f) = V_f / V \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 V はセルの体積である。

Heinrich(1992)は、構造物の影響をVOF法に導入するため、セル内に占める固体の体積 V_o を用いて F を次のように表している。

$$F = \frac{V - V_o}{V} \frac{V_f}{V - V_o} = \gamma_o \frac{V_f}{V - V_o} \dots\dots\dots (9)$$

本研究では、これに倣い、さらに粒子の占有体積 V_p を考慮して、

$$F = \frac{V - (V_o + V_p)}{V} \frac{V_f}{V - (V_o + V_p)} = \varepsilon S \dots\dots\dots (10)$$

と表すことにする。ここに、 S は、流体(気体+液体)の占有体積に対する液体の占有体積を表し、ここではSaturate関数と呼ぶことにする。このSaturate関数を導入することにより、時々刻々と変化する粒子密度の変化が水面変動量に及ぼす影響を考慮することができる。

Saturate関数 S に対する方程式は、離散化セルにおける流体の質量保存を考えることにより導かれる。直方体形状のセル(i, j, k)で、時刻 $n\Delta t$ から $(n+1)\Delta t$ におけるセル内の流体の増加分は次のように表される。

$$\begin{aligned} & \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \{ (\varepsilon_{i,j,k} S_{i,j,k})^{n+1} - (\varepsilon_{i,j,k} S_{i,j,k})^n \} \\ &= u_{i-1/2,j,k} \Delta t \Delta y_j \Delta z_k \varepsilon_{i-1/2,j,k} S_{i-1/2,j,k} \\ & \quad - u_{i+1/2,j,k} \Delta t \Delta y_j \Delta z_k \varepsilon_{i+1/2,j,k} S_{i+1/2,j,k} \\ & \quad + v_{i,j-1/2,k} \Delta t \Delta x_i \Delta z_k \varepsilon_{i,j-1/2,k} S_{i,j-1/2,k} \\ & \quad - v_{i,j+1/2,k} \Delta t \Delta x_i \Delta z_k \varepsilon_{i,j+1/2,k} S_{i,j+1/2,k} \\ & \quad + w_{i,j,k-1/2} \Delta t \Delta x_i \Delta y_j \varepsilon_{i,j,k-1/2} S_{i,j,k-1/2} \\ & \quad - w_{i,j,k+1/2} \Delta t \Delta x_i \Delta y_j \varepsilon_{i,j,k+1/2} S_{i,j,k+1/2} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

Saturate関数 S の移流方程式の離散化式(11)における右辺の各項は、セル界面における移流フラックスを表しており、それぞれのフラックス量 Q はドナー・アクセプター法によって求められる。

$$Q = V_D \varepsilon_D \min(C_d S_{AD} + D, S_D) \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 V_D 、 ε_D 、 S_D はそれぞれドナーセルの体積、空隙率およびSaturate関数を、 C_d はクーラン数を表す。また、

$$D = \max\{C_d(1 - S_{AD}) - (1 - S_D), 0\} \dots\dots\dots (13)$$

で、 S_{AD} は条件によってアクセプターセルあるいはドナーセルのSaturate関数を用いることを意味する。

(3) 自由液面境界条件 (山崎, 1992)

粒子が液面を横切るとな場合には、粒子の運動が液面応力に及ぼす影響を考慮しなければならないが、ここではこの影響を無視することにする。このとき、自由液面においては、次の応力境界条件が成り立つ。

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 n_j は液面の単位法線ベクトルである。また、 σ_{ij} は液面応力であり次式で表される。

$$\sigma_{ij} = -(p_s - p_c + \gamma K) \delta_{ij} + \tau_{ij} \dots\dots\dots (15)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 τ_{ij} は粘性応力、 p_s は液面圧力、 p_c は液面に接する気体圧力、 γ は液面張力係数、 K は曲率の和、 μ は粘性係数、 δ_{ij} はKroneckerの δ である。

以下に、液面の法線が x 軸の正方向を向いている場合を例に、境界条件の決定方法を述べる。まず、液面セルにおける液面の単位法線ベクトルは $\mathbf{n}=(1, 0, 0)$ であるから、応力条件式の接線方向成分は

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

また、法線方向成分は

$$-(p_s - p_c + \gamma K) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

と表される。

接線方向成分について、自由液面に平行な方向の微係数を無視すれば、式(17)は次のように簡略化される。

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

さらに、式(19)を、自由液面に対して液体のある方向への片側差分を行うと次式を得る。

$$v_{i,j\pm 1/2,k} = v_{i-1,j\pm 1/2,k}, \quad w_{i,j,k\pm 1/2} = w_{i-1,j,k\pm 1/2} \dots\dots\dots (20)$$

このとき、式(20)の左辺が液面セルの流速、右辺が液体セルの流速となる。また、自由液面の法線方向の流速 $u_{i+1/2,j,k}$ は、液面セル内で連続の式(2)を満足するように決定する。

以上の境界流速処理をすべての液面セルでそれぞれの

方向について行が、同じ境界位置における流速の設定が複数回行われる可能性があると考えられる。このようなときは、その算術平均をとることによって境界流速とした。

また、液面における圧力は、液面において気体圧力と液面張力を無視した式 (18) を満足するように p_s を決定した後、外挿補間によって表面セルと接する空セルの圧力を決定した。

3. 検証計算の条件および計算結果

ここでは、Watts (1997) が行った地滑り津波実験の再現計算を行い、計算結果と実験結果を比較することにより、本解析モデルの妥当性の検証を行った。

Watts は、高さ 66 cm、幅 914 cm、奥行き 10.1 cm の水槽を用いて、地滑り津波に関する実験を行っている。彼は様々な粒径を持つ粒子を対象として実験を行っているが、本研究では、水槽端に 45 度の斜面を設置し、その斜面上に粒径 1.2 cm の大理石をその天端が水面下 7.2 cm になるように配置し、ゲートを瞬時に取り去ることによって地滑りを発生させている実験について再現計算を行った。計算領域は、図-1 に示す水路側面図の左下隅部を座標の原点とし、 x 方向に 250 cm、 y 方向に 10.1 cm、 z 方向に 50 cm の計算領域をとり、 x 方向に 125 分割、 y 方向に 5 分割、 z 方向に 25 分割した。計算に用いた粒子数は 202 個で、粒子群の初期配置および水深は図

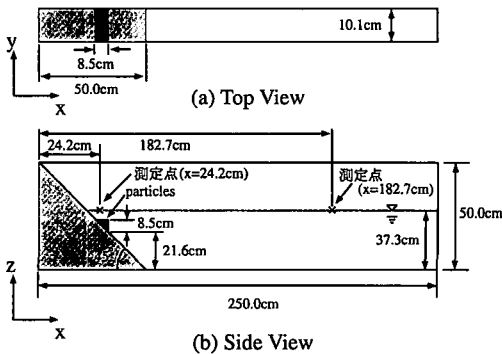


図-1 Watts の実験再現計算の計算条件

表-1 検証計算における諸パラメータの設定

流体	密度	1.00	[g/cm ³]
	動粘性係数	0.01	[cm ² /s]
粒子	粒径	1.2	[cm]
	密度	2.22	[g/cm ³]
	ヤング率	7.31×10^{11}	[g/cm ²]
	ポアソン比	0.17	
	反発係数	0.3	
	摩擦係数	0.577 (=tan $\pi/6$)	

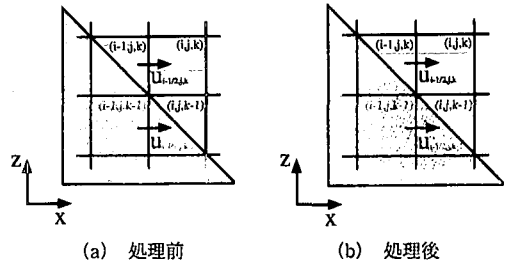


図-2 汀線部の処理

ー1 と同様に設定した。計算に用いた流体および粒子の諸パラメータは表-1 のように設定した。ただし、実験に用いられた粒子は大理石であったが、計算では石英のヤング率、ポアソン比を用いて計算を行った。また、流体計算の初期時間刻みは 0.05 秒とした。

流体運動の境界条件としては、沖側 (x 軸正方向) で Sommerfeld の境界条件を、 y 軸の両端にはノースリップ条件、水底にはノースリップ条件を適用した。ここで、構築したスキームでは、図-2(a) に示す $u_{i-1/2,j,k}$ は 0 と計算されてしまい、水際線を表すセルに流入出する流体量が 0 と計算されるため汀線が変化しない。そこで、本研究では、セル (i, j, k) が液面セルと判定されたとき、セル $(i-1, j, k)$ が斜面を含むセルであった場合は、液体の量を変えずにセル (i, j, k) とセル $(i-1, j, k)$ の Saturate 関数 S を等しくするとして計算を行った。

図-3 は、図-1 における $x=24.2$ cm、 $x=182.7$ cm の地点における Watts による実験結果と本手法による計算結果との比較を示したものである。図中の ϵ_D の線が本手法による計算結果である。いずれの地点においても、計算結果は実験結果と比べて水位が大きく低下していることがわかる。本手法では、セル間を移流する流体量を式 (12) によって計算している。この式は上流差分の概念に基づいて定式化されており、粒子の情報は空隙率 ϵ_D のみで考慮されている。しかし、セル間を移流する流体量はドナー側の空隙率だけでなく、アクセプター側の空隙率にも影響を受けることが予想される。そこで、式 (12) を

$$Q = V_D \epsilon_{AD} \min(C_A S_{AD} + D, S_D) \dots\dots\dots (21)$$

のように書き換えたうえで、 ϵ_{AD} を

- (i) $\epsilon_{AD} = 0.5(\epsilon_D + \epsilon_A)$:
- (ii) $\epsilon_{AD} = \min(\epsilon_D, \epsilon_A)$:

と変えて、計算を行った。このようにして得られた結果を図-3 に示す。同図より明かなように、 $\epsilon_{AD} = \epsilon_D$ として計算を行った場合よりも、 $\epsilon_{AD} = 0.5(\epsilon_D + \epsilon_A)$ あるいは $\epsilon_{AD} = \min(\epsilon_D, \epsilon_A)$ として計算した方が、水面変動量に関する実験値との整合性は良くなることがわかる。ここでを行った計算では粒子群の初期位置が水面下であったが、

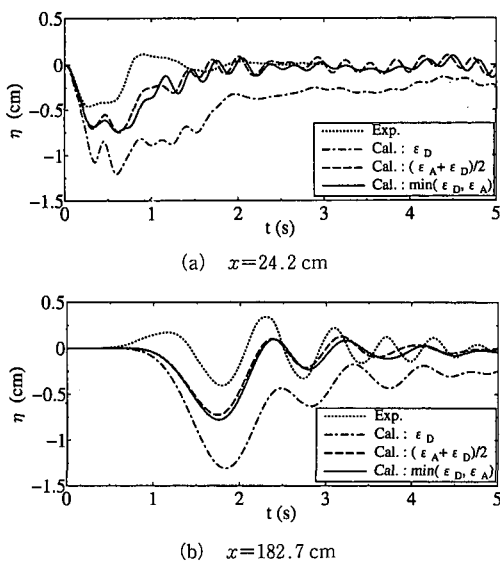


図-3 水面変動の経時変化

粒子群の初期位置が水面よりも上にある場合についても計算も行った(後述)。その結果、 $\varepsilon_{AD} = \min(\varepsilon_D, \varepsilon_A)$ として計算した場合には安定して計算を行うことができたが、その他の場合には計算が安定しない場合があった。以上の結果より、流体の移流計算において $\varepsilon_{AD} = \min(\varepsilon_A, \varepsilon_D)$ を用いて計算するのが良いと考えらる。なお、計算中の領域内の液体総質量の変化は1%以下であった。

これ以後は、 $\varepsilon_{AD} = \min(\varepsilon_D, \varepsilon_A)$ を用いた計算結果を基に、計算結果について考察する。図-3(a)は、 $x=24.2$ cmの地点における水面変動の経時変化を示したものである。この地点は、初期に粒子群が配置された地点であり、粒子群が斜面上に沿って運動することによって誘起される複雑な流体運動の影響がある地点と考えられる。実験結果は、計算開始直後から急速に水面が低下し、約0.6秒後から急速に水面が上昇して、初期水面よりも高くなるまで上昇し、その後、緩やかな変動を示しながら減衰して、初期水面に漸近している。これに対して計算値は、計算開始直後からの急激な水面の低下は再現されているが、水面が低下している時間が長く、水面低下量は過大に計算されている。また、水面が上昇し始める時間が実験値よりも遅く、約0.3秒ほどの周期変動を伴いながら徐々に初期水面に漸近している。

図-3(b)は、 $x=182.7$ cmにおける水面変動の経時変化を示したものである。この地点は、初期汀線から170 cm沖に位置し、散乱波の影響は少なく、斜面上を運動する粒子群によって誘起される流体運動が波動として伝播すると考えられる地点である。経過時間2秒程度までは、図-3(a)と同様に過大な水面変動が見られる。また、経過時間2秒を過ぎると、実験値と計算値との間に位相の

ズレが見られるようになる。

以上のことから、本モデルを用いて定量的な予測を行うためには、まだ改良の余地があると考えられる。

4. 適用例

次に、粒子群の初期位置を水面下、水面、水面より上と3通りに変えて計算を行った。水深は10 cmである。図-4は、粒子群の初期位置が水面よりも上の場合について、粒子群の挙動と水面変動に関する計算結果を示したものである。水中に粒子群が入るとともに水面波が発生し、これが次第に沖側へと伝播していく様子が計算されていることがわかる。

図-5は、粒子群の初期位置による粒子群の運動および粒子群の運動に誘起される流体運動の時系列変化を示したものである。いずれの場合においても、粒子群が斜面上を転がり落ちる過程で循環流が形成されていることがわかる。粒子群の初期位置が水面下の場合には、粒子群が斜面を転がり落ちる距離が制約されているために、形成される循環流の規模は比較的小さく、また、流速も小さくなっている。これに対して、粒子群の初期位置が水面あるいは水面よりも上にある場合には、粒子群が水面下にある斜面部の全区間を転がり落ちるために、形成される循環流が大きく、また、流体速度も速くなっている。このように、循環流の規模や流速は、粒子群の初期位置が高くなるほど大きくなる傾向が見られることがわかる。

図-6は、それぞれの条件の場合の汀線から8.5 cmおよび19.5 cm沖側の位置における水面変動量の時系列変化を示したものである。汀線近傍(図-6(a))では、粒子群の初期位置による水面変動量の時系列変化が大きく異なっていることがわかる。すなわち、粒子群の初期位置が水面下にある場合には水面は大きく低下した後減衰していくが、その他の場合にはやや水面が上昇した後大きく低下し、その後減衰していくことがわかる。汀線からやや離れた(図-6(b))位置では、いずれの場合もほぼ同様な水面変動を示すが、同図(a)と比較すると、粒子群の初期位置が水面付近あるいは水面上にある場合において、2回目の水面上昇量の方が1回目の

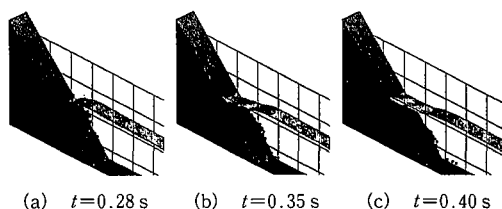


図-4 水面変動と粒子群の挙動

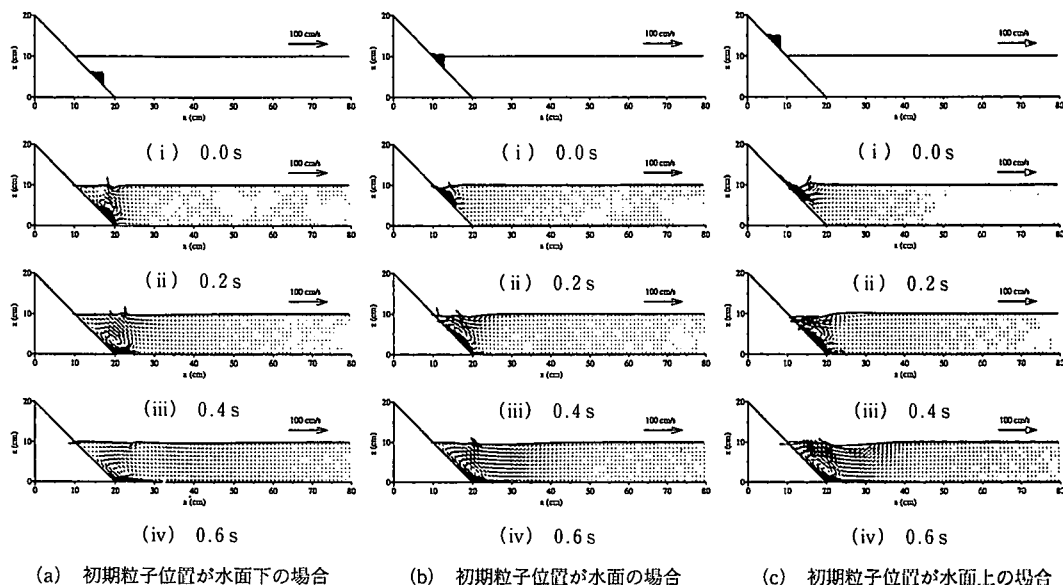
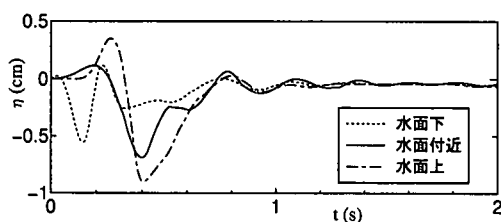
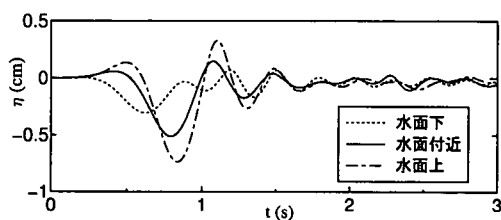


図-5 粒子群および流体の運動の経時変化



(a) 汀線から 8.5 cm



(b) 汀線から 19.5 cm

図-6 水面変動量

水面上昇量よりも大きいところに特徴が見られる。

5. 結 論

本研究では、粒子濃度の空間的な変化を考慮することができるよう VOF 法を拡張し、これと三次元個別要素法を併用することによって、水面変動を伴う三次元固

液混相流解析モデルの開発を試みた。既往の地滑り津波に関する実験結果との比較により、まだ改良の余地はあるものと思われるものの、粒子群の初期位置による水面変動特性や粒子群の運動に伴う流体運動の詳細な情報を得るためには本モデルが有用であることが示された。

参 考 文 献

- 川口寿裕・田中敏嗣・辻 裕 (1992): 離散要素法による流動層の数値シミュレーション(噴流層の場合), 日本機械学会論文集 (B 編), 58 巻 551 号, pp. 2119-2125.
- 重松孝昌・小田一紀・田野雅彦・廣瀬真由 (2000): 個別要素法による水中沈降粒子群の 3 次元挙動に関する研究, 海岸工学論文集, 第 47 巻, pp. 996-1000.
- 山崎 昇 (1992): 自由表面を含む非圧縮性流体解析モジュール, 富士総研技法, 第 3 巻, 第 1 号, pp. 131-146.
- Heinrich (1992): Nonlinear water waves generated by submarine and aerial landslides, Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, Vol. 118, No. 3, pp. 249-266.
- Hirt, C. W., B. D. Nichols (1981): Volume of Fluid (VOF) for the dynamics of free boundaries, Journal of computational physics, 39, pp. 201-225.
- Liu L.-F. P., P. Lin, K. Chang, and T. Sakakiyama (1999): Numerical modeling of wave interaction with porous structures, Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, Vol. 125, No. 6, pp. 322-330.
- Watts P. (1997): Water waves generated by underwater landslides, Doctor thesis of California Institute of Technology, 319 p.