

# *k-ε* 乱流モデルによる風波下の乱流構造の解析

杉原 裕司\*・高崎 敦彦\*\*・松永 信博\*\*\*

## 1. はじめに

大気-海洋間における運動量輸送やガス交換過程には、風波直下の乱流境界層が深く関わっている。この境界層は風波と力学的に結合しており、大規模な乱流パーストが存在することから、Downward-bursting boundary layer (DBBL) と呼ばれる (Toba・Kawamura, 1996)。工学的立場からは、運動量や物質の海面フラックスを精度よく定量化することが重要であるが、そのためには風波下の乱流構造を十分に理解することが必須である。

本研究の目的は、*k-ε* 乱流モデルを用いて風波下の乱流構造を近似的に記述する理論式を導出することである。*k-ε* 乱流モデルは、乱れのスペクトルにおける慣性小領域の成立を前提に定式化されている。風波下の乱流場では、風波のピーク周波数よりも低周波側において慣性小領域に対応する乱れのスペクトル領域が存在する (Mitsuyasu・Kusaba, 1985; Yoshikawa 他, 1988; 杉原 他, 1999)。そこで本研究では、得られた理論式を低周波の乱れ成分による乱流特性量の実験値と比較することによって、その妥当性を検証した。

## 2. *k-ε* 乱流モデルによる理論解析

風波下の乱流境界層は、壁面境界層の場合と同様に、風波界面の特性にのみ依存する内層と、主流の圧力勾配等の影響を受ける外層の 2 つの領域から構成されるものと考えられる。風波乱流場においても内層で壁法則が成立し、さらに外層で速度欠損則が成り立つとすれば、内層と外層のオーバーラップする領域 (慣性底層) では平均流速分布が log 則に従わなければならない。

本研究の解析では、風波界面の乱れ特性を陽には考慮せず、せん断乱流に対する標準的なモデリングによりどの程度乱流場を記述できるのかに着目する。まず、局所平衡風波下の乱流境界層では、水表面に作用する水側の摩擦速度 *u\** と境界層厚さ *h* で規格化された乱流特性量の鉛直分布は吹送方向に変化しないものと仮定する。ま

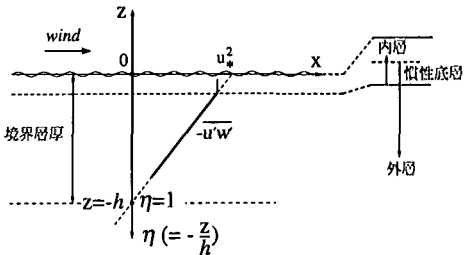


図-1 座標系と境界層厚の定義

た、水平方向の圧力勾配は一定であり、せん断応力の鉛直分布が直線変化する場合を考える。この圧力勾配は、閉鎖型の風洞水槽の場合、風応力による水表面のセットアップとして生じる。本研究では、境界層厚さ *h* はレイノルズ応力が 0 となる深さとする。

無次元化された乱流特性量を次のように定義しよう。

$$\left. \begin{aligned} U_+ &= U/u_*, -\overline{u'w'_+} = -\overline{u'w'}/u_*^2, k_+ = k/u_*^2 \\ \epsilon_+ &= \epsilon h/u_*^3, \nu_{t+} = \nu_t/(u_* h), \eta = -z/h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、添字+は無次元量を示し、*U* は *x* 方向の平均流速、 $-\overline{u'w'}$  はレイノルズ応力、*k* は乱れエネルギー、 $\epsilon$  はエネルギー散逸率、 $\nu_t$  は渦動粘性係数を示す。また、*z* は水表面から鉛直上向きに取られた座標であり、 $\eta$  は鉛直下向きの無次元座標である。解析においては、便宜的に *z* から  $\eta$  へ鉛直座標を変換するが、レイノルズ応力等のフラックスは鉛直上向きが正であることに注意する。座標系および境界層厚の定義は、図-1 に示されている。

そのような場合、風波下の乱流構造を記述する無次元 *k-ε* 方程式は以下のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} -\overline{u'w'_+} &= -\nu_{t+} \frac{dU_+}{d\eta} = 1 - \eta \\ \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\nu_{t+}}{\sigma_k} \frac{dk_+}{d\eta} \right) + \nu_{t+} \left( \frac{dU_+}{d\eta} \right)^2 &= \epsilon_+ \\ \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\nu_{t+}}{\sigma_\epsilon} \frac{d\epsilon_+}{d\eta} \right) + C_1 \frac{\epsilon_+}{k_+} \nu_{t+} \left( \frac{dU_+}{d\eta} \right)^2 &= C_2 \frac{\epsilon_+^2}{k_+} \\ \nu_{t+} &= C_\mu \frac{k_+^2}{\epsilon_+} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $\sigma_k, \sigma_\epsilon, C_1, C_2, C_\mu$  はモデル定数を示す。

\* 正会員 博(工) 九州大学助手 総合理工学研究院  
\*\* 修(工) 第一復建(株)  
\*\*\* 正会員 工 博 九州大学助教授 総合理工学研究院

## 2.1 慣性底層 ( $\eta \ll 1$ ) における相似解

まず、慣性底層に対応する、 $\eta \ll 1$  で、かつ  $\eta = 0$  の境界から離れた領域の中間漸近的な相似解を求めよう。そのような領域での相似解を次式のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_+}{d\eta} &= A\eta^\alpha \\ k_+ &= B\eta^\beta \\ \varepsilon_+ &= C\eta^\gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

式 (3) を式 (2) へ代入することにより、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} -C_\mu \frac{AB^2}{C} \eta^{a+2\beta-\gamma} &= 1 \\ \frac{C_\mu}{\sigma_k} \frac{B^3}{C^2} \beta(3\beta-\gamma-1) \eta^{3\beta-2\gamma-2} + \frac{C_\mu A^2 B^2}{C^2} \eta^{2a+2\beta-2\gamma} &= 1 \\ \frac{C_\mu}{C_2 \sigma_\varepsilon} \frac{B^3}{C^2} \gamma(2\beta-1) \eta^{3\beta-2\gamma-2} + \frac{C_1 C_\mu}{C_2} \frac{A^2 B^2}{C^2} \eta^{2a+2\beta-2\gamma} &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ただし、式 (2) の第 1 式右辺の  $\eta$  は 1 に比べて十分小さいとして無視されている。式 (4) から、恒等的にべき指数および係数が次のように決定できる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -1 \\ A &= -\frac{1}{\kappa}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}}, \quad C = \frac{1}{\kappa} \\ \kappa^2 &= \sigma_\varepsilon \sqrt{C_\mu} (C_2 - C_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

従って、 $\eta \ll 1$  の相似解が次のように得られる。

$$\frac{dU_+}{d\eta} = -\frac{1}{\kappa\eta}, \quad k_+ = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon_+ = \frac{1}{\kappa\eta} \quad (\eta \ll 1) \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $\kappa$  はカルマン定数 ( $=0.4$ ) である。慣性底層での解は、平均流速が log 則に従い、乱れエネルギーが鉛直方向に一定となることがわかる。また、乱れエネルギー方程式の拡散項は恒等的に 0 となる。式 (6) は乱流計算の壁面境界条件としてしばしば用いられる壁関数の関係に他ならない。ただし、ここでは乱れエネルギー方程式の生成項と散逸項のつり合い (局所平衡) の仮定や log 則を用いることなく式 (6) の結果が得られている点に注意する。 $\eta \ll 1$  で、かつ  $\eta = 0$  からも離れた中間漸近的な相似領域では、 $k$ - $\varepsilon$  方程式が恒等的に局所平衡の関係を満たすことになり、このことは乱流モデル研究の立場からも興味深い。DBBL は慣性底層程度までの深さに対応するものと考えられる。従って、式 (6) の関係式は DBBL の乱流特性を記述する上で重要である。

## 2.2 外層の局所平衡領域の理論式

次に、 $\eta \ll 1$  において式 (6) に一致し、外層までも近似的に記述できる乱流特性量の理論式を導出する。ここでは、幾つかの仮定の下で簡便な関係式の導出を試みる。

先の解析において、慣性底層では乱れエネルギー方程式の局所平衡が成立することが示された。この局所平衡は、壁面極近傍を除く、慣性底層から外層に至る比較的広い範囲で成り立つことが実験的に確認されている。そこで、以下の導出ではこの局所平衡の仮定を用いることとする。この仮定の下では、乱れエネルギー方程式は次のように簡単化される。

$$\nu_{t+} \left( \frac{dU_+}{d\eta} \right)^2 = \varepsilon_+ \dots\dots\dots (7)$$

式 (2) の第 1 式と式 (7) から速度勾配を消去すると、乱れエネルギーの解が得られる。

$$k_+ = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}} (1 - \eta) \dots\dots\dots (8)$$

したがって、局所平衡領域では、レイノルズ応力と乱れエネルギーの間には次のような比例関係が成り立つ。

$$\frac{-\overline{u'w'}}{k_+} = \sqrt{C_\mu} \dots\dots\dots (9)$$

外層に対する厳密な理論的取り扱いには困難であることから、ここで式 (2) の第 3 式 ( $\varepsilon$ -方程式) を基礎方程式系から除外し、その代わりに平均流速分布  $U_+$  に対して log-wake 則を用いることとする。log-wake 則は、外層の平均流速分布を記述するために log 則を修正したものである。クロージャーモデルとしての  $\varepsilon$ -方程式の信頼性と log-wake 則の信頼性の間には、それほどの違いはないと考えられるため、このような取り扱いは物理的に妥当であると思われる。

本研究では、wake 関数として、最も一般的な Coles (1956) 型のものを採用する。したがって、平均流速の鉛直シアは次のように与えられる。

$$\frac{dU_+}{d\eta} = -\frac{1}{\kappa\eta} \{1 + a\eta \sin \pi\eta\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、右辺括弧内の第 2 項が wake 項であり、 $a$  はパラメータである。局所平衡領域での乱れエネルギーの分布は、式 (8) で与えられる。よって、式 (8) と (10) を式 (2) の第 1 式に代入することにより、エネルギー散逸率が次式のように求められる。

$$\varepsilon_+ = \frac{1}{\kappa\eta} (1 - \eta) \{1 + a\eta \sin \pi\eta\} \dots\dots\dots (11)$$

また、式 (8) と (11) より、渦動粘性係数は次式のように表わされる。

$$\nu_{t+} = \frac{\kappa\eta(1-\eta)}{\{1 + a\eta \sin \pi\eta\}} \dots\dots\dots (12)$$

次に、鉛直方向の乱れエネルギーフラックス  $F_+$  の理論式を導出する (ここで  $F_+ = F/u_*^3$ )。我々が通常測定できるフラックス  $F_+$  は変動流速の 3 重相関であるが、 $k$ - $\varepsilon$  モデルで算定するフラックスは圧力動揺の寄与まで含めた以下のようなトータルフラックス  $q_+$  である。

表-1  $k$ - $\epsilon$  モデルによる理論式 ( $-h < z < 0$ )

|                                                                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| レイノルズ応力:                                                                                                                                                                                                      |
| $-\overline{u'w'} = u_*^2 \left(1 + \frac{z}{h}\right)$                                                                                                                                                       |
| 乱れエネルギー:                                                                                                                                                                                                      |
| $k = \frac{u_*^3}{\sqrt{C_\mu}} \left(1 + \frac{z}{h}\right)$                                                                                                                                                 |
| エネルギー散逸率:                                                                                                                                                                                                     |
| $\epsilon = \frac{u_*^3}{\kappa h} \left(-\frac{z}{h}\right)^{-1} \left(1 + \frac{z}{h}\right) \left\{1 + a \left(-\frac{z}{h}\right) \sin\left(-\frac{\pi z}{h}\right)\right\}$                              |
| 乱れエネルギーフラックス:                                                                                                                                                                                                 |
| $F = -\frac{\kappa u_*^3}{\sigma_k \sqrt{C_\mu} (1 + \gamma_p)} \left(-\frac{z}{h}\right) \left(1 + \frac{z}{h}\right) \left\{1 + a \left(-\frac{z}{h}\right) \sin\left(-\frac{\pi z}{h}\right)\right\}^{-1}$ |
| 渦動粘性係数:                                                                                                                                                                                                       |
| $\nu_t = \kappa u_* h \left(-\frac{z}{h}\right) \left(1 + \frac{z}{h}\right) \left\{1 + a \left(-\frac{z}{h}\right) \sin\left(-\frac{\pi z}{h}\right)\right\}^{-1}$                                           |

$$\left. \begin{aligned} q_+ &= \frac{1}{2} \overline{(u'^2 + v'^2 + w'^2) w'_+} + \frac{1}{\rho} \overline{p' w'_+} \\ &= \frac{\nu_{t+}}{\sigma_k} \frac{dk_+}{d\eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

今、圧力動揺項が3重相関項に比例すると仮定し、その比例定数を  $\gamma_p$  で表わすことにする。その場合、3重相関による乱れエネルギーフラックス  $F_+$  と圧力動揺によるフラックス  $P_+$  のクロージャーモデルはそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F_+ &= \frac{1}{2} \overline{(u'^2 + v'^2 + w'^2) w'_+} = \frac{1}{1 + \gamma_p} q_+ = \frac{1}{(1 + \gamma_p)} \frac{\nu_{t+}}{\sigma_k} \frac{dk_+}{d\eta} \\ P_+ &= \frac{1}{\rho} \overline{p' w'_+} = \frac{\gamma_p}{1 + \gamma_p} q_+ = \frac{\gamma_p}{(1 + \gamma_p)} \frac{\nu_{t+}}{\sigma_k} \frac{dk_+}{d\eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

したがって、式 (14) の第1式に既に得られている乱流特性量の理論式を代入すると、乱れエネルギーフラックス  $F_+$  が次式のように得られる。

$$F_+ = -\frac{1}{\sigma_k \sqrt{C_\mu} (1 + \gamma_p)} \frac{\kappa \eta (1 - \eta)}{\{1 + a \eta \sin \pi \eta\}} \dots\dots\dots (15)$$

ただし、 $F_+$  は鉛直上向きの輸送に対して正をとることに注意する。

外層を含む局所平衡領域における理論式は、表-1 にまとめられている。ここで、 $u_*$  は水側の摩擦速度であり、これらの式の適用範囲が  $-h < z < 0$  であることに注意する。理論式に含まれる  $a$  や  $\gamma_p$  のパラメータならびに種々のモデル定数の値については、実験値に最も良く適合するように決定されなければならない。これらの値に関する議論は次節において行う。

### 3. 解析結果と実験結果の比較

前節で得られた解析結果と杉原他 (1999) の実験結果を比較しよう。標準型の  $k$ - $\epsilon$  モデルは乱れエネルギースペクトルの  $-5/3$  乗則に基づいている。風波乱流場では、風波スペクトルピークの低周波側に慣性小領域が現われ

表-2 実験条件

|       | $U_r$ (m/s) | $u_{*a}$ (cm/s) | $f_p$ (Hz) | $\sigma_p$ (1/s) |
|-------|-------------|-----------------|------------|------------------|
| Run 1 | 5.00        | 25.9            | 3.49       | 21.9             |
| Run 2 | 7.50        | 32.1            | 2.61       | 16.4             |
| Run 3 | 10.0        | 60.3            | 2.20       | 13.8             |

るため、 $k$ - $\epsilon$  モデルの理論解は変動流速の低周波成分の統計量に対して有効である。したがって、以下の比較では低周波成分から計算された乱流特性量のみを対象とする。表-2 に杉原他の実験条件を示す。ここで、 $U_r$  は基準風速、 $u_{*a}$  は気流側の摩擦速度、 $f_p$  および  $\sigma_p$  はそれぞれ風波のピーク周波数およびその角周波数を示す。

境界層厚さ  $h$  は、レイノルズ応力と乱れエネルギーの実験値に式 (2) の第1式と式 (8) の理論式を適合させることによって算定できる。図-2(a), (b) は、それぞれレイノルズ応力と乱れエネルギーの鉛直分布と理論式との適合性を示したものである。これらの分布は、比較的広い範囲に渡って直線式で近似できることがわかる。それぞれの乱流特性量が0となる深さ  $h$  の値は20 cm であり、全てのケースにおいて一定とみなせる。

式 (9) は、局所平衡領域ではレイノルズ応力と乱れエネルギーが比例関係にあることを示している。また、その比例係数から  $k$ - $\epsilon$  モデルのモデル定数  $C_\mu$  の値を推定できる。図-3 は、レイノルズ応力と乱れエネルギーの関係をプロットしたものである。この図より、両者は比例関係にあり、式 (9) が妥当であることがわかる。また、実験値より推定された  $C_\mu$  の値は0.14 であり、標準値である0.09 よりも大きいが比較的近い値となっている。以下、本研究の比較においては、 $C_\mu = 0.14$  を採用する。

式 (6) の慣性底層の相似解では、その領域内でレイノルズ応力と乱れエネルギーが鉛直方向に一定となっている。その妥当性を検証するために、水表面近傍を拡大したレイノルズ応力と乱れエネルギーの鉛直分布を図-4(a), (b) に示す。水表面近くの狭い範囲では、近似的に乱流特性量の値が一定とみなせる領域が存在しており、このことは相似解の妥当性を示唆している。また、乱流特性量が一定となる深さは、風速の増加とともに拡大することがわかる。

図-5(a)~(c) は、それぞれレイノルズ応力、乱れエネルギー、乱れエネルギーフラックスに対して、局所平衡の仮定から求めた理論式と実験値の適合性を示したものである。縦軸の規格化には、先に推定した  $h$  を用いている。また、 $\eta = 0$  においてレイノルズ応力と乱れエネルギーが1になるように規格化されている。これは、乱流特性量を規格化する摩擦速度の値として、図-2の直線を  $z=0$  まで外挿し、水表面位置での仮想的なせん断応力

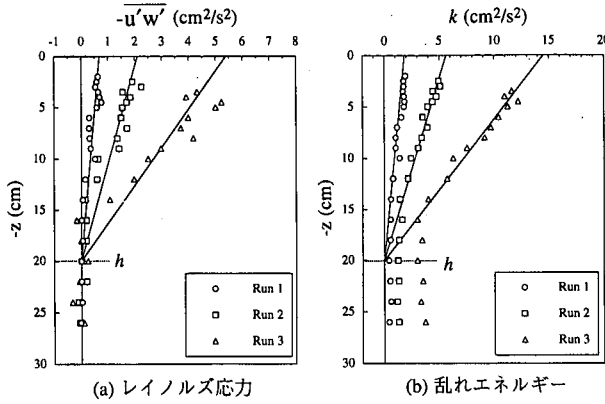


図-2 境界層厚の推定

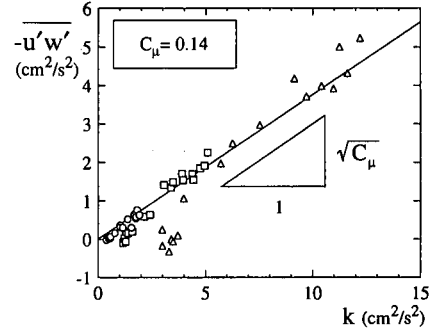


図-3 レイノルズ応力と乱れエネルギーの関係

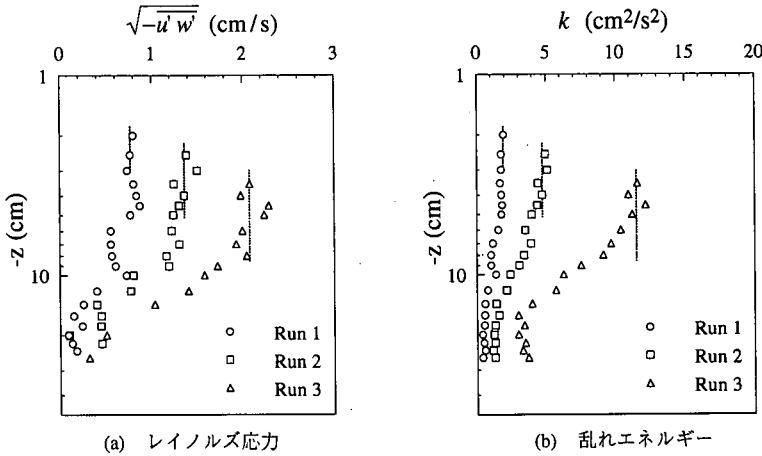


図-4 水表面近傍を拡大した乱流特性量の鉛直分布

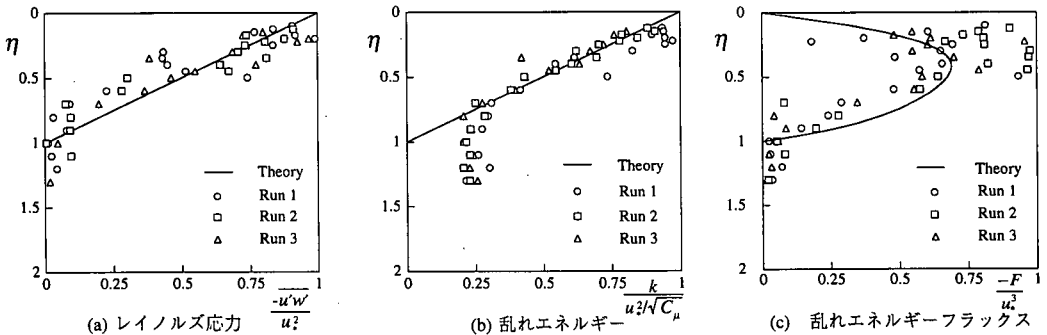


図-5 理論値と実験値の適合性

から算定したものをを用いているためである。レイノルズ応力については、ほぼ全領域で理論値と実験値はよく一致している。また、乱れエネルギーについても、 $\eta$ が0.7程度までは理論値は実験値とよく適合している。 $\eta > 0.7$ における不一致は、この領域では乱れの拡散が効いてく

るため、局所平衡の仮定が破綻するためと考えられる。乱れエネルギーフラックスの比較を行うためには、式(15)に含まれる $\sigma_k$ 、 $a$ 、 $\gamma_p$ の値を決定しなければならない。本研究では、 $\sigma_k$ の値として標準値である $\sigma_k=1.0$ を用いた。また、 $a$ の値については、他の乱流場に関する

ものであるが、従来の実験データから乱流が十分に発達している場合には0.628になることがわかっている。本研究でも、便宜的にこの値を採用した。これらの値のもとで、理論式と実験値が最も適合するように $\gamma_p$ を決定した。その最適値は全てのケースにおいて、ほぼ $\gamma_p = -0.7$ であった。乱れエネルギーフラックスについても、理論式と実験値は近似的に一致しており、このことはlog-wake則に基づいた本研究での取り扱いが妥当であることを示している。

#### 4. おわりに

風波下の乱流境界層の構造を、 $k-\varepsilon$ 乱流モデルを用いて解析した。モデル方程式を厳密に満たす、慣性底層( $\eta \ll 1$ )での乱流特性量の相似解を求めた。さらに、局所平衡の仮定に基づいて外層でも近似的に適用可能な、レイノルズ応力、乱れエネルギー、エネルギー散逸率、乱れエネルギーフラックス、渦動粘性係数の理論式を導出した。これらの理論式は、風波乱流場においては低周波の乱れ成分の統計量に対して有効であり、厳密解ではないが $\eta \ll 1$ において相似解に一致する。得られた解析結

果は、風波乱流場の実験結果と比較され、その妥当性が検証された。

最後に、本研究の一部は、平成12年度の文部省科学研究費補助金(奨励研究(A) 代表者: 杉原裕司, 基盤研究(A) 代表者: 角野昇八および基盤研究(A) 代表者: 増田章)の援助の下で行われたことを付記し謝意を表します。

#### 参考文献

- 杉原裕司・高崎敦彦・松永信博 (1999): 風波下における乱流境界層の構造, 海岸工学論文集, 第46巻, pp. 96-100.
- Coles, D. (1956): The law of the wake in the turbulent boundary layer, J. Fluid Mech., Vol. 1, pp. 191-226.
- Mitsuyasu, H. and Kusaba, T. (1985): Wind waves and wind-generated turbulence in the water, The Ocean Surface, ed. by Y. Toba and H. Mitsuyasu, D. Reidel, pp. 389-394.
- Toba, Y. and Kawamura, H. (1996): Wind-wave coupled downward-bursting boundary layer (DBBL) beneath the sea surface, J. Oceanogr., Vol. 52, pp. 409-419.
- Yoshikawa, I., H. Kawamura, K. Okuda and Y. Toba (1988): Turbulent structure in water under laboratory wind waves, J. Oceanogr. Soc. Japan, Vol. 44, pp. 143-156.