

ラグランジュ方程式による遡上波の解析

合 田 桂*・浅川 敬之**・出口 一郎***

1. はじめに

打ち上げ波帯での漂砂移動, 構造物への波の打ち上げなどを解析するには, 打ち上げ波帯・遡上域での流体運動の解析が必要不可欠である。このような浅海域を対象とした流体運動の解析には, 線形波動理論は適用できない。従来は, オイラーの運動方程式, あるいは何らかの形で波動の非線形性の影響を取り組んだ波動方程式を数値的に解くことにより解析されてきた。遡上運動を数値計算する場合, 例えば波先の運動に対応した移動境界を用いるといった特殊な取り扱いを行う必要があり, 波動の非線形項の取り扱いと相まって, 数値的な誤差を生ずることは避けられない。

ラグランジュ方程式では, オイラー方程式と同じパラメータで摂動展開した場合の 1 次近似解によって, オイラー方程式の 2 次近似解以上の非線形性を表現できる。

本研究では, ラグランジュ方程式を出発点とし, 水平床及び斜面上に入射する場合の遡上波に対する解析解を摂動法により導く。ただし, 従来の Pierson (1962), 首藤 (1966) によって行われた従属変数のみを摂動展開する方法では, 2 次近似解に共振を引き起こす危険項が含まれるため, 従属変数以外に時間に対しても摂動展開を行った。得られた 1 次近似解に対する方程式群は, Pierson, 首藤によって得られる 2 次元波動に対する 1 次近似式と一致し, 海底勾配の有無, 入射角の値に関わらず解析解が得られた。1 次近似解の適用性を検証するため, 2 次元及び平面水槽内での斜面遡上波に関する実験を行った。

2. ラグランジュ方程式による流体運動の表現

(1) 長波を対象とするラグランジュ型の 1 次近似式

3 次元波動場をラグランジュ座標で考える。粘性, 底部摩擦は考えない。空間の関数を (x, y) , 鉛直上方を z とする。初期時刻 $t=t_0$ に (a, b, c) にある水粒子は, 時刻 $t=t$ には (x, y, z) にある。圧力を p とすると, 連続

式と運動方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p, y, z)}{\partial(a, b, c)} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(x, p, z)}{\partial(a, b, c)} \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(x, y, p)}{\partial(a, b, c)} \dots\dots\dots (4)$$

水平, 鉛直方向の代表長をそれぞれ l, d とし, 式 (1)~(4) を無次元量 $A=a/l, B=b/l, C=c/d, X=x/l, Y=y/l, Z=z/d, P=p/\rho g d, T=\sqrt{g d} t/l$ により無次元表示する。

$$\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(A, B, C)} = 1 \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial T^2} = -\frac{\partial(P, Y, Z)}{\partial(A, B, C)} \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} = -\frac{\partial(X, P, Z)}{\partial(A, B, C)} \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial T^2} = -1 - \frac{\partial(X, Y, P)}{\partial(A, B, C)} \dots\dots\dots (8)$$

長波性の波動 ($\delta=d/l \ll 1$) を対象とし, X, Y, Z, P, T を, 初期値 A, B, C, P_0, τ 周りに摂動展開する。

$$\left. \begin{aligned} X &= A + \delta X_1(A, B, C, T) + \delta^2 X_2(A, B, C, T) + \dots \\ Y &= B + \delta Y_1(A, B, C, T) + \delta^2 Y_2(A, B, C, T) + \dots \\ Z &= C + \delta Z_1(A, B, C, T) + \delta^2 Z_2(A, B, C, T) + \dots \\ P &= P_0(A, B) + \delta P_1(A, B, C, T) \\ &\quad + \delta^2 P_2(A, B, C, T) + \dots \\ T &= \tau + \delta \tau_1(\tau) + \delta^2 \tau_2(\tau) + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

式 (9) を式 (5)~(8) に代入し, δ のオーダーで整理する。

$O(\delta^0)$ について,

$$\frac{\partial P_0}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial P_0}{\partial B} = 0, \quad \frac{\partial P_0}{\partial C} + 1 = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$O(\delta^1)$ について,

$$\frac{\partial X_1}{\partial A} + \frac{\partial Y_1}{\partial B} + \frac{\partial Z_1}{\partial C} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

* 学生会員 大阪大学大学院工学研究科土木工学専攻
** 学生会員 大阪大学大学院工学研究科土木工学専攻
*** 正 会 員 工博 大阪大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial T^2} = -\frac{\partial P_1}{\partial A} - \frac{\partial Z_1}{\partial A} \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial T^2} = -\frac{\partial P_1}{\partial B} - \frac{\partial Z_1}{\partial B} \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial C} - \left(\frac{\partial Y_1}{\partial B} + \frac{\partial X_1}{\partial A} \right) = 0 \dots\dots\dots (14)$$

δ の 0 次近似解は、式 (10) を C で積分することで求まる。式 (11)～(14) を連立すれば、 δ の 1 次オーダーの解 X_1, Y_1, Z_1, P_1 が求まる。式 (9) に代入すると、 X, Y, Z, P に対する 1 次近似までの解析解が求まる。

(2) 3次元水平床における流体運動

3次元の水平床 (水深 H = 一定) における水粒子の運動をラグランジュ表記する。式 (10) と、水表面にある水粒子は、常に水表面 ($P_0=0$) にあるという条件より、

$$P_0 = -C \dots\dots\dots (15)$$

水底での境界条件 ($C=-H; Z_1=0$) から、式 (11) は、

$$Z_1 = \int_{-H}^C \left(\frac{\partial X_1}{\partial A} + \frac{\partial Y_1}{\partial B} \right) dC \dots\dots\dots (16)$$

水表面での境界条件 ($C=0; P_1=0$) から、式 (14) は、

$$P_1 = \int_0^C \left(\frac{\partial X_1}{\partial A} + \frac{\partial Y_1}{\partial B} \right) dC \dots\dots\dots (17)$$

式 (16), (17) を式 (12), (13) に代入し、 X_1, Y_1 は C に依存しないことを考慮すると、以下の方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial T^2} = H \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{\partial X_1}{\partial A} + \frac{\partial Y_1}{\partial B} \right) \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial T^2} = H \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{\partial X_1}{\partial A} + \frac{\partial Y_1}{\partial B} \right) \dots\dots\dots (19)$$

$\eta = (\partial X_1 / \partial A) + (\partial Y_1 / \partial B)$ とすると、式 (12), (13), (18), (19) から

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} = H \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial A^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial B^2} \right) \dots\dots\dots (20)$$

この解は次式で与えられる。

$$\eta = (c_0 e^{i\sqrt{-n^2 + \frac{\sigma^2}{H}} A} + c_1 e^{-i\sqrt{-n^2 + \frac{\sigma^2}{H}} A}) \cdot (c_2 e^{inB} + c_3 e^{-inB}) e^{i\sigma T} \dots\dots\dots (21)$$

ここで、 n は Y 方向の波数、 σ は角周波数。 $c_0 \sim c_3$ は未定係数である。このとき、進行性の波動に対する分散関係式は、次式で与えられる。

$$\frac{\sigma}{n} = \sqrt{H} \dots\dots\dots (22)$$

式 (21) を式 (18), (19), (16), (17) に代入すると、 X_1, Y_1, Z_1, P_1 が求まる。

P の 1 次近似解は、特別な操作をほとんどすることなく長波近似になる。初期時刻に $(A, B, 0)$ にある粒子は、時刻 T に (X, Y) に移動し、そのときの水位は Z により表される。

(3) 傾斜海浜における流体の遡上

図-1 のような 3 次元傾斜海浜への流体の遡上をラグ

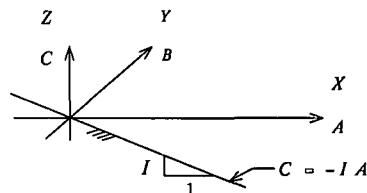


図-1 座標軸 (無次元量示)

ランジュ表記する。水底は、 $C=-IA$ で表される。斜面勾配の次元量を i とすると、その無次元量は $I=(l/d)i$ 。水底にある水粒子は、 $Z=-IX$ の斜面上を運動する。

水底での境界条件を式 (9) で展開し δ の 1 次オーダーで整理すると、 $C=-IA$ に対し $Z_1=-IX_1$ の関係が得られる。式 (11) を C で積分すると、

$$Z_1 = \int_{-IA}^C \left(\frac{\partial X_1}{\partial A} + \frac{\partial Y_1}{\partial B} \right) dC - IX_1(A, B, -IA; T) \dots\dots\dots (23)$$

表面での境界条件は、 $C=0$ に対し $P_0=0, P_1=0$ である。式 (14) を C で積分すると、

$$P_1 = \int_0^C \left(\frac{\partial X_1}{\partial A} + \frac{\partial Y_1}{\partial B} \right) dC \dots\dots\dots (24)$$

式 (23), (24) を式 (12), (13) に代入すると、 X_1, Y_1 に対する以下の式が得られる。

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial T^2} = \frac{\partial}{\partial A} \left\{ \frac{\partial}{\partial A} (IA X_1) + \frac{\partial}{\partial B} (IA Y_1) \right\} \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial T^2} = \frac{\partial}{\partial B} \left\{ \frac{\partial}{\partial A} (IA X_1) + \frac{\partial}{\partial B} (IA Y_1) \right\} \dots\dots\dots (26)$$

鉛直方向の変位を表す変数として、 η' を導入する。

$$\eta' = - \left\{ \frac{\partial}{\partial A} (IA X_1) + \frac{\partial}{\partial B} (IA Y_1) \right\} \dots\dots\dots (27)$$

η' を式 (25), (26) の右辺に代入すると、

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial T^2} = -\frac{\partial \eta'}{\partial A}, \quad \frac{\partial^2 Y_1}{\partial T^2} = -\frac{\partial \eta'}{\partial B} \dots\dots\dots (28)$$

式 (27) を T で 2 階微分し式 (28) を代入すれば、 η' に関する偏微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \eta'}{\partial T^2} = IA \frac{\partial^2 \eta'}{\partial A^2} + I \frac{\partial \eta'}{\partial A} + IA \frac{\partial^2 \eta'}{\partial B^2} \dots\dots\dots (29)$$

この解は次式で与えられる。

$$\eta' = \left\{ c_5 \text{ Hypergeometric } F \left(\frac{1}{2} - \frac{m^2}{2n}, 1, 2An \right) + c_6 \text{ Hypergeometric } U \left(\frac{1}{2} - \frac{m^2}{2n}, 1, 2An \right) \right\} e^{-An} \times (c_7 e^{inB} + c_8 e^{-inB}) e^{i\sigma T} \dots\dots\dots (30)$$

$$m^2 = 2n \left(\frac{1}{2} + J \right) \quad (J=1, 2, 3 \dots) \dots\dots\dots (31)$$

ここで、 $m^2=\sigma^2/I$ 。 $c_5 \sim c_8$ は未定係数、Hypergeometric () は超幾何関数、 n は沿岸方向の波数である。式 (31)

は全領域で η' が無限大にならないための条件で、これはエッジ波の分散関係に相当する。

式 (30) で、実線部 1 項と 2 項の自乗和の関数は、 $x=0$ で無限大になり、 $x=\infty$ で 0 に収束する。よって、式 (30) の実線部は岸沖方向に進行性の波動を表す。実線部 1 項は、岸沖方向に重複性の波動を表す。

斜面に直角に入射する遡上波に対しては、式 (29) の右边 4 項を 0 にすると η' は、

$$\eta' = \left\{ c_9 \text{Bessel } J \left(0, 2A \sqrt{\frac{\sigma^2}{I}} + c_{10} \text{Bessel } N \cdot \left(0, 2A \sqrt{\frac{\sigma^2}{I}} \right) \right\} e^{i\sigma\tau} \dots (32)$$

ここで、Bessel J 、Bessel N はそれぞれ Bessel 関数、Neumann 関数で、 c_9 、 c_{10} は未定係数である。

波先の水粒子は、 $A=0$ としたときの X 、 Y 、 Z により計算できる。最大遡上高さ $H_{\max} = X|_{A=0} \times I$ は、沖側境界で与えられる未定係数 c_{11} を用いて次式から得られる。

$$H_{\max} = -\frac{2d}{I} c_{11} \cos nB \dots (33)$$

3. 傾斜海浜でのラグランジュ解析の適用性

(1) 実験の概要

解析解の適用性を評価するため、2 次元、3 次元傾斜海浜における水粒子の遡上実験を行った。

2 次元実験では、図-2 に示す不透水性の傾斜海浜(勾配: $\tan \beta=1/3, 1/5$)を有する 2 次元水槽を用いた。沖側水平底部の水深 h は、 $\tan \beta=1/3$ では 31.2 cm、 $\tan \beta=1/5$ では 34.4 cm とした。斜面上での遡上波の波高を計測するため、汀線の法線方向に 25 cm 間隔で 4 本の波高計を設置した。入射進行波高 d は沖の波高計により計測した。岸沖方向の代表長 l は、 $l=\sqrt{g(h+d/2)} T_s$ で与えた。遡上岸沖波形を調べるため、1/30 秒毎の水面位置を水槽側方からビデオ撮影した。岸沖の水粒子の運動を知るために、トレーサーの変位を斜面上方からビデオ撮影し、あわせて汀線変動も撮影した。

3 次元傾斜海浜上での解析解によると、水粒子は超幾何関数に従う楕円運動をする。沿岸方向に進行する波動では、水粒子運動は楕円運動に従う。沿岸方向に重複する波動では、水粒子は腹 ($nB=0$) で岸沖方向のみに往復

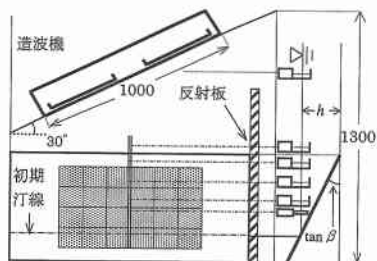


図-3 平面水槽

運動し、節 ($nB=\pi/2$) では沿岸方向のみに往復運動する。その中間の位相では、超幾何関数に従う楕円型の往復運動をする。沿岸方向に進行、重複する波動に対する水粒子運動を、平面水槽(図-3)を用いた遡上実験で再現した。計算に必要な斜面上の 4 点の波高、岸沖・沿岸方向流速を測定すると同時に、トレーサーを追跡することにより岸沖・沿岸方向の空間的な水粒子運動を解析した。

(2) 傾斜海浜での遡上特性に関する実験的考察

1) 砕波形態の分類

解析解は非砕波の波動を対象とするため、まず斜面上での砕波限界について検討した。遡上波の波峰が白く泡立ちそれが全面に広がり砕けたとき砕波とする。2 次元実験・3 次元実験に関わらず、斜面を遡上する波の砕波形態として、遡上する波と流下する波の衝突により瞬間的にエネルギー逸散するもの(a-型とする)と、より大きな入射波に対しては衝突した点で完全にエネルギーが逸散されず遡上中にも逸散し続けるもの(b-型とする)が観測された。図-4(a), (b) は、平面水槽で見られた 2 つの砕波形式で、それぞれの写真の○で囲った部分が a-型と b-型に対応する。また、平面水槽内では、同じ沖波波高、周期に対して、沿岸方向に重複する遡上は進行する遡上よりも大きくなり、特に遡上が最大の腹で砕波が生じやすい。遡上波と流下水塊が衝突するとき、遡上に対する流下の相対的な運動エネルギーが大きくなることによっても砕波生じやすくなる。すなわち砕波は、最大遡上高さ、すなわち沖波波高と遡上周期に依存する。

2) 砕波限界に関する考察

2 次元傾斜海浜で岸沖方向に定常な遡上波を対象とし、砕波限界の検討を行う。図-5 に、入射波高と周期に

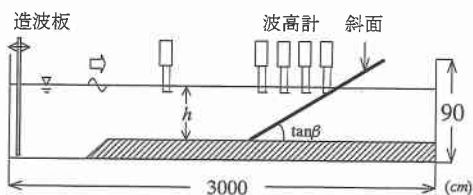


図-2 2 次元水槽



図-4 砕波形態

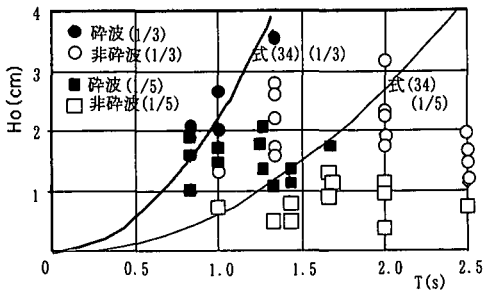


図-5 2次元傾斜海浜上の碎波発生領域

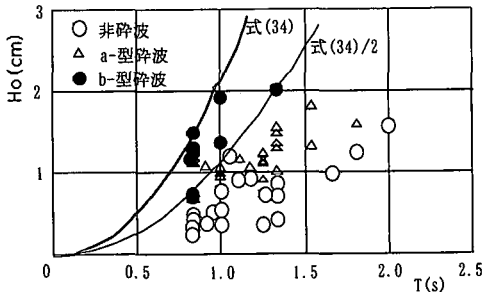


図-6 3次元傾斜海浜上の碎波発生領域

よる碎波の発生領域を示す。図中には次式で表される Miche の碎波限界式 (岩垣雄一・樫木亨, 1979) も示す。

$$\left(\frac{H_0}{L_0}\right)_c = \sqrt{\frac{\theta}{90^\circ}} \frac{\sin^2 \theta}{\pi} \dots \dots \dots (34)$$

ここで、 θ は斜面の傾斜角 (度) である。波形勾配が、式 (34) で表される限界値よりも大きい場合は斜面上で碎波する。図-5 より斜面に直角入射する場合 (2次元実験) は、ほぼ式 (34) で表される碎波限界とほぼ一致する。

図-6 は、3次元傾斜海浜で岸沖方向には定常で、沿岸方向に重複する遡上波を対象とした碎波出現領域である。斜面上で非碎波を○、碎波形態 (a) (b) を△と●で区別した。この場合、最大遡上高さは沿岸方向の腹で最大になり、碎波はまず腹で生じる。碎波限界と最大遡上高さの関係が線形なら、沿岸方向の腹での碎波限界波形勾配は、式 (34) の 1/2 となるはずである。図中には、この曲線も示してある。

図より、b-型の碎波発生限界は式 (34) から推定される限界波高の 1/2 と一致する。しかし、a-型の碎波は、より小さい波高で発生する。このような碎波に対しては新たな碎波限界が必要である。

3) 反射率に関する考察

図-7 に、波形勾配と 3次元の傾斜海浜からの反射率の関係を示す。反射率は、岸沖方向に並べた 2 点の水位変動の時系列から入射分離によって求めた。水位変動を与える 2 つの波高計の距離は、スネルの法則から求まる波向きにより補正する。沿岸方向に重複する波動に対

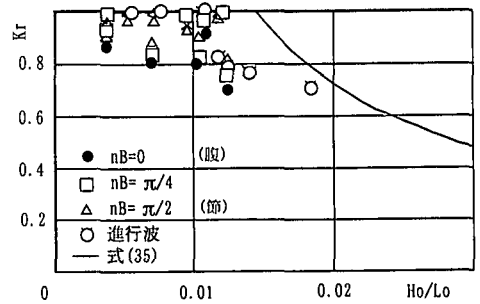


図-7 岸沖方向の反射率

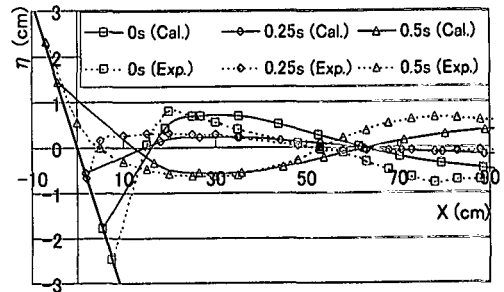


図-8 岸沖方向の水面変動 (Case 1)

して、沿岸方向の腹で計測した反射率を●、節の反射率を△、その中間の位相の反射率を□、沿岸方向に進行する波動での斜面から反射率を○で示す。図中には参考のため、Miche の不透過斜面からの反射率の関係式 (1979)

$$K_r = a_r \sqrt{\frac{\theta}{90^\circ}} \frac{\sin^2 \theta}{\pi} \frac{L_0}{H_0} \dots \dots \dots (35)$$

も示してある。ここで、 a_r は斜面の状態に依存する係数 (不透過斜面では 1.0) である。式 (35) で $K_r \geq 1.0$ の領域は、 $K_r = 1.0$ とした。波形勾配が小さい領域では、斜面からの反射はほぼ 1 になる。沿岸方向に重複したときの遡上は、沿岸方向に進行したときの遡上に比べて碎波が生じやすく、同じ波形勾配に対して斜面からの反射率は小さくなる。特に、沿岸方向の腹における斜面から反射率は、沿岸方向の反射率の影響を受け、他の位相の反射率よりも小さい。

(3) 2次元傾斜海浜におけるラグランジュ解析の適用性

図-8 は、Case 1 ($T_s = 1.0$ s, $\tan \beta = 1/3$, $d = 1.9$ cm, $c_0 = 87.1$) の波動に対する斜面上遡上波形の変動を、最大流下時の位相を $t = 0$ s として示したものである。式 (32) の c_0 は、4 点の波高を用いた最小自乗法により決定した。Case 1 での遡上は、斜面上で碎波せず、岸沖方向に定常である。

図より、実測波形の節の位置は、解析解よりも岸にずれている。長波領域を $h/L_0 \leq 1/20$ とすると、Case 1 での長波領域は $x = 27.0$ cm より岸である。長波近似ができ

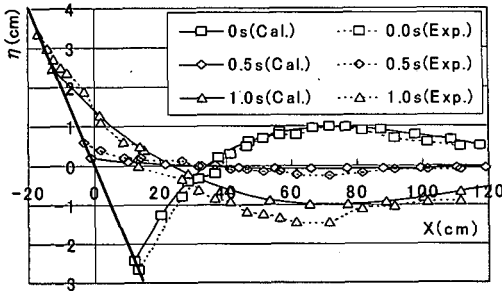


図-9 岸沖方向の水面変動 (Case 2)

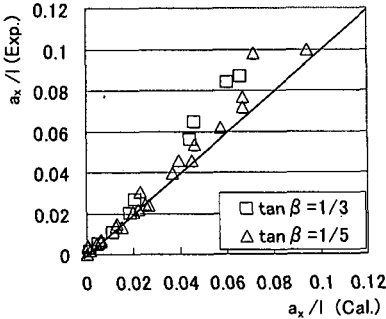


図-10 水粒子の軌道振幅 (2次元)

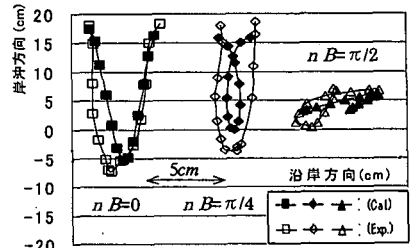


図-11 汀線における水粒子の軌跡

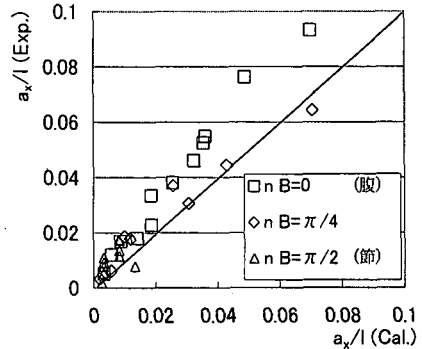


図-12 水粒子の軌道振幅 (3次元)

ない $x=27.0$ cm より沖の波形が解析解と一致しないのは当然である。

図-9 に、Case 2 ($T_s=2.0$ s, $\tan \beta=1/5$, $d=1.2$ cm, $c_0=640.2$) に対する岸沖方向の水面変動を表す。Case 2 における遡上波は、斜面上で碎波せず、岸沖方向に定常である。長波近似できる領域 ($x \leq 93.0$ cm) では、岸沖方向の腹、節の位相の実験値は、解析解と一致する。

図-10 は、水粒子運動の岸沖方向の軌道振幅 a_x について、実験値と解析解を l で無次元表示して比較したものである。岸沖方向の軌道振幅が、代表長の 2% 以下の領域で実験と解析解は完全に一致した。水粒子運動が大きい極浅海域では、非線形性が大きくなり、1 次近似に対する解析解と実験結果の差異は大きくなる。

(4) 3次元傾斜海浜におけるラグランジュ解析の適用性

図-11 は、沿岸方向に重複する波動 Case 3 ($T_s=1.3$ s, $\tan \beta=1/3$, $d=1.0$ cm, $c_0=249.2$) に対する汀線の変動を 1 周期追跡したものである。遡上は斜面上で碎波せず、岸沖方向に定常である。沿岸方向の反射率 ($=0.8$) は、式 (30) 中の係数 c_7 , c_8 により考慮した。(□) は沿岸方向の腹、(◇) は中、(△) は節でのトレーサーの変動である。腹では、岸沖方向の水粒子運動が卓越し、節では沿岸方向の水粒子運動が相対的に大きくなっている。実験では、1 次近似解では説明できない質量輸送が生じる。そこで解析解には、実験における水粒子の 1 周期あ

りの移動量から質量輸送の影響を便宜的に付加した。

図-12 は、沿岸方向に重複する波動 (Case 3) に対する水粒子の岸沖方向の軌道振幅 a_x について、実験値と計算値を代表長 l で無次元表示して比較したものである。2 次元実験同様、軌道振幅が大きい汀線付近では、非線形性の影響により実験値は解析解よりも大きくなる。

4. 結 論

本研究では、ラグランジュ方程式を摂動展開して得られる 1 次近似式により、打ち上げ波帯における水粒子の運動を解析的に求めた。解析解を用いると、煩雑な数値計算を行うことなく解析解が容易に求まる。

2 次元、3 次元遡上実験を行い、解析解と実験結果を比較した。岸沖方向に定常で、斜面上で碎波しない遡上波が形成されたとき、解析解は有効である。また、非線形性が卓越する汀線近傍の遡上を精度よく再現するには、より高次の近似解が必要になる。

参 考 文 献

- 岩垣雄一・榎木 亨 (1979): 海岸工学, 共立出版株式会社, pp. 113-122.
- 首藤伸夫 (1966): 長波の打ち上げ高, 第 13 回海岸工学講演会論文集, pp. 216-222.
- Willard J. Pierson (1962): Perturbation Analysis of the Navier-Stokes Equations in Lagrangian Form with Selected Linear Solution, J. Geophysical Research, Vol. 67, No. 8, pp. 3151-3160.