

鉛直積分型 Reynolds 方程式に基づく平面 2 次元碎波解析法

大山 巧*・石原 孟**・灘岡 和夫***

1. はじめに

碎波帯内の水理現象を対象とした解析技術は、近年、急速な発展を遂げており、特に岸沖方向 1 次元波動場に関しては、碎波および碎波後の波の遡上現象まで含めた実用レベルの計算が可能になりつつある。基礎式の基本的な構成は、波・流れの方程式中に碎波現象に対応した付加的な項を加える形が最も一般的であるが、碎波のモデル化としては、Surface Roller に基づく過剰運動量を導入する方法 (Schäffer *et al.*, 1993; Madsen *et al.*, 1997)、および渦粘性項として評価する方法に大別できる。後者については、さらに、渦粘性係数を経験的に与える手法 (柴山ら, 1995; Kennedy *et al.*, 2000) と 1 方程式乱流モデルを連結させた手法 (Nwogu, 1996; 灘岡・大野, 1997; 有川・磯部, 1998; 大山ら, 1999) が提案されている。

最近では、これらの 1 次元解析法を平面波動場へ拡張する試みがなされつつあるが (Nwogu, 1996; Sørensen *et al.*, 1998; Chen *et al.*, 2000)、多方向波動場を取り扱うことができる一般性の高い碎波モデルはほとんど開発されていない (灘岡ら, 1999)。すなわち、例えば Surface Roller の基本的考え方は、一方向進行波の碎波現象に立脚したものであり、波速や局所的な波面勾配をパラメータとしている以上、部分重複波を含む複雑な重合波動場中の碎波現象には適用できない。また、渦粘性モデルを用いる場合においても経験的に粘性係数を与える場合には、進行波型碎波と重複波型碎波の識別が困難になる。

これに対して、著者ら (1999) は、乱流モデルにおける乱れエネルギー生成項を bore 前面の大規模渦による生成項と内部せん断変形に伴う項の和として表し、波峰上の流速がゼロとなる重複波型碎波では後者が支配的になるモデル化を行い、スロッシング実験との比較からその適用性を確認した。本研究では、前報で得られた結果を踏まえて、重合波動場にも適用可能な平面 2 次元碎波モデルを開発し、様々な碎波形態が現れる円筒容器内の

スロッシング問題を対象とした模型振動実験との比較から解析モデルの適用性を論じる。なお、大規模渦による乱れ生成項に関しては、基本的には灘岡ら (1997, 1999) のランキン渦モデルを適用するが、ラインソース項として与えることにより数値モデル化を若干シンプルにしている。

2. 鉛直積分型平面 2 次元 Reynolds 方程式

(1) Boussinesq 型近似を導入した Reynolds 方程式

モデル開発の基本方針は前報 (大山ら, 1999) と同様であり、実用性を重視しつつも重合波動場中の碎波現象が取り扱えることを念頭に置いた。波・流れ場を表現する基礎式としては、回転性流体運動も考慮できる Reynolds 方程式を採用した。ただし、計算効率化のため、Boussinesq 型の近似を導入し、非線形性と分散性に関するパラメータ：

$$\epsilon \equiv a_0/h_0, \quad \mu \equiv h_0/l \quad \dots\dots\dots (1)$$

に対して $O(\epsilon)$, $O(\mu^2)$ までのオーダーを考慮した。ここで、 l , h_0 ：水平および鉛直方向の長さスケール、 a_0 ：波高スケールである。また、底面については緩勾配を仮定し、水深の高階微分項および底面勾配がかかった $O(\epsilon)$, $O(\mu^2)$ の項は無視した。

まず、座標系および変数を以下のように無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} (x, z, t) &= \left(\frac{x'}{l}, \frac{z'}{h_0}, \frac{\sqrt{gh_0}t'}{l} \right) \\ (q, w) &= \left(\frac{h_0}{a_0\sqrt{gh_0}}q', \frac{h_0^2}{a_0l\sqrt{gh}}w' \right) \\ \eta &= \frac{\eta'}{a_0}, \quad h = \frac{h'}{h_0}, \quad p = \frac{p'}{\rho g a_0} \\ K &= \frac{K'}{g a_0}, \quad \nu_t = \frac{\nu_t'}{h_0\sqrt{g a_0}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 $x \equiv (x, y)$, z ：水平および鉛直座標 (z は静水面を原点とした鉛直上向きの座標)、 $q \equiv (u, v)$, w ：水平流速ベクトルおよび鉛直流速、 p ：圧力、 η ：水面変動量、 h ：水深、 ρ ：流体密度、 K ：乱流エネルギー、 ν_t ：渦動粘性係数であり、「 $'$ 」は次元量を表す。

無次元化した連続の式、

* 正会員 工博 清水建設(株)技術研究所
** 正会員 工博 東京大学助教授 大学院工学系研究科
*** フェロー 工博 東京工業大学教授 大学院情報理工学研究科

$$\mu^2 \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

を $-h$ から z まで積分し、底面の不透過条件を代入すると、 w は次のように表される。

$$w = -\mu^2 \nabla \cdot \int_{-h}^z \mathbf{q} dz \quad (4)$$

ただし、 $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ である。式 (4) より w が $O(\mu^2)$ であることを考慮すると、 $O(\varepsilon) (= O(\mu^2))$ までの運動量方程式は以下ようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \varepsilon (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} + \frac{\varepsilon}{\mu^2} w \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} + \nabla p = \mathbf{R}_H \quad (5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\partial p}{\partial z} = R_z \quad (6)$$

ただし、 $\mathbf{R}_H \equiv (R_x, R_y)$ および R_z は Reynolds 応力項であり、渦粘性モデルに基づき以下のように表す。

$$R_x = -\frac{2}{3} \frac{\partial K}{\partial x} + \varepsilon^{1/2} \mu \left(2 \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) + \frac{\varepsilon^{1/2}}{\mu} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (7)$$

$$R_y = -\frac{2}{3} \frac{\partial K}{\partial y} + \varepsilon^{1/2} \mu \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) + \frac{\varepsilon^{1/2}}{\mu} \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (8)$$

$$R_z = -\frac{2}{3} \frac{\partial K}{\partial z} + \varepsilon^{1/2} \mu \left\{ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - 2 \frac{\partial (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial z} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \nu_t \frac{\partial u}{\partial x}, \sigma_{yy} = \nu_t \frac{\partial v}{\partial y}, \tau_{xy} = \tau_{yx} = \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \nu_t \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \tau_{zx} = \tau_{xz} = \nu_t \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式 (6) を z から $\varepsilon \eta$ まで積分し、自由表面での力学的条件を代入すれば、圧力 p は以下のように表される。

$$p = \eta - \frac{z}{\varepsilon} + \int_{-h}^z \frac{\partial w}{\partial t} dz - \int_z^{\varepsilon \eta} R_z dz \quad (11)$$

式 (11) を水平方向運動量方程式 (5) に代入して p を消去すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \varepsilon (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} + \frac{\varepsilon}{\mu^2} w \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} + \nabla \left(\eta + \int_z^{\varepsilon \eta} \frac{\partial w}{\partial t} dz \right) \\ = \mathbf{R}_H + \nabla \int_z^{\varepsilon \eta} R_z dz \quad (12) \end{aligned}$$

また、連続式 (3) を $-h$ から $\varepsilon \eta$ まで積分し、自由表面と底面の運動学的条件を代入すると、鉛直積分型の連続式として次式を得る。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \mathbf{q} dz = 0 \quad (13)$$

(2) 多成分連成法に基づく水深積分表現

多成分連成法の考え方にに基づき、水平流速ベクトル $\mathbf{q}$ を以下のように表現する。

$$\mathbf{q} = \sum_{m=1}^M F_m(z; h) \mathbf{Q}_m(x, y, t) \quad (14)$$

ただし、 $\mathbf{Q}_m \equiv (U_m, V_m)$, F_m は鉛直依存関数系でありここでは Legendre 多項式を用いた。また、 M は採用する鉛直依存関数の数である。式 (14) を式 (4), (11) に代入すれば、 w と p は次のように表される。

$$w = -\mu^2 \sum_{m=1}^M \nabla \cdot (G_m \mathbf{Q}_m) \simeq -\mu^2 \sum_{m=1}^M G_m \nabla \cdot \mathbf{Q}_m \quad (15)$$

$$p \simeq \eta - \frac{z}{\varepsilon} - \mu^2 \sum_{m=1}^M H_m \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_m}{\partial t} - \int_z^{\varepsilon \eta} R_z dz \quad (16)$$

$$G_m(z; h) \equiv \int_{-h}^z F_m dz, H_m(z; h) \equiv \int_z^{\varepsilon \eta} G_m dz \quad (17)$$

式 (14), (15) を連続式 (13) および運動量方程式 (12) に代入し、後者については Galerkin 法に基づく鉛直積分を施す。これにより得られた $O(\varepsilon)$ までの支配方程式は次元量を用いて表すと以下ようになる (「 $\cdot$ 」は省略)。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{m=1}^M \left\{ \nabla \cdot (S[F_m] \mathbf{Q}_m) + F_{m0} \nabla \cdot (\eta \mathbf{Q}_m) \right\} = 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \left\{ S[F_m F_i] \frac{\partial \mathbf{Q}_m}{\partial t} - S[H_m F_i] \nabla \cdot \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_m}{\partial t} \right) \right. \\ \left. + g S[F_i] \nabla \eta + \sum_{n=1}^M \left\{ S[F_m F_n F_i] (\mathbf{Q}_m \cdot \nabla) \mathbf{Q}_n \right. \right. \\ \left. \left. - S \left[G_m \frac{\partial F_n}{\partial z} F_i \right] (\nabla \cdot \mathbf{Q}_m) \mathbf{Q}_n \right\} = M_{Hi} + M_{Vi} \right. \\ \left. (i=1, \dots, M) \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{Hi} &= \int_{-h}^0 F_i R_H dz, \\ M_{Vi} &= \int_{-h}^0 F_i \nabla \cdot \left(\int_z^{\varepsilon \eta} R_z dz \right) dz \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$S[\Theta(z)] \equiv \int_{-h}^0 \Theta(z) dz \quad (21)$$

ただし、 F_{m0} は $z=0$ での F_m の値である。簡単のため、 K , ν_t を鉛直平均値 $\bar{K}$, $\bar{\nu}_t$ で代表させるものとすれば、式 (20) の各項は以下のように表される。

$$\begin{aligned} M_{Hi} &= -\frac{2}{3} S[F_i] \bar{\nu}_t \bar{K} - F_{iB} \tau_B + \sum_{m=1}^M S[F_m F_i] T_m \\ &\quad - \bar{\nu}_t \sum_{m=1}^M \left\{ S \left[\frac{\partial F_m}{\partial z} \frac{\partial F_i}{\partial z} \right] \mathbf{Q}_m \right. \\ &\quad \left. - S \left[G_m \frac{\partial F_i}{\partial z} \right] \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{Q}_m) \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

$$T_m = \left(\begin{aligned} &2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\nu}_t \frac{\partial U_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\nu}_t \left(\frac{\partial U_m}{\partial y} + \frac{\partial V_m}{\partial x} \right) \right) \\ &2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\nu}_t \frac{\partial V_m}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\nu}_t \left(\frac{\partial U_m}{\partial y} + \frac{\partial V_m}{\partial x} \right) \right) \end{aligned} \right) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} M_{Vi} &= \sum_{m=1}^M S[(F_{m0} - F_m) F_i] \nabla \cdot (-2 \bar{\nu}_t (\nabla \cdot \mathbf{Q}_m) \\ &\quad + \nabla \cdot (\bar{\nu}_t \mathbf{Q}_m)) \quad (24) \end{aligned}$$

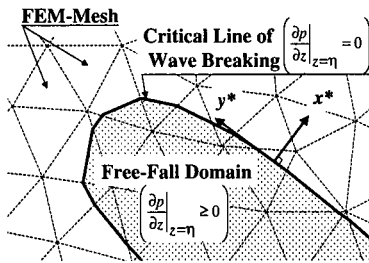


図-1 碎波限界線と局所座標系の定義

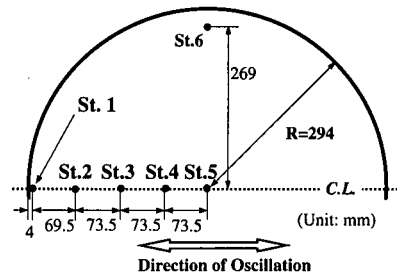


図-2 水面変動量の測定位置

ここで、 F_{ib} は $z=-h$ での F_i の値、 τ_b は底面せん断応力ベクトルであり、ここでは底面流速ベクトル q_b を用いて以下のように与えた。

$$\tau_b = C_f |q_b| q_b \quad (25)$$

ただし、 C_f は摩擦係数である。支配方程式 (18), (19) において、成分数 M を 1 とし、Reynolds 応力項 M_{Hi} , M_{vi} を無視すれば、Boussinesq 方程式と一致する。なお、式 (18), (19) の数値モデル化に際しては有限要素法を適用し、時間方向には中央差分を用いた。

3. 乱流モデルと生成項のモデル化

乱れエネルギー $\bar{K}$ の算定には、1 方程式モデル：

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + (\bar{q} \cdot \nabla) \bar{K} = P_k - c^* \frac{\bar{K}^{3/2}}{l^*} + \nabla \cdot \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \nabla \bar{K} \right) \quad (26)$$

$$\bar{\nu}_t = \bar{K}^{1/2} l^* \quad (27)$$

を用いた。ここで、式 (26) の右辺各項はそれぞれ生成項、消散項、拡散項を表しており、 c^* および σ_k は係数 (ここでは $c^*=0.09$, $\sigma_k=1.0$ と設定)、 l^* は乱れの長さスケール (ここでは $l^*=0.15 h$ と設定) である。

式 (26) における生成項 P_k については、前報 (大山ら, 1999) で得られた結果を踏まえて、bore 前面の大規模渦により生成される成分 P_b と流体のせん断変形による成分 P_l との和として、以下のように表す。

$$P_k = P_b + P_l \quad (28)$$

進行波型の碎波では前者が、重複波型の碎波では後者が相対的に大きくなる。これらのうち、内部生成項 P_l は、流速勾配を用いて次のように評価した。

$$P_l = \nu_t \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \quad (29)$$

P_l が局所的な流速分布から直接的に算定できるのに対して、 P_b についてはモデル化が必要となる。まず碎波の判定について、灘岡ら (1999) は、水面上の鉛直圧力勾配をパラメータとした判定法 (灘岡・大野, 1996) が重合波動場でも適用可能であることを示している。本モ

デルではその成果を踏まえて、水面上の鉛直圧力勾配がゼロとなる線を「碎波限界線」として定義し (図-1 参照)、その線上においてランキン渦モデル (灘岡ら, 1997, 1999) に基づく乱れエネルギーソースを以下のように与えた。

$$P_b = \delta(x^*) \frac{\pi r_c |u_c|^3}{16(h+\eta)} \quad (30)$$

ただし、 δ はデルタ関数、 (x^*, y^*) は x^* を法線方向とする局所座標系 (図-1)、 r_c は渦の半径 ($=\eta/2$ と設定)、 u_c は渦の回転方向流速であり、法線 (x^*) 方向前面に渦が形成されるものとしてモデル化している。ここで、進行波型碎波を考えると、碎波限界線は鉛直圧力勾配のピーク値を挟んで波上側と波下側 (Wave Front) に現れることになるが、前者は物理的に意味がなく、乱れエネルギー供給は Wave Front のみで行われるべきである。そこで、渦の回転方向流速 u_c を x^* 方向の水平流速成分 u_{n^*} の符号を参照して、以下のように評価した。

$$u_c = \begin{cases} u_{n^*} & (\text{for } u_{n^*} > 0) \\ 0 & (\text{for } u_{n^*} \leq 0) \end{cases} \quad (31)$$

このようなモデル化により、碎波限界線前面での大規模渦の有無が自動的に判別されることになる。

4. スロッシング実験による検証

(1) 実験の諸元

直径 ($\equiv 2R$) が 58.8 cm、高さが 50 cm のアクリル製の円筒容器を用いてスロッシング実験を行い、容器に作用する水平流体力および容器内 6 点 (St. 1~6) の水面変動量を測定した。図-2 に水面変動量の測定位置を示す。水深は 3 cm で一定とし、加振周波数 f および加振振幅 D を変化させた。この場合、線形理論から求められる 1 次の固有周波数 f_0 は 0.538 Hz である。流体力の測定方法は前報 (大山ら, 1999) の矩形容器の場合と同様である。実験では、静水状態から定常振動応答 (流体力の周期的な応答) が得られるまで正弦波状に容器を加振することを前提としたが、複雑なスワリング現象により定常振動応答が得られないケースもあった。

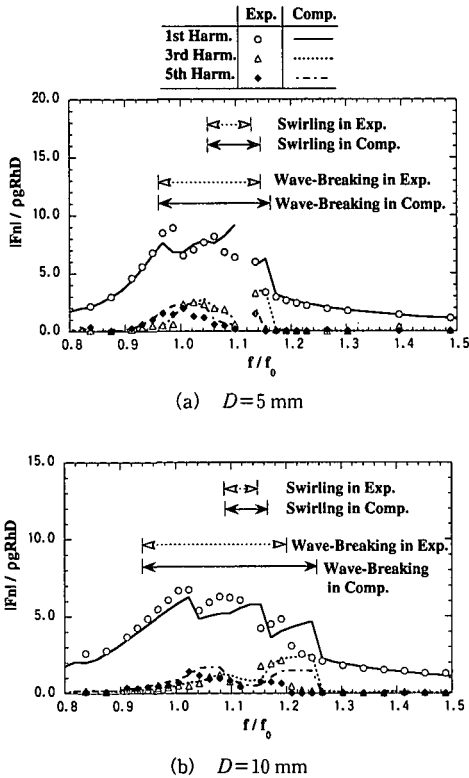


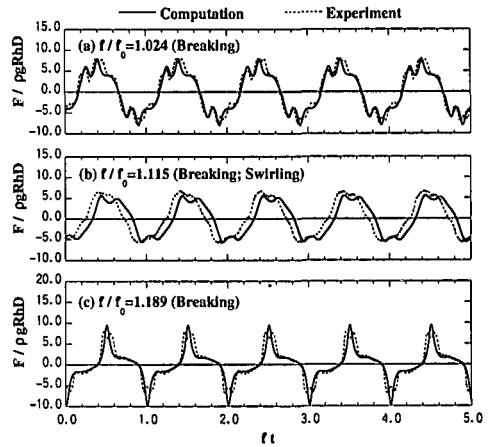
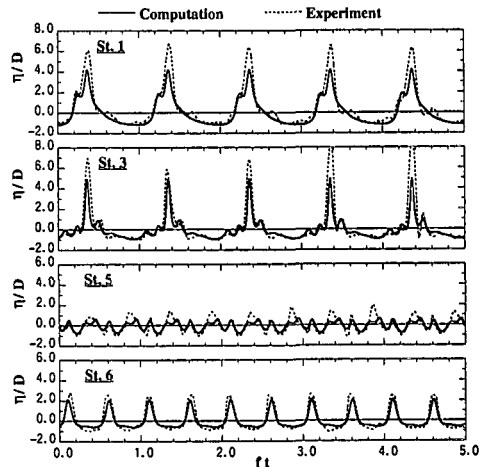
図-3 流体力応答波形における成分波振幅の周波数特性

(2) 流体力と水面変動量の比較

数値計算では、式 (19) の右辺に外力項 $a_x S[F_i](a_x$: 加振加速度) を加え、容器側壁では不透過条件を与えた。また、鉛直依存関数の成分数 M は 2 で一定とした。

図-3 は、加振振幅 $D=5 \text{ mm}$ および 10 mm の場合について、流体力波形に含まれる基本周波数成分 (1st), 3 倍周波数成分 (3rd), および 5 倍周波数成分 (5th) の振幅 $|F_n|$ の周波数特性をプロットしたものである。図中には、実験と解析において検出された砕波およびスワリング (面外振動) の周波数帯域も示してある。 $D=5 \text{ mm}$ のケースにおける $f/f_0=1.115$ では、実験、数値解析ともに定常振動応答が得られなかった。矩形断面容器のスロッシング現象 (大山ら, 1999) と同様に、高調波を含む非線形性の強い応答から線形的な応答に不連続に変化する周波数 f_p が存在し、 f_p は加振振幅が大きくなるほど高周波数側にずれる。本解析においても同様な現象が現れるが、 $D=10 \text{ mm}$ の解析結果における $f_p (=1.25 f_0)$ は、実験結果よりも 4% 程度高くなる傾向にある。しかし、 f_p に関するこのような差異を除けば、砕波帯域およびスワリング帯域に関する実験結果との対応は良い。

図-4 には、 $D=10 \text{ mm}$ について代表的な周波数における流体力波形を示す。まず、 $f/f_0=1.024$ では容器中央

図-4 流体力波形の比較 ($D=10 \text{ mm}$)図-5 水面変動量の比較 ($f/f_0=1.004$, $D=10 \text{ mm}$)

を加振方向に伝播する波と容器側壁に沿って砕けながら回り込んでくる波がぶつかり合い、容器内部で複雑な重複波型砕波を起こす。流体力波形には高調波の影響が現れているものの、容器側面には砕波が直接的に作用しないため衝撃的な力は発生していない。 $f/f_0=1.115$ では容器内で流体が旋回するスワリングが発生し、進行波型の砕波が容器側面に沿って起こる。このケースの流体力波形には、高調波の影響はあまり顕著には現れない。解析波形と実験波形には位相に若干の差は見られるものの、このようなスワリング現象も本モデルによりほぼ再現されている。さらに周波数の高い $f/f_0=1.189$ では、先鋭型の衝撃的な流体力が作用する。この場合、実験では、波が容器中央部を加振方向に進行し、容器側面の前面で巻き波型砕波を起こした後、側面に激しく衝突する。本モデルでは実験結果に見られる双峰型波形までは表し得ないものの、両者の波形の一致は良好である。

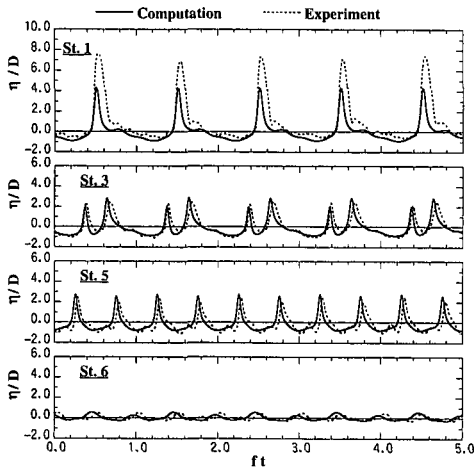
図-6 水面変動量の比較 ($f/f_0=1.189$, $D=10$ mm)

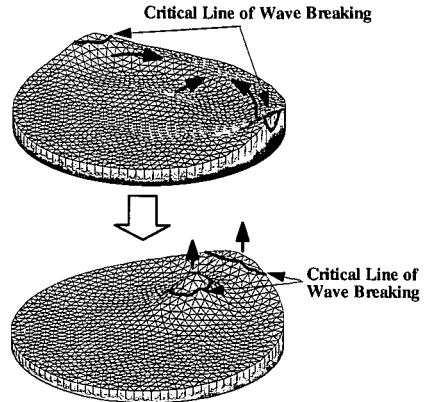
図-5, 6 は, $f/f_0=1.004$ および 1.189 における水面変動量の比較を示したものである。また、参考のため、図-7 には $f/f_0=1.004$ の水面変動パターン(解析結果)を示す。当然のことながら、本モデルでは重複波型砕波のスプラッシュまで再現できないため、例えば $f/f_0=1.004$ での St. 1, 3 および $f/f_0=1.189$ での St. 1 ではピーク値が過小評価されている。しかし、周波数による水面変動パターンの差異、すなわち $f/f_0=1.004$ では波が St. 6 付近を回り込んで St. 1~3 でぶつかりあう状況(図-7 参照), $f/f_0=1.189$ では孤立波的な進行波が容器中央を加振方向に伝播する状況が非常に良く再現されている。

5. おわりに

鉛直積分型 Reynolds 方程式と乱流モデルを連結させた実用的な砕波変形解析法として、先に提案した 1 次元砕波モデルを平面 2 次元場に拡張し、円筒容器を用いたスロッシング実験との比較からその性能を検証した。本解析法では、乱れ生成項を内部せん断変形による成分と大規模渦による成分の和として表し、後者については水面上の鉛直圧力勾配がゼロとなる砕波限界線上でソースとして与えた。このような比較的シンプルなモデル化にもかかわらず、実験で得られた砕波を伴う複雑な水面変動パターンおよび容器に作用する流体力は良好に再現され、本解析手法が重合波動場中の砕波現象をも扱い得ることが検証された。

参考文献

有川太郎・磯部雅彦 (1998): 非線形緩勾配方程式を用いた砕波

図-7 水面変動パターンの例 ($f/f_0=1.004$, $D=10$ mm)

モデルの構築, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp. 141-145.

大山 巧・石原 孟・灘岡和夫 (1999): 鉛直積分型 Reynolds 方程式による砕波時流体力評価, 海岸工学論文集, 第 46 巻, pp. 166-170.

柴山知也・Nguyen T. D.・岡安章夫 (1995): 乱流方程式を用いた砕波帯内流速場・圧力場の計算法の検証, 海岸工学論文集, 第 42 巻, pp. 21-30.

灘岡和夫・大野修史・栗原 礼 (1996): 波動場の力学状態に基づく砕波過程の解析と砕波条件, 海岸工学論文集, 第 43 巻, pp. 81-85.

灘岡和夫・大野修史 (1997): 水深積分型乱流エネルギー輸送方程式を連結させた砕波帯内波動場モデルの提案, 海岸工学論文集, 第 44 巻, pp. 106-110.

灘岡和夫・田村 仁・清川哲志 (1999): 多方向平面波浪場における非線形分散性波動の砕波モデルに関する研究, 海岸工学論文集, 第 46 巻, pp. 171-175.

Chen, Q., J. T. Kirby, R. A. Dalrymple, A. B. Kennedy and A. Chawla (2000): Boussinesq modeling of wave transformation, breaking, and runup. II: 2D, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, Vol. 126, pp. 48-56.

Kennedy, A. B., Q. Chen, J. T. Kirby and R. A. Dalrymple (2000): Boussinesq modeling of wave transformation, breaking, and runup. I: 1D, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, Vol. 126, pp. 39-47.

Madsen, P. A., O. R. Sørensen and H. A. Schäffer (1997): Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq type model. Part I, Coastal Eng., Vol. 32, pp. 255-287.

Nwogu, O. G. (1996): Numerical prediction of breaking waves and currents with a Boussinesq model, Proc. 25th ICCE, Chapt. 374, pp. 4807-4820.

Schäffer, H. A., P. A. Madsen and R. Deigaard (1993): A Boussinesq model for waves breaking in shallow water, Coastal Eng., Vol. 20, pp. 185-202.

Sørensen, O. R., H. A. Schäffer and P. A. Madsen (1998): Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq type model. Part III, Coastal Eng., Vol. 33, pp. 155-176.