

新たな位相平均モデルによる変調不安定解析

Karthigesu Raveenthiran*・灘 岡 和 夫**

1. はじめに

最近の水の波に関する非線形分散波動理論の発展はめざましく、それらは大きく、Madsen ら (1991) によってはじめられた Boussinesq 方程式の適用領域を拡張しようとする試み (Madsen and Sørensen, 1992; Nwogu, 1993; Beji and Nadaoka, 1996; etc.) と、灘岡・中川 (1991, 1993) によって提唱された多成分連成法に基づくさまざまな波動モデル開発の試み (Nadaoka *et al.*, 1994, 1997; 磯部, 1994 a, 1994 b; 後野, 1993, 1994; Kennedy and Fenton, 1996, etc.) に分けることができる。このうち後者は、深海波を含む任意水深領域に適用可能というという著しい特長を有している。

これらのモデルはいずれも、いわゆる位相分解型モデルとして位置付けられるが、これに対して、最近、浅水域での波群の時空間発展とそれに伴う長周期成分の生成・伝播を直接表現できる位相平均型モデルを、位相分解型モデル (Boussinesq 方程式) をベースとする形で導出する試みも行われている (灘岡・Raveenthiran, 1998)。

本研究は、任意水深での波群の時空間発展解析を行うために、灘岡らの位相分解型波動モデルをベースとした位相平均モデルを導き、それを一様波列の変調不安定解析に応用することを試みたものである。

水路実験において波列の一様性を維持することが困難なことはよく経験される事実である (例えば, Russell and Osorio, 1957)。この現象は、Benjamin and Feir (1967) による先駆的な研究によって理論的に説明され、彼らは、Stokes 波列が側帯擾乱に対して不安定であることを見出した。Lighthill (1978) は、この側帯不安定 (変調不安定) に対する物理的な説明を与えている。Benjamin and Feir (1967) や Lake and Yuen (1977) らは、変調不安定現象に関する室内実験を行い、非線形 Schrödinger 方程式 (NLS 方程式) による理論値と比較している。

本論文では、まず、灘岡らによる位相分解型の波動モデルに基づいて位相平均型モデルを導出したのち、それ

に基づいて、変調不安定解析を行った結果を示す。そして、既存の NLS 方程式による解析結果と比較するとともに、側帯成長率に関する既存の室内実験結果との比較において、本波動モデルの方がかなり実験値に近い結果を与えることを示す。

2. 位相平均モデルの導出

ここでは、一様波列の変調不安定に焦点を当てた解析を行うため、解析のベースとなる波動モデルとして、灘岡らのいくつかのバージョンの波動モデル (Nadaoka *et al.*; 1994, 1997) のうち、最もシンプルな 1 成分バージョンを用いた。この波動モデルは、任意水深の狭帯域波動場に対して適用でき、以下の方程式系で表される。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{C_p}{g} + \eta \right) \mathbf{u} \right] = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} C_p C_g \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + C_p^2 \nabla \left[g \eta + \eta \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + w^2) \right] \\ = \frac{C_p (C_p - C_g)}{k^2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_i) + \nabla \left[\frac{C_p (C_p - C_g)}{k^2} \right] (\nabla \cdot \mathbf{u}_i) \end{aligned} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 η は自由表面変位、 $\mathbf{u}(u, v)$ と w はそれぞれ静水位 $z=0$ での水平 2 次元流速ベクトルと鉛直流速成分、また、 C_p, C_g と k は、それぞれ、水深 h と卓越周波数 ω から線形分散関係式によって求まる位相速度、群速度および波数である。

この波動モデルをベースとし、一様水深の狭帯域波動場に対して多重スケール展開法 (例えば, Mei, 1992) を適用することにより、位相平均型のモデルを導出することを試みる。まず、独立変数 x と t に関して、つぎの多重スケール展開表示を導入する (ε は微小パラメータ)。

$$\left. \begin{aligned} x, \quad x_1 = \varepsilon x, \quad x_2 = \varepsilon^2 x, \dots \\ t, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

そして η と $\mathbf{u}$ に関して、次のべき乗展開式で表す。

$$\eta = \sum_{n=1} \varepsilon^n \eta_n, \quad \mathbf{u} = \sum_{n=1} \varepsilon^n \mathbf{u}_n \dots\dots\dots (4)$$

ここに、

$$(\eta_n, \mathbf{u}_n) = \text{functions of } (x, x_1, x_2, \dots; t, t_1, t_2, \dots) \dots\dots\dots (5)$$

* 東京工業大学大学院情報理工学研究所情報環境学専攻博士課程

** フェロー 工博 東京工業大学教授 大学院情報理工学研究所情報環境学専攻

である。高次オーダーでは、非線形強制項の効果により高調波成分が生成されることになるので、以下の展開表現を導入する。

$$\{\eta_n, u_n\} = \sum_{m=0}^n \frac{1}{2} \exp(im\theta) \{\eta_{nm}, u_{nm}\} + \dots \quad (6)$$

ここに、

$$\theta = kx - \omega t \quad (7)$$

は位相であり、*は前の項の複素共役項を表している。この η_{nm} と u_{nm} は、ゆっくり変化する独立変数に対する依存性を有していることから、以下の様にかける。

$$(\eta_{nm}, u_{nm}) = \text{functions of } (x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) \quad (8)$$

これらの表現式を式(1)と式(2)に代入すると、非線形性次数 n と調和次数 m の組み合わせごとに方程式が得られる。

まず、 $n=m=1$ の場合には、次式を得る。

$$u_{11} = \frac{g}{C_p} \eta_{11} = \frac{g}{C_p} A \quad (9)$$

$n=2, m=1$ の場合には、

$$\eta_{21} = \frac{C_p}{g} u_{21} - \frac{i}{kC_p} \left(\frac{\partial A}{\partial t_1} + C_p \frac{\partial A}{\partial x_1} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + C_p \frac{\partial A}{\partial x_1} = 0 \quad (11)$$

を得る。 $A(x_1 - C_p t_1)$ が式(11)の解であることは簡単に確かめられるが、これは、搬送波の包絡線が波形を変えずに群速度で伝播することを示している。

$n=m=2$ の場合には、次式が得られる。

$$\eta_{22} = \frac{gA^2}{4C_p(C_p - C_g)} (3 - 2C_g/C_p - k^2 C_p^2/g^2) \quad (12)$$

$$u_{22} = \frac{g^2 A^2 (1 - k^2 C_p^2/g^2)}{4C_p^2(C_p - C_g)} \quad (13)$$

さらに、 $n=3, m=0$ の場合、以下の関係式を得る。

$$\frac{\partial \eta_{20}}{\partial t_1} + \frac{C_p^2}{g} \frac{\partial u_{20}}{\partial x_1} + \frac{g}{2C_p} \frac{\partial |A|^2}{\partial x_1} = 0 \quad (14)$$

$$C_p C_g \frac{\partial u_{20}}{\partial t_1} + g C_p^2 \frac{\partial \eta_{20}}{\partial x_1} - \frac{g^2}{4} (3k^2 C_p^2/g^2 - 1) \frac{\partial |A|^2}{\partial x_1} = 0 \quad (15)$$

上式は搬送波の変調による長周期波の生成を表している。

また、 $n=3, m=1$ の方程式から、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta_{31}}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial \eta_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A}{\partial t_2} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_2} + \frac{iC_g}{2k} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \\ & + \frac{i}{2kC_p} \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} - \frac{i(C_p - 2C_g)}{kC_p} \frac{\partial^2 A}{\partial t_1 \partial x_1} \\ & + \frac{ik}{2} \left(\frac{g}{C_p} \eta_{20} + u_{20} \right) A + \frac{ik}{4} \left(\frac{g}{C_p} \eta_{22} + u_{22} \right) A^* \\ & - \frac{ik}{2} (3k^2 C_p^2/g^2 - 1) \left(u_{20} A + \frac{u_{22}}{2} A^* \right) = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

上式と式(11)を比較することにより、上式は以下のよう分割した形で書くことができる。

$$\frac{\partial \eta_{21}}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial \eta_{21}}{\partial x_1} = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t_2} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_2} + \frac{iC_g}{2k} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{i}{2kC_p} \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} \\ & - \frac{i(C_p - 2C_g)}{kC_p} \frac{\partial^2 A}{\partial t_1 \partial x_1} \\ & + \frac{ik}{2} \left(\frac{g}{C_p} \eta_{20} + u_{20} \right) A + \frac{ik}{4} \left(\frac{g}{C_p} \eta_{22} + u_{22} \right) A^* \\ & - \frac{ik}{2} (3k^2 C_p^2/g^2 - 1) \left(u_{20} A + \frac{u_{22}}{2} A^* \right) = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

式(11)から得られる

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} = C_g^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial t_1 \partial x_1} = -C_g \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \quad (19)$$

の関係式を用いることにより、式(18)はつぎのように表される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t_2} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_2} + \frac{3iC_g}{2kC_p} (C_p - C_g) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \\ & + \frac{ik}{2} \left(\frac{g}{C_p} \eta_{20} + u_{20} \right) A + \frac{ik}{4} \left(\frac{g}{C_p} \eta_{22} + u_{22} \right) A^* \\ & - \frac{ik}{2} (3k^2 C_p^2/g^2 - 1) \left(u_{20} A + \frac{u_{22}}{2} A^* \right) = 0 \quad (20) \end{aligned}$$

これに式(11)を加え、 A を1次の変数の関数として考えることにより、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_1} + i\varepsilon \left[\frac{3C_g}{2kC_p} (C_p - C_g) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \right. \\ & + \frac{k}{2} \left(\frac{g}{C_p} \eta_{20} + u_{20} \right) A + \frac{k}{4} \left(\frac{g}{C_p} \eta_{22} + u_{22} \right) A^* \\ & \left. - \frac{k}{2} (3k^2 C_p^2/g^2 - 1) \left(u_{20} A + \frac{u_{22}}{2} A^* \right) \right] = 0 \quad (21) \end{aligned}$$

一方向伝播の場合にはさらに方程式の簡略化が可能になる。まず、独立変数に関する以下の変換を行う。

$$\xi = x_1 - C_g t_1, \quad \tau = \varepsilon t_1 \quad (22)$$

これからまず、式(14)と式(15)より、以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} u_{20} &= \frac{g^2 C_g}{4C_p(C_p^2 - C_g^2)} (3k^2 C_p^2/g^2 - 1 - 2C_p/C_g) |A|^2 \\ &+ O(\varepsilon) \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{20} &= \frac{gC_p}{4(C_p^2 - C_g^2)} (3k^2 C_p^2/g^2 - 1 - 2C_g^2/C_p^2) |A|^2 \\ &+ O(\varepsilon) \quad (24) \end{aligned}$$

この関係式と式(12)、(13)を式(21)に代入することにより

$$-i \frac{\partial A}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \beta |A|^2 A = 0 \quad (25)$$

を得る。ここに、

$$\alpha = \frac{3C_g}{2kC_p}(C_p - C_g) \dots\dots\dots (26a)$$

$$\begin{aligned} \beta = & \frac{g^2 k}{8(C_p^3 - C_g^3)} [(3k^2 C_p^4 / g^2 - 1 - 2C_g^2 / C_p^2) \\ & + \frac{C_g}{C_p} (3k^2 C_p^4 / g^2 - 1 - 2C_p / C_g)] \\ & + \frac{g^2 k (2 - C_g / C_p - k^2 C_p^4 / g^2)}{8C_p^2 (C_p - C_g)} \\ & - \frac{g^2 k (3k^2 C_p^4 / g^2 - 1)}{16C_p^2 (C_p^3 - C_g^3)} \\ & \cdot [2C_p C_g (3k^2 C_p^4 / g^2 - 1 - 2C_p / C_g) \\ & + (C_p^2 + C_p C_g + C_g^2) (1 - k^2 C_p^4 / g^2)] \dots\dots\dots (26b) \end{aligned}$$

上式は、式形としては非線形 Schrödinger 方程式 (NLS 方程式) とほぼ同型であるが、式中のパラメータ表現が異なっている。このうち、式 (26a) で表されるパラメータ α は、NLS 方程式と同様に、群速度の波数による変化率を用いて表されるものであるが、本モデルで基礎としている 1 成分バージョンの波動方程式 (式 (1), (2)) では、深海波領域でこの値の表現精度が悪くなるので、ここでは、線形分散関係の理論式により得られる表現式に置き換えて以下では議論するものとする。

3. 変調不安定解析

式 (25) は、次式で表される一様 Stokes 波解をもつ。

$$A(\tau) = a_0 \exp(-i\beta a_0^2 \tau) \dots\dots\dots (27)$$

ここで、この一様 Stokes 波解の安定性について調べてみる。まず、包絡線関数 A を次のように表す。

$$A(\xi, \tau) = a(\xi, \tau) \exp[i\chi(\xi, \tau)] \dots\dots\dots (28)$$

これから、実部と虚部を分けて表すことにより、次の関係式を得る。

$$a \frac{\partial \chi}{\partial \tau} + a \left[\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - a \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right)^2 \right] + \beta a^3 = 0 \dots\dots\dots (29a)$$

$$-\frac{\partial a}{\partial \tau} + a \left(2 \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial a}{\partial \xi} + a \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} \right) = 0 \dots\dots\dots (29b)$$

つぎに、振幅関数 a と位相関数 χ に関して次のように擾乱成分を与える。

$$a(\xi, \tau) = a_0 + a_1(\xi, \tau) \quad \text{with} \quad a_1 \ll a_0 \dots\dots\dots (30a)$$

$$\begin{aligned} \chi(\xi, \tau) &= \chi_0(\tau) + \chi_1(\xi, \tau) \quad \text{with} \quad \chi_1 \ll \chi_0 \\ \text{and} \quad \chi_0(\tau) &= -\beta a_0^2 \tau \dots\dots\dots (30b) \end{aligned}$$

上式を式 (29) に代入し擾乱成分に関する線形化を行うと、以下の関係式を得る。

$$a_0 \frac{\partial \chi_1}{\partial \tau} + a \frac{\partial^2 a_1}{\partial \xi^2} + 2\beta a_0^2 a_1 = 0 \dots\dots\dots (31a)$$

$$-\frac{\partial a_1}{\partial \tau} + a a_0 \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \xi^2} = 0 \dots\dots\dots (31b)$$

周波数の微小変化の効果は、長いスケールの変調をもた

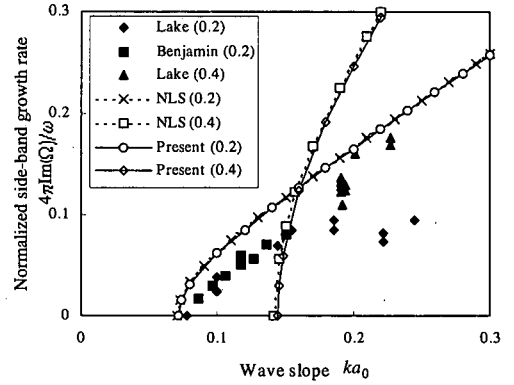


図-1 一様波列の変調不安定の側帯成長率に関する実験データと本モデル(改良前)および非線形 Schrödinger 方程式による計算値との比較(凡例中の 0.2 と 0.4 は変調波の波数)。

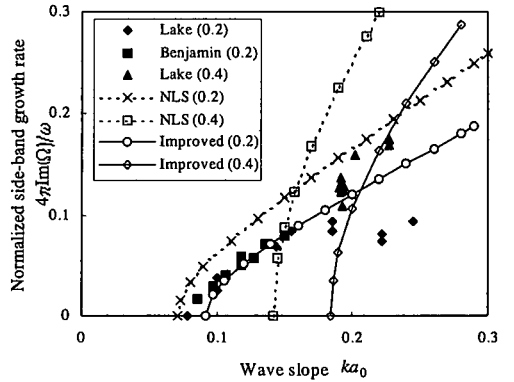


図-2 一様波列の変調不安定の側帯成長率に関する実験データと本モデル(改良後)および非線形 Schrödinger 方程式による計算値との比較(凡例中の 0.2 と 0.4 は変調波の波数)。

らすことから、擾乱成分として以下の形の関数形を仮定する。

$$(a_1, \chi_1) = (\bar{a}, \bar{\chi}) \exp[i(K\xi - \Omega\tau)] \dots\dots\dots (32)$$

ここで、 K と Ω は、側帯変調の波数と周波数である。上式を式 (31) に代入すると、 $\bar{a}$ と $\bar{\chi}$ が trivial でない解を持つための条件式として、 K と Ω に関する以下の分散関係式が得られる。

$$\Omega^2 = K^2(a^2 K^2 - 2\alpha\beta a_0^2) \dots\dots\dots (33)$$

これから、 $\alpha\beta < 0$ の場合には、側帯擾乱は発達せず、中立状態となる。これに対して、 $\alpha\beta > 0$ で(深海波ではこの条件は常に満たされる)、さらに以下の条件を満たす場合には、側帯擾乱は時間とともに指数間数的に発達する不安定状態となる。

$$K^2 < \frac{2\beta a_0^2}{\alpha} \dots\dots\dots (34)$$

このとき、側帯擾乱の発達率 a_{1r}/a_1 は、次式で表される $\text{Im}(\Omega)$ によって与えられる。

$$\text{Im}(\Omega) = K(2\alpha\beta a_0^2 - \alpha^2 K^2)^{1/2} \dots\dots\dots (35)$$

これから、最大発達率は、

$$\text{Im}(\Omega)_{\max} = |\beta| a_0^2 \quad \text{at } K^2 = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| a_0^2 \dots\dots\dots (36)$$

となる。

以下では、深海波の場合について議論する。深海波の場合の α と β の表現を式(35)に代入することにより、無次元発達率 $\text{Im}(\Omega)/\omega$ と無次元側帯波数 K/k の関係を示す次式を得る。

$$\frac{\text{Im}(\Omega)}{\omega} = \frac{K}{k} \left[\frac{27}{224} (ka_0)^2 - \frac{1}{64} \left(\frac{K}{k} \right)^2 \right]^{1/2} \dots\dots\dots (37)$$

図-1 は、上式で計算される無次元発達率を、室内実験の結果および非線形 Schrödinger 方程式による値と比較する形で示したものである。図の横軸は搬送波の波形勾配である。これから、本モデルの結果は、既存の NLS による計算結果とほぼ同じ値を与えるものの、室内実験結果に対しては、やや乖離が見られることがわかる。

そこで、さらに、本モデルの理論展開の基礎とした 1 成分波動方程式 (式(1), (2)) 自体の非線形性を向上させることによって、モデルの改良を試みた。すなわち、非線形性のオーダーにおいて NLS が 3 次のオーダーであるのに対して、本モデルの基礎としている 1 成分波動方程式がそれ以下のオーダーになっていることから、方程式自体の再展開によって非線形性のオーダーを 3 次のオーダーまで引き上げ、以下に示す方程式系を導いた後、あらためて位相平均モデルの導出を行った。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{C_p^2}{g} + \eta + \frac{k^2 C_p^2}{2g} \eta^2 \right) \mathbf{u} \right] = 0, \dots\dots\dots (38)$$

$$\begin{aligned} & C_p C_\theta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + C_p^2 \nabla \cdot \left[g \eta + \eta \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial z \partial t} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + w^2) + \eta \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + w \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \right) \right] \\ & = \frac{C_p(C_p - C_\theta)}{k^2} \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}_t) \\ & \quad + \nabla \cdot \left[\frac{C_p(C_p - C_\theta)}{k^2} \right] (\nabla \cdot \mathbf{u}_t) \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

これによって、上式中のパラメータ β' の表現が以下のようになるとなる。

$$\beta' = \beta - \frac{3}{16} k^2 C_p. \dots\dots\dots (40)$$

ここではこの詳細な導出過程に関する記述は、先に示したものとほぼ同様であるので省略するが、図-1 と同様の比較を行った結果を図-2 に示す。これから、改良した

位相平均モデルによる発達率は、NLS 方程式によるものと比べて、かなり実験値に近い値を与えていることがわかる。

4. おわりに

灘岡らの 1 成分波動モデルをさらに非線形性を向上させた形に再展開した後、それをベースとして多重スケール展開法により位相平均モデルを導出した。一様波列の変調不安定に関する既存実験データと比較することにより、本モデルの方が、非線形 Schrödinger 方程式に比べてかなり実験値に近い結果を与えることを示した。

参考文献

- 磯部雅彦(1994a): 波浪解析のための波動方程式の比較研究, 土木学会論文集, No. 479/II-27, pp. 1-14.
- 磯部雅彦(1994b): 非線形緩勾配波動方程式の提案, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp. 1-5.
- 灘岡和夫・中川康之(1991): Galerkin 法に基づく強分散性波動方程式の導出と背景について, 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 44, pp. 63-75.
- 灘岡和夫・中川康之(1993): 不規則波動シミュレーションのための強分散性波動方程式の導出とその基本特性の検討, 土木学会論文集, No. 467/II-23, pp. 83-92.
- 灘岡和夫・K. Raveenthiran(1998): 位相平均型 Boussinesq モデルの開発と長周期波生成・伝播計算への応用, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp. 16-20.
- 後野正雄(1993): 緩勾配地形上の線形不規則波動場の支配方程式とその特性, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp. 21-25.
- 後野正雄(1994): 強非線形不規則波動場に対する連成振動方程式とその基本特性, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp. 16-20.
- Beji, S. and K. Nadaoka (1996): A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth, *Ocean Eng.*, Vol. 23, No. 8, pp. 691-704.
- Benjamin, T. B. and J. E. Feir (1967): The disintegration of wave trains on deep water, *J. Fluid Mech.* 27, pp. 417-430.
- Bird, C. C. and D. H. Peregrine (1997): Wave groups from deep to shallow water, *Proc. Coastal Dynamics*, pp. 1013-1022.
- Davey, A. and K. Stewartson (1974): On three-dimensional packets of surface waves, *Proc. R. Soc. Lond. A* 338, pp. 101-110.
- Dingemans, M. W. (1997): *Water wave propagation over uneven bottoms*, p. 967. Singapore: World Scientific.
- Feir, J. E. (1967): Some results from wave pulse experiments. Discussion of M. J. Lighthill: Some special cases treated by the Whitham theory, *Proc. R. Soc. Lond. A* 299, pp. 54-58.
- Hashimoto, H. and H. Ono (1972): Nonlinear modulation of gravity waves, *J. Phys. Soc. Japan* 33, pp. 805-811.
- Kennedy, A. B. and J. D. Fenton (1996): A fully nonlinear 3 D method for the computation of wave propagation, *Proc. 25th Int. Conf. on Coastal Eng.*, ASCE, pp. 1102-1115.
- Lake, B. M. and H. C. Yuen (1977): A note on some nonlinear water wave experiments and comparisons of data with theory, *J. Fluid Mech.* 83, pp. 75-81.
- Lighthill, M. J. (1978): *Waves in Fluids*, Cambridge University Press, London.
- Madsen, P. A., Murray, R. and O. R. Sørensen (1991): A new form of the Boussinesq equations with improved linear

- p>dispersion characteristics, Coastal Eng., Vol. 15, pp. 371-388.
- Madsen, P. A., and O. R. Sørensen (1992): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Part 2. A slowly-varying bathymetry, Coastal Eng., Vol.18, pp. 183-204.
- Mei, C. C. (1992): *The applied dynamics of ocean surface waves*, 2nd edn, p. 740. Singapore: World Scientific.
- Nadaoka, K., S. Beji and Y. Nakagawa (1994): A fully-dispersive nonlinear wave model and its numerical solutions, *Proc. 24th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE*, pp. 427-441.
- Nadaoka, K., S. Beji and Y. Nakagawa (1997): A fully dispersive weakly nonlinear model for water waves. *Proc. R. Soc. Lond. A* **453**, pp. 303-318.
- Nwogu, O. (1993): Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE, Vol. 119, No. 6, pp. 618-638.
- Russell, R. C. H. and J. D. C. Osorio (1957): An experimental invention of drift profiles in a closed channel. *Proc. 6th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE*, Florida, USA, pp. 171-193.
-