

個別要素法による水中沈降粒子群の 3 次元挙動に関する研究

重松 孝昌*・小田 一紀**・田野 雅彦***・廣瀬 真由****

1. はじめに

埋め立て工事における直投土砂の沈降挙動に関する研究 (例えば, 玉井, 1994; 灘岡ら, 1996) や堆積形状の予測 (例えば, 小田ら, 1993; 三宅ら, 1999) に関する研究は数多く行われている。また, 工事で発生する濁りの拡散はこれらの直投土砂によって誘起される流体運動に大きく影響を受けることから, 誘起流動の影響を考慮した濁りの拡散計算も行われるようになってきた (例えば, 玉井ら, 1998; Shigematsu, 1998)。しかし, これらの研究の多くは鉛直 2 次元問題として解析しており, その意味において未だ基礎的研究の域を出ていないと考えられる。したがって, 工学的に必要な粒子群および沈降粒子群に誘起される流体運動の 3 次元特性を十分に明らかにできているとは言い難いのが実状であると思われる。

個別要素法を用いた予測手法は, 計算容量という観点では大きなデメリットを抱えているが, 粒子間作用力を比較的精度良く計算できるという大きなメリットも持っている。したがって, 投入時や着底時の粒子間作用力が卓越する領域の計算の精度が高いと言えることができる。しかし, これまでの個別要素法を用いた解析では, 実際には球形をしている粒子を円盤として計算しているなどの問題点を有していた。本研究では, 3 次元個別要素法を用いて水中を沈降する粒子群の運動解析を行い, 沈降粒子群の 3 次元挙動の特性を把握し, 併せて沈降粒子群に誘起される流体運動の 3 次元特性について把握することを目的とするものである。

2. 3 次元個別要素法

2.1 局所座標系の導入

3 次元個別要素法は吉田ら (1988) に詳述されているが, 細部の定式化および係数の決定方法が異なるので, ここで改めて詳述する。

図一に示すように座標系を設定し, 半径 r_i の球形要素

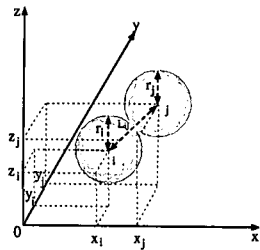
素 $i (x_i, y_i, z_i)$ と半径 r_j の要素 $j (x_j, y_j, z_j)$ が接触している場合について考える。このとき, 図一に示すような局所座標系を導入し, 粒子 i に関するものを $[X_i, Y_i, Z_i]$ とする。局所座標系 $[X_i, Y_i, Z_i]$ は, 要素 i の中心を原点とし, 要素 j の中心を通る方向に X_i 軸を定める。 X_i 軸と直交する平面 P と xy 平面に平行な任意の平面との交線の中で, 要素 i の中心点を通るものを Y_i 軸, これらと右手系をなすように Z_i 軸をとることにする。粒子 j に関する局所座標系 $[X_j, Y_j, Z_j]$ は, 上記文章中の i と j を入れ替えばよい。

次に, 微小時間 Δt 間の要素 i の並進変位増分を $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$, 回転変位増分を $\Delta \phi_{xi}, \Delta \phi_{yi}$ および $\Delta \phi_{zi}$ とする。ただし, $\Delta \phi_{xi}, \Delta \phi_{yi}$ および $\Delta \phi_{zi}$ は, 各軸の正方向に右ネジをまわす回転を正とする。このとき, 要素 i と j の接触面における二要素の相対変位増分および回転変位増分を局所座標表示すれば, 以下のように表される。

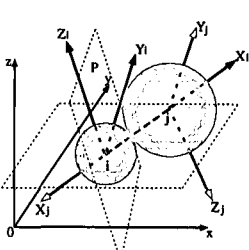
$$\begin{bmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \end{bmatrix} = [T_e]_{ij} \begin{bmatrix} \Delta x_i - \Delta x_j \\ \Delta y_i - \Delta y_j \\ \Delta z_i - \Delta z_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta \phi_{zi} & \Delta \phi_{zj} \\ -\Delta \phi_{yi} & -\Delta \phi_{yj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_j \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \phi_{xi} \\ \Delta \phi_{yi} \\ \Delta \phi_{zi} \end{bmatrix} = [T_e]_{ij} \begin{bmatrix} \Delta \phi_{xi} \\ \Delta \phi_{yi} \\ \Delta \phi_{zi} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

ここに, $\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i$ は並進変位増分を, $\Delta \phi_{xi}, \Delta \phi_{yi}, \Delta \phi_{zi}$ は回転変位増分を表す。また, 上式における $[T_e]_{ij}$ は座標変換マトリクスであり, 次式で表される。



図一 座標系



図二 局所座標系

* 正会員 工博 大阪市立大学講師 工学部
** 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部
*** 正会員 工修 大阪市
**** 学生会員 大阪市立大学大学院工学研究科

$$[T_e]_{ij} = \begin{bmatrix} l_i & m_i & n_i \\ \frac{-am_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & \frac{al_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & 0 \\ \frac{-an_i l_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & \frac{-am_i n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & a\sqrt{l_i^2 + m_i^2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$a = \begin{cases} \text{SIGN}(y_j - y_i) & \text{for } y_i \neq y_j \\ \text{SIGN}(x_j - x_i) & \text{for } y_i = y_j \text{ and } x_i \neq x_j \end{cases} \quad \dots\dots (4)$$

ここに、 $l_i = (x_j - x_i)/L_{ij}$ 、 $m_i = (y_j - y_i)/L_{ij}$ 、 $n_i = (z_j - z_i)/L_{ij}$ 、 $L_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$ 、また、 $\text{SIGN}(a)$ は $a < 0$ のとき -1 を $a > 0$ のとき 1 である。局所座標系の定義より、上述の定式化には $x_i \neq x_j$ または $y_i \neq y_j$ の条件が含有されている。 $x_i = x_j$ かつ $y_i = y_j$ の場合には、座標変換マトリクスを次のように定義する。

$$[T_e]_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & n_i \\ 0 & 0 & 0 \\ -n_i & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5)$$

2.2 粒子間作用力の定式化

Hertzの弾性理論によれば、接触している2球間に作用する法線方向の反発力 P_n と弾性変形量 δ_n とは、次式で関係づけられる。

$$P_n = K_n \delta_n^{3/2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$K_n = \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 K_n は弾性バネ定数、 ν はポアソン比、 E はヤング率、 r は粒子の半径を表している。

一方、接触した2球の間に働く接線方向の弾性力 P_t と接線方向相対変位 δ_t とは、次式で関係づけられる(Mindlin, 1949)。

$$P_t = K_t \delta_t \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$K_t = 8 \left(\frac{2-\nu_1}{G_1} + \frac{2-\nu_2}{G_2} \right)^{-1} \sqrt{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} \delta_n^{1/2} \quad \dots\dots (9)$$

ここに、 K_t は接線方向の弾性バネ定数、 $G = E/2(1+\nu)$ は横弾性係数である。

これらの弾性理論に基づいて、接触している2球間に作用する力を次のようにモデル化する。すなわち、法線方向の作用力として、接触時からの総変位置 $(r_i + r_j - L_{ij})$ の $3/2$ 乗に比例した反力 e_x を生じる弾性スプリング(弾性定数 K_n)と相対変位速度 $\Delta X_i/\Delta t$ に比例した反力 d_x を生じる粘性ダッシュポット(粘性定数 η_n)の並列配置を仮定する。この時、法線方向の作用力は次のように表すことができる。

$$[F_x]_i = [e_x]_i + [d_x]_i \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$[e_x]_i = K_n (r_i + r_j - L_{ij})^{3/2} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$[d_x]_i = \eta_n \frac{\Delta X_i}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし、 $[e_x]_i < 0$ のとき

$$[e_x]_i = [d_x]_i = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、法線方向の作用力 F_x は、圧縮が正となるように定義する。

同様に、接線方向の作用力を、微小時間 Δt 間の接線方向の変位増分 $\Delta Y(Z)_i$ に比例するせん断反力 $\Delta e_{Y(Z)}$ を与える弾性スプリング(弾性定数 K_s)と、相対変位速度 $\Delta Y(Z)_i/\Delta t$ に比例した反力 $d_{Y(Z)}$ を与える粘性ダッシュポット(粘性定数 η_s)の並列配置、および滑り摩擦を与える摩擦スライダによってモデル化すれば、次のように定式化することができる。ただし、 Y_i 軸あるいは Z_i 軸の正方向に変位が生じるようにせん断力が生じる場合を正とし、 $\Delta Y(Z)$ は ΔY または ΔZ を意味する。

$$[F_{Y(Z)}]_i = [e_{Y(Z)}]_i + [d_{Y(Z)}]_i \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$[\Delta e_{Y(Z)}]_i = [\Delta e_{Y(Z)}]_{i-\Delta t} + K_s \Delta Y(Z)_i \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$[d_{Y(Z)}]_i = \eta_s \frac{\Delta Y(Z)_i}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし、 $[e_x]_i < 0$ のとき

$$[e_{Y(Z)}]_i = [d_{Y(Z)}]_i = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$|[e_{Y(Z)}]_i| > \mu [e_x]_i$ のとき

$$[e_{Y(Z)}]_i = \mu [e_x]_i \cdot \text{SIGN}([e_{Y(Z)}]_i) \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$[d_{Y(Z)}]_i = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

ねじりモーメント(X_i 軸の正方向に右ネジをまわす回転が生じる場合を正)に関しても、弾性スプリング(弾性定数 K_r)と粘性ダッシュポット(粘性定数 η_r)の並列配置を仮定すれば、

$$[M_r]_i = [e_r]_i + [d_r]_i \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$[e_r]_i = [e_r]_{i-\Delta t} + K_r r^2 \Delta \Phi \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$[d_r]_i = \eta_r r^2 \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\Delta \Phi = (l_i, m_i, n_i) \begin{bmatrix} \Delta \phi_{xi} - \Delta \phi_{xj} \\ \Delta \phi_{yi} - \Delta \phi_{yj} \\ \Delta \phi_{zi} - \Delta \phi_{zj} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ただし、 $[e_x]_i < 0$ のとき

$$[e_r]_i = [d_r]_i = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

2.3 係数の決定方法

法線方向の粘性ダッシュポット係数 η_n は、田中ら(1991)に倣い、次式を用いて与える。

$$\eta_n = a' \sqrt{m K_n} \delta_n^{1/4} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここに、 a' は粘性減衰力の大きさを与える無次元定数で、法線方向の反発係数 e_n によって一義的に決定することができる。

また、接線方向の粘性係数 η_s は、接線方向の運動が線形バネによる一自由度減衰振動運動方程式で表されるので、川口ら(1992)に倣って次式によって与える。

$$\eta_s = \frac{2|\ln e_t|}{\pi} \sqrt{\frac{m K_t}{1 + (|\ln e_t|/\pi)^2}} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 e_t は接線方向の反発係数に相当する係数である。

個別要素法を用いて、粒状体の運動を安定かつ正確に計算するためには、時間刻みを適当な大きさ以下にとる必要がある。この時間刻みは、粒子同士の接触時間 t に大きく依存する。Hertz の弾性理論に基づけば、二球の物理諸量が等しい場合、2 球の接触時間 t は次式で与えられる。

$$t = 2.94 \left(\frac{5\sqrt{2}\pi\rho}{4} \frac{1-\nu^2}{E} \right)^{2/5} \frac{r}{v^{1/5}} \quad (27)$$

ここに、 v は衝突時における二つの球の接近速度、 ρ は粒子の密度である。ただし、上式の誘導に際しては、二球のポアソン比とヤング率が等しいという仮定を設けている。完全弾性衝突の条件で計算を行った結果、式(27)で表される接触時間 t の 1/10 以下となるように時間刻み Δt をとれば、妥当な計算結果を得た。以上のことから、本研究では、時間刻みは式(27)で計算される接触時間の 1/10 とした。

2.4 粒子の運動解析

局所座標系において、接触する 2 要素 i 、要素 j 間に作用する力を求めた後、それを次式によって一般座標系に変換する。

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{bmatrix} = [T_e]_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -F_z \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{bmatrix} = [T_e]_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} -M_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r_i [T_e]_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ F_z \\ -F_y \end{bmatrix} \quad (29)$$

粒子 i に接触するすべての要素 j による作用力を求めると、要素 i に関する全体座標系におけるそれぞれの方向の力成分の総和 F_{xi} 、 F_{yi} 、 F_{zi} およびそれぞれの軸回りのモーメント成分の総和 M_{xi} 、 M_{yi} 、 M_{zi} は次式で求めることができる。

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{bmatrix} = \sum_j \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{bmatrix} = \sum_j \begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここに、 $\sum_j$ は要素 i に接触するすべての要素に関する総和を意味する。

以上のようにして要素 i に作用するすべての粒子間作用力を算定した後、これらを時間で積分することによって、すべての粒子の運動を解析する。

3. 流体運動の解析

流体の解析には、空隙率 ε を考慮した以下の基礎式を

用いて計算した。

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial \varepsilon u_i}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \varepsilon p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial \varepsilon u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon u_j}{\partial x_i} \right\} + F_{pi} - M_i + \varepsilon g_i \quad (33)$$

ここに、 u は流速、 ρ_f は流体の密度、 p は圧力、 ν は動粘性係数、 F_p は流体が粒子から受ける力(抗力)、 M は慣性力項、 g は重力項である。計算手法の詳細は、小田ら(1995)を参照されたい。ただし、本研究では、3 次元流体運動を解析していること、および、水面変動は考慮していないことを付記しておく。

4. 計算結果

室田ら(1988)は、高さ 50 cm、幅 600 cm、奥行き 15 cm の水槽を用いて、供試土砂であるガラスビーズの沈降実験を行っている。ここでは、密度 $\rho_p = 2.42 \text{ g/cm}^3$ 、粒径 3.38 mm の粒子を水深 30 cm の流体塊へ投入する現象の計算を行い、彼らの実験結果との比較を行った。ただし、計算では奥行き方向には粒子を 2 列しか配置していない。また、流体計算においてもメッシュは 1 つだけとし、 y 軸に垂直な両境界面に対して slip wall の条件を適用している。このような計算は、粒子の 3 次元運動は考慮しているが流体運動については 2 次元計算であるので、以後、このような条件における計算を“準 2 次元計算”と称することにする。

図-3 に示すように、粒子群近傍には循環流が形成され、それに伴って粒子群は下に凸な形状を示すようになる。このような傾向は、室田ら(1988)の実験でも確認されており、準 2 次元計算でも実験結果を定性的に再現できていることが分かる。

図-4 は、粒径 3 mm の粒子を投入した場合の、準 2 次元計算と 3 次元計算の結果を比較したものである。勿論、両者を直接対比して議論できるものではないが、計算結果には大きな違いがあることを認識したい。すなわち、従来の解析で行われている 2 次元計算では、図-4(a)に見られるような循環流が形成されるが、この計算には、投入口が紙面奥行き方向に対して無限にあるという仮定がある。一方、投入口長さ(紙面奥行き方向)の有限性を考慮した 3 次元計算では、図-4(b)に示すように、誘起流動は小さく、準 2 次元計算で見られるような明確な循環流は形成されていない。

仮に、図-4 の両者に対して、沈降に伴う粒子群の水平方向の分散幅を求めれば図-5 のようになる。図-5 は縦軸を粒径 D で、また、横軸は投入容器幅 B_0 で無次元化している。同図によれば、準 2 次元問題として計算した場合よりも、3 次元問題として計算した方が沈降過程にお

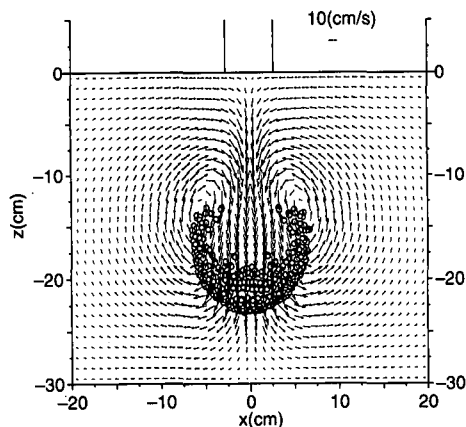


図-3 準2次元計算結果 (0.6秒後)

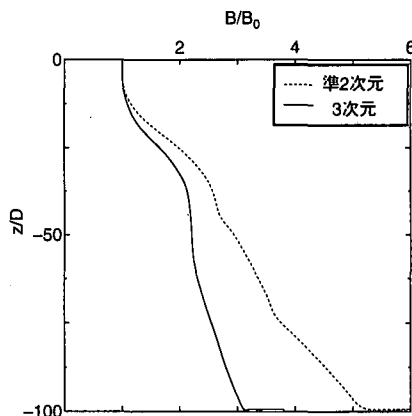
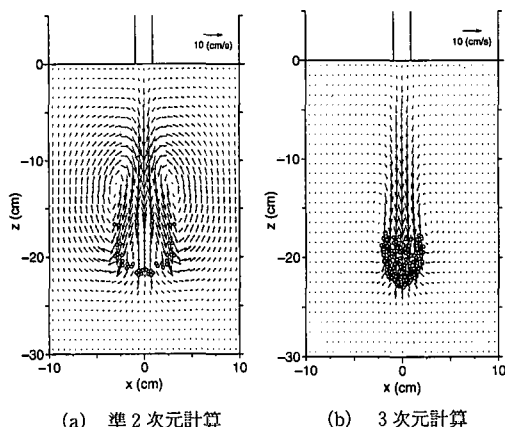


図-5 粒子群の分散幅



(a) 準2次元計算

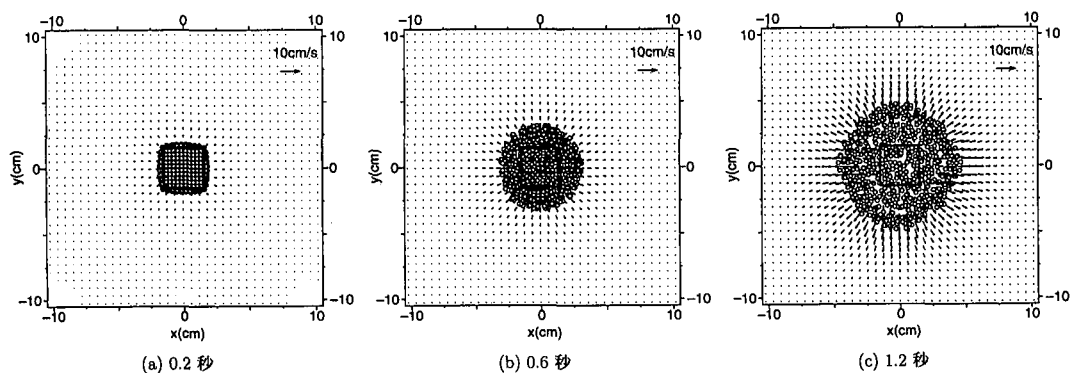
(b) 3次元計算

図-4 沈降粒子群と誘起流動

ける粒子群の分散幅は小さくなるのがわかる。すなわち、投入口長によって、粒子群周囲の誘起流動の特性や粒子群の沈降・分散挙動の特性に大きな変化が見られるとすることができる。

図-6は、 $3.0\text{ cm} \times 3.0\text{ cm}$ の直方体投入容器から粒径 3 mm の粒子を $V_0=16.2\text{ cm}^3$ 投入した場合の粒子群の水平面内の分散挙動を示したものである。図中の流速ベクトルは粒子群の最下端部の $x-y$ 平面における流速ベクトルである。同図よりわかるように、投入容器から投入された粒子群は、沈降と共に分散し、平面的分布形状は正方形から円形へとその形状を変えながら沈降することがわかる。このことは、粒子群の沈降過程における3次元挙動を考慮しなければ堆積形状の正確な把握はできないことを示唆しているものと考えられる。一方、小田ら(1987)は、バージ模型船から捨石を投入した際の水底における堆積分布形状を室内実験によって測定しているが、それによれば堆積形状は楕円形をしている。すなわち、実験的研究によっても、3次元挙動の把握の必要性が示されていると考えられる。

次に、投入粒子総量、投入口面積、粒径を変えて3次元計算を行い、これらの諸元が粒子群の沈降挙動に及ぼす影響について検討した。図-7に、その一例を示す。図-7には、 $1.8\text{ cm} \times 1.8\text{ cm}$ の投入口から、粒子量 $V_0=5.8, 11.6, 17.5\text{ cm}^3$ の粒子を投入したときの沈降速度を



(a) 0.2 秒

(b) 0.6 秒

(c) 1.2 秒

図-6 粒子群の沈降・分散

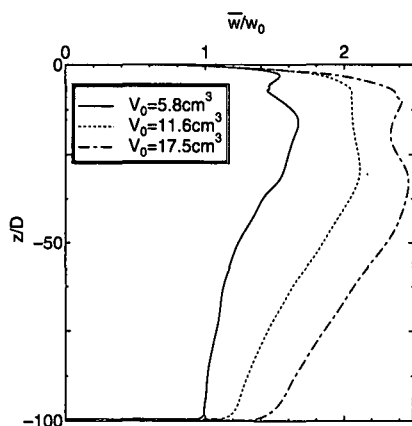


図-7 沈降速度

示したものである。同図に示すように、単位面積当たりの投入粒子量が増加するとともに、粒子群の沈降速度が大きくなる傾向が見られた。沈降過程における分散幅と投入粒子量についても同様な傾向が見られた。

また、単位面積あたりの投入量を一定として投入面積を増加させたときには、沈降に伴う平均沈降速度や分散幅の増加率には大きな変化は見られなかった。すなわち、投入粒子量よりも単位面積あたりの投入量が支配要因であるといえる。

さらに、投入粒子量および単位面積あたりの投入量を一定にして、粒径を3 mmと2 mmと変えて計算を行った。このとき、粒径が2 mmの場合の方が、粒子群の平均沈降速度および分散幅が大きくなり、また、周囲の流体の速度も大きくなった。

単位面積あたりの投入量および粒径が粒子群の沈降挙動に及ぼす影響は、2次元解析を行った場合と同じ傾向であった。しかし、定量的な予測を行うためには、3次元解析が必要であると考えられる。

5. ま と め

本研究では、3次元個別要素法を用いて粒子群の沈降・分散挙動を解析するモデルを開発した。粒子の3次元運動を考慮した準2次元解析を行ってモデルの妥当性

を示した後、3次元解析を行って単位面積当たりの投入量などの諸量が粒子群の沈降・分散挙動に及ぼす影響について検討した。その結果、これらの諸量が粒子群の沈降・分散挙動に及ぼす影響は定性的には2次元計算と一致していることが示された。しかし、水底における粒子群の堆積幅や堆積形状、粒子群に誘起される流体運動など、工学的に要求されるこれらの諸量を定量的に予測するためには、3次元計算に基づく予測手法の必要性があると結論づけることができる。

参 考 文 献

- 小田一紀・沢田充弘・樋口俊光・岩田 潔 (1987): 底開式バージから投入された捨石粒子群の堆積形状に関する研究, 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 281-285.
- 小田一紀・重松孝昌・大西伸幸 (1993): DEMAC法による沈降粒子群の分散・堆積挙動のパラメトリック解析, 海岸工学論文集, 第40巻(2), pp. 951-955.
- 小田一紀・重松孝昌・和田一斗 (1995): 波による底質粒子の移動過程に関する数値シミュレーション, 海岸工学論文集, 第42巻(2), pp. 536-540.
- 川口寿裕・田中敏嗣・辻 裕 (1992): 離散要素法による流動層の数値シミュレーション(噴流層の場合), 日本機械学会論文集(B編), 58巻551号, pp. 2119-2125.
- 玉井昌宏・村岡浩爾 (1998): 土砂直投工により発生する濁りの挙動特性に関する数値解析, 水工学論文集, 第42巻, pp. 541-546.
- 玉井昌宏 (1994): 分散相誘起型混相流の流動・乱流構造に関する研究, 大阪大学博士論文, 113 p.
- 田中敏嗣・石田俊哉・辻 裕 (1991): 水平管内粒状体プラグ流の直接数値シミュレーション(付着力がない場合), 日本機械学会論文集(B編), 57巻534号, pp. 456-463.
- 磯岡和夫・二瓶泰雄・八木 宏 (1996): 新しい固相モデルに基づく固体-流体混相乱流 LES モデルの開発, 土木学会論文集, No. 533/II-34, pp. 61-73.
- 三宅達夫・柳畑 亨 (1999): ドラム型選心装置による直投土砂の堆積形状予測, 海岸工学論文集, 第46巻, pp. 971-975.
- 吉田 博・榎谷 浩・今井和昭 (1988): 個別要素法による砂礫上への落石の衝撃特性に関する解析, 土木学会論文集, 第392号, pp. 297-306.
- Mindlin, R. D. (1949): Compliance of Elastic Bodies in Contact, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 16, pp. 259-268.
- Shigematsu T., K. Oda and S. Horii (1998): Numerical Calculation on Generation Process and Diffusion Phenomenon of Muddy Water Caused by Sand Dumping into Water, Environmental Hydraulics, pp. 473-478.