

# 非線形緩勾配方程式の内部波への拡張

柿 沼 太 郎\*

## 1. 序 論

密度成層が発達した沿岸域では、内部潮汐波や内部セイシュのような長周期内部波とともに、境界面の不安定性や海底地形の空間的な変化等が起因とされる短周期内部波が観測されている (Roberts, 1975; 柳ら, 1993; etc.). また、数値計算において喜岡ら (1998) は、波の弱非線形性を考慮することにより、波群から拘束波や自由波として発生する、数分程度の周期の内部波を再現している。こうした様々な周期の内部波が表面波と相互干渉しながら伝播するとき、表面波と内部波の両者が互いに、または、それぞれが独立に、広い周波数帯域にわたる成分波間でエネルギー交換を行なうであろう。更に、これらが浅海域に達すると、表面波・内部波ともに非線形性が強くなるであろう。

そこで、本研究では、非線形緩勾配方程式を表面波と内部波が共存する波・流れ場の支配方程式へと拡張し、表面波及び内部波の強非線形性・強分散性が考慮可能な数値解析手法を開発する。ここでは、磯部 (1994) のモデルを多層問題に拡張する。方程式系の導出において、各層の速度ポテンシャルを鉛直分布関数の級数に展開し、灘岡・中川 (1993) の連成振動の概念を適用して平面 2 次元の非線形方程式を求める。

そして、数値シミュレーションでは、内部波に対する海底地形の影響に着目し、潜堤上における内部波の分裂や浅水変形といった非線形性の強い現象を対象とする。

## 2. 基礎方程式と境界条件

### 2.1 非回転運動の基礎方程式

図-1 のように、密度の異なる互いに混合しない非粘性・非圧縮性流体が成層状態にあるとする。流体の種類を上から順に  $i=1, 2, \dots, I$  で表わし、各流体の密度を  $\rho_i$  とする。密度は各層において一定値をとり、上層から順に  $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_I$  であって、静水状態において各流体の占める水深が  $h_i(x)$  で安定していると仮定する。第  $i$  層の各点における流速の水平方向成分ベクトル及び鉛直

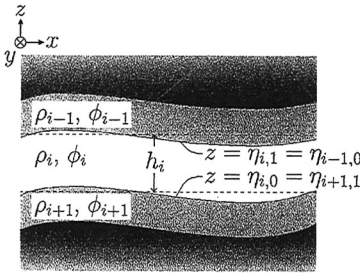


図-1 多層モデルにおける第  $i$  層

方向成分をそれぞれ  $u_i$  及び  $w_i$  で表わす。

流体運動が非回転であるとする。すると、次式で定義される速度ポテンシャル  $\phi_i$  が存在する。

$$u_i = \nabla \phi_i, \quad w_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  は水平方向の微分演算子である。このとき、各層において成り立つ非回転運動に対する連続方程式は、次式のような Laplace の方程式となる。

$$\nabla^2 \phi_i + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

また、非回転運動に対する Euler の運動方程式の空間に関する積分形を求めて、次式を得る。

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_i)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 + gz + \frac{p_i}{\rho_i} = C_i(t) \dots\dots\dots (3)$$

ここで  $g$  は重力加速度であり、質量力が重力のみであると仮定している。 $p_i$  は第  $i$  層の各点における圧力である。

境界面において摩擦力が働かないと仮定すると、式 (3) は、境界面を含む第  $i$  層の任意の点で任意の時刻に成り立つ。これは、非粘性・非圧縮性流体の、非回転運動に対する非定常の Bernoulli の式すなわち圧力方程式である。

ところで、式 (3) の積分定数  $C_i$  は、 $t$  のみの関数であり、各時刻において第  $i$  層内で一定である。この  $C_i$  を  $C_i = C_{i,1}(t) + C_{i,2}$  のように  $t$  に依存する項としない項に分離する。そして、 $\phi_i = \phi_i - \int C_{i,1}(t) dt$  とおき、式 (3) を次式のように変形する。

\* 学生会員 博(工) 東京大学大学院工学系研究科研究生  
社会基盤工学専攻

$$\left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi_i)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 - C_{i,1}(t) \right\} + gz + \frac{p_i}{\rho_i} \\ = \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi_i)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 \right\} + gz + \frac{p_i}{\rho_i} \\ = C_{i,2} \dots\dots\dots (4)$$

式(4)の $\phi_i$ 及び $C_{i,2}$ をそれぞれ改めて $\phi_i$ 及び $C_i$ と書き、次式を得る。

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi_i)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 + gz + \frac{p_i}{\rho_i} \\ = C_i \quad (C_i = \text{const.}) \dots\dots\dots (5)$$

式(5)の $C_i$ を定めるために、第 $i$ 層において静水状態が継続している場合を考える。簡単のために、最上面が $z=0$ の水平面であり、そこにおける圧力が0であると仮定する。このとき、 $z = -\sum_{k=1}^{i-1} h_k$ 上で $p_i = \sum_{k=1}^{i-1} \rho_k g h_k$ かつ $\nabla \phi_i = \partial \phi_i / \partial z = 0$ であるから、 $\partial \phi_i / \partial t = 0$ となるためには、 $C_i = \sum_{k=1}^{i-1} (\rho_k / \rho_i - 1) g h_k$ でなければならない。ここで、 $h_k$  ( $k=1, 2, \dots, i-1$ )は、水平方向の座標 $x=(x, y)$ によらない定数であるとする( $h_i$ は $x$ に依存しても構わない)。よって、式(5)が式(6)となる。

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi_i)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 + gz + \frac{p_i}{\rho_i} \\ + \sum_{k=1}^{i-1} \left( 1 - \frac{\rho_k}{\rho_i} \right) g h_k = 0 \dots\dots\dots (6)$$

例えば、最上面 $z=0$ の上に密度 $\rho_0$  ( $\rho_0 < \rho_1$ )の流体を静かに注ぐ場合、流体が静水状態を維持して運動しなくても $\phi_i$ は式(6)に従いながら時間とともに変化する。式(6)より第 $i$ 層の任意の点において次式が成り立つ。

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{\rho_0}{\rho_i} g h_0 = 0 \implies \phi_i = \phi_i|_{t=t_0} - \int_{t_0}^t \frac{\rho_0}{\rho_i} g h_0 dt \\ \dots\dots\dots (7)$$

ここで $h_0$ は $z=0$ の上に注いだ流体の水深である。これより、表面上に静かに流体を注いでもすなわち圧力を加えても、流体が運動しなければ、速度ポテンシャルの値がそれまでにあった全領域にわたって一様に減少することがわかる。式(5)の $C_i$ は、静水状態のまま放置された流体の物理量を時間的に変化させないための定数である。

## 2.2 運動学的境界条件

第 $i$ 層は、二つの境界面 $z = \eta_{i,j}(x, t)$  ( $j=0, 1$ )を有する。これらの境界面のうち下面及び上面の位置をそれぞれ $z = \eta_{i,0}$ 及び $z = \eta_{i,1}$ とする。 $z = \eta_{i,j}$ は、表面波形、内部波形または海底地形のいずれかを表わす。いま、境界面において渦の発生や砕波といった不安定現象が生じず、 $\eta_{i,0}$ 及び $\eta_{i,1}$ がともに $x$ の1価関数であるとする。第 $i$ 層の境界面における運動学的境界条件として次式を得る。

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial z} = \frac{\partial \eta_{i,j}}{\partial t} + \nabla \phi_i \cdot \nabla \eta_{i,j} \quad \text{at } z = \eta_{i,j} \quad (j=0, 1) \\ \dots\dots\dots (8)$$

## 2.3 力学的境界条件

ここでは、表面張力による効果を重力の効果に比べて無視する。境界面の各点の圧力は、各時刻においてただ一つの値を持つ。従って、次式が成り立つ。

$$p_i = p_{i-2j+1} \quad \text{at } z = \eta_{i,j} \quad (j=0, 1) \dots\dots\dots (9)$$

よって、式(6)より、第 $i$ 層の境界面における力学的境界条件として次式を得る。

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi_i)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 + g \eta_{i,j} + \frac{p_{i-2j+1}}{\rho_i} \\ + \sum_{k=1}^{i-1} \left( 1 - \frac{\rho_k}{\rho_i} \right) g h_k = 0 \quad \text{at } z = \eta_{i,j} \quad (j=0, 1) \\ \dots\dots\dots (10)$$

例えば、最上面が空気と接する場合、この自由表面において、次式の力学的境界条件が満たされる。

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi_1)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 + g \eta_{1,1} + \frac{p_0}{\rho_1} = 0 \\ \text{at } z = \eta_{1,1} \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $p_0$ は自由表面における大気圧である。この重力波の「自由」は、空気の密度 $\rho_0$ が無視でき( $\rho_0 \ll \rho_1$ )、かつ、摩擦がない場合でも、圧力 $p_0$ に依存することになる。

## 3. 内部波解析のための非線形方程式の導出

第 $i$ 層において成立する非線形緩勾配方程式を導く。

### 3.1 変分問題における作用の定義

第 $i$ 層の下面 $z = \eta_{i,0}$ における圧力を改めて $p_i(x, t)$ と定義する。いま、第 $i$ 層の下面位置 $\eta_{i,0}(x, t)$ と上面における圧力 $p_{i-1}(x, t)$ とがともに既知であると仮定する。すると、求める未知変数は、速度ポテンシャル $\phi_i(x, z, t)$ 及び上面の位置 $\eta_{i,1}(x, t)$ となる。このとき、第 $i$ 層における変分問題の作用 $S_i[\phi_i, \eta_{i,1}]$ を次式の汎関数とする。

$$S_i[\phi_i, \eta_{i,1}] = \int_{t_0}^t \int_A \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi_i)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 \right. \\ \left. + gz + \frac{p_{i-1} + P_i}{\rho_i} \right\} dz dA dt \dots\dots\dots (12)$$

式(12)は、Luke (1967)の非回転運動に対する汎関数に $\iiint (\rho_{i-1} + P_i) / \rho_i dz dA dt$ を加えた形をしている。平面 $A$ は、対象領域の $x-y$ 平面への正射影を表わす。 $A$ は時間に関して変化しないとする。また、 $P_i / \rho_i$ は、各層毎に定まる定数であり、 $P_i = \sum_{k=1}^{i-1} (\rho_i - \rho_k) g h_k$ である。

なお、 $\eta_{i,0}$ 及び $p_{i-1}$ が既知であると仮定しているから、運動に伴いこれらが時空間内で辿る経路が与えられている。従って、変分問題において、これらを実際の物理過程でとる値と異なる値にとりようがなく、 $\delta \eta_{i,0} \equiv 0$ かつ $\delta p_{i-1} \equiv 0$ である。よって、汎関数 $S_i$ の変関数としては、 $\phi_i$ 及び $\eta_{i,1}$ のみを考えればよい。

$S_i$ の第1変分 $\delta S_i$ を求める。

$$\begin{aligned}
\delta S_i = & - \int_{t_0}^{t_1} \iint_A \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} \left( \nabla^2 \phi_i + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} \right) \delta \phi_i dz dA dt \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \iint_A \left\{ \left( \frac{\partial \eta_{i,0}}{\partial t} + \nabla \eta_{i,0} \cdot \nabla \phi_i - \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) \delta \phi_i \right\}_{z=\eta_{i,0}} dA dt \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \iint_A \left\{ \left( \frac{\partial \eta_{i,1}}{\partial t} + \nabla \eta_{i,1} \cdot \nabla \phi_i - \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) \delta \phi_i \right\}_{z=\eta_{i,1}} dA dt \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \iint_A \left\{ \left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_i)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + g \eta_{i,1} + \frac{p_{i-1} + P_i}{\rho_i} \right] \delta \eta_{i,1} \right\}_{z=\eta_{i,1}} dA dt \\
& + \iint_A \left[ \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} \delta \phi_i dz \right]_{t_1}^{t_0} dA + \int_{t_0}^{t_1} \oint_C \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \delta \phi_i dz ds dt \\
& \dots\dots\dots (13)
\end{aligned}$$

ここで、閉曲線  $C$  は、平面  $A$  の周囲  $\partial A$  である。  $s$  及び  $n$  は、それぞれ、  $C$  の接線方向にとった軸及び法線方向外向きにとった軸である。

$S_i$  が実際に生じる物理過程であるとき、  $\delta S_i = 0$  となる。これを任意の微小量  $\delta \phi_i$  及び  $\delta \eta_{i,1}$  に対して成り立たせること、すなわち  $S_i$  に最小作用の原理を適用するという問題は、式 (13) より、先の連続方程式及び境界面における境界条件が支配する場の現象を適切な初期条件及び水平方向の境界条件のもとで解く問題と等価になる。

式 (12) は、第  $i$  層の下面位置  $\eta_{i,0}$  と上面における圧力  $p_{i-1}$  とがともに既知であるとしたときの汎関数である。ところで、この層の下面位置  $\eta_{i,0}$  も未知であるならば、 $\eta_{i,0}$  を汎関数の変関数と考えると、作用を  $S_i = S_i[\phi_i, \eta_{i,0}, \eta_{i,1}]$  としなければならない。この場合には、第  $i$  層の上・下面それぞれにおける圧力  $p_{i-1}$  及び  $p_i$  がともに既知であるとして、作用を次式のように定義する。

$$\begin{aligned}
S_i[\phi_i, \eta_{i,0}, \eta_{i,1}] \\
= \int_{t_0}^{t_1} \iint_A \left\{ \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} \left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_i)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 \right. \right. \\
\left. \left. + g z + \frac{P_i}{\rho_i} \right] dz + \frac{p_{i-1}}{\rho_i} \eta_{i,1} - \frac{p_i}{\rho_i} \eta_{i,0} \right\} dA dt \dots\dots (14)
\end{aligned}$$

また、 $\eta_{i,0}$  と  $\eta_{i,1}$  がともに既知である場合には、境界面における力学的境界条件が不要であり、第  $i$  層における作用を次式のような汎関数とすればよい。

$$\begin{aligned}
S_i[\phi_i] = \int_{t_0}^{t_1} \iint_A \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_i)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 \right. \\
\left. + g z + \frac{P_i}{\rho_i} \right\} dz dA dt \dots\dots\dots (15)
\end{aligned}$$

以上をまとめると、次のようになる。

- (a) 上面と下面の位置がともに既知であれば、それぞれにおける圧力は、ともに未知でも構わない。このとき、その層における  $S_i$  を式 (15) とする。
- (b) 上面と下面の位置がともに未知であれば、それぞれにおける圧力がともに既知でなければならない。このとき、その層における  $S_i$  を式 (14) とする。

- (c) 上面または下面の位置のいずれか一方が既知で他方が未知であれば、圧力は、上面または下面のいずれか一方において既知でなければならない、他方において未知でも構わない。このとき、その層における  $S_i$  を次式とする。

$$\begin{aligned}
S_i[\phi_i, \eta_{i,1-m}] = \int_{t_0}^{t_1} \iint_A \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_i)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 \right. \\
\left. + g z + \frac{p_{i-n} + P_i}{\rho_i} \right\} dz dA dt \dots\dots (16)
\end{aligned}$$

ここで、 $m$  及び  $n$  は、上・下面の位置やそれらにおける圧力を既知量として扱うか未知量として扱うかによって、0 か 1 のどちらかの値とする。すなわち、 $m$  は、第  $i$  層の下面位置  $\eta_{i,0}$  が既知なら 0、上面位置  $\eta_{i,1}$  が既知なら 1 とする。また、 $n$  は、 $z = \eta_{i,0}$  における圧力  $p_i$  が既知なら 0、 $z = \eta_{i,1}$  における圧力  $p_{i-1}$  が既知なら 1 とする。

### 3.2 鉛直分布関数の仮定

平面 2 次元の非線形方程式を求めるため、灘岡・中川 (1992) の連成振動の概念を適用し、鉛直方向の積分を解析的に行なう。その際、磯部 (1994) にならい、各層の速度ポテンシャル  $\phi_i$  を  $N$  個の関数の級数と仮定して次式によって表わす。

$$\begin{aligned}
\phi_i(x, z, t) = \sum_{a=1}^N Z_{i,a}(z; h_i(x)) f_{i,a}(x, t) \equiv Z_{i,a} f_{i,a} \\
\dots\dots\dots (17)
\end{aligned}$$

ここで、 $Z_{i,a}$  は静水状態における層厚  $h_i$  をパラメタとする鉛直分布関数であり、 $f_{i,a}$  はその重み係数である。

ここでは、(c) の場合、すなわち、上面か下面のいずれか一方の位置が既知である場合を対象とし、汎関数  $S_i$  を式 (16) で定義する。式 (17) を式 (16) に代入して  $z$  軸方向に積分すると、汎関数  $S_i[f_{i,1}, f_{i,2}, \dots, f_{i,N}; \eta_{i,1-m}] = S_i[f_i; \eta_{i,1-m}]$  が次式となる。ただし、略記法を用いて、 $f_{i,1}, f_{i,2}, \dots, f_{i,N}$  をまとめて  $f_i$  で表わす。

$$\begin{aligned}
S_i[f_i; \eta_{i,1-m}] = \int_{t_0}^{t_1} \iint_A \mathcal{L}_i[f_i; \eta_{i,1-m}] dA dt, \\
\mathcal{L}_i[f_i; \eta_{i,1-m}] \\
= \tilde{Z}_{i,\beta} \frac{\partial f_{i,\beta}}{\partial t} + \frac{g}{2} (\eta_{i,1}^2 - \eta_{i,0}^2) + \frac{p_{i-n} - P_i}{\rho_i} (\eta_{i,1} - \eta_{i,0}) \\
+ \frac{1}{2} A_{i,\gamma\beta} \nabla f_{i,\gamma} \nabla f_{i,\beta} + \frac{1}{2} B_{i,\gamma\beta} f_{i,\gamma} f_{i,\beta} \\
+ C_{i,\gamma\beta} f_{i,\gamma} \nabla f_{i,\beta} \nabla h_i + \frac{1}{2} D_{i,\gamma\beta} f_{i,\gamma} f_{i,\beta} (\nabla h_i)^2 \dots\dots (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_{i,a} = \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} Z_{i,a} dz, \quad A_{i,\alpha\beta} = \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} Z_{i,\alpha} Z_{i,\beta} dz, \\
B_{i,\alpha\beta} = \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} \frac{\partial Z_{i,\alpha}}{\partial z} \frac{\partial Z_{i,\beta}}{\partial z} dz, \quad C_{i,\alpha\beta} = \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} \frac{\partial Z_{i,\alpha}}{\partial h_i} Z_{i,\beta} dz, \\
D_{i,\alpha\beta} = \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} \frac{\partial Z_{i,\alpha}}{\partial h_i} \frac{\partial Z_{i,\beta}}{\partial h_i} dz \dots\dots\dots (19)
\end{aligned}$$

### 3.3 非線形緩勾配方程式の導出

$f_{i,\alpha}$  及び  $\eta_{i,1-m}$  に関する変分原理の Euler の方程式は、それぞれ次式より求まる。

$$[\mathcal{L}_i]_{f_{i,\alpha}} \equiv (\mathcal{L}_i)_{f_{i,\alpha}} - \nabla(\mathcal{L}_i)_{\nabla f_{i,\alpha}} - \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{L}_i)_{\frac{\partial f_{i,\alpha}}{\partial t}} = 0 \quad \cdots (20)$$

$$[\mathcal{L}_i]_{\eta_{i,1-m}} \equiv (\mathcal{L}_i)_{\eta_{i,1-m}} = 0 \quad \cdots (21)$$

ところで、静水状態における各境界面の空間勾配が緩やかである場合には、 $O((\nabla h_i)^2)$  及び  $O(\nabla^2 h_i)$  のオーダーが無視できる。このような緩勾配近似が成り立つと仮定すると、式 (20) 及び (21) より、内部波のための非線形緩勾配方程式が式 (22) 及び (23) のように得られる。

$$\begin{aligned} Z_{i,\alpha}^{\eta_{i,1-m}} \frac{\partial \eta_{i,1-m}}{\partial t} - Z_{i,\alpha}^{\eta_{i,0}} \frac{\partial \eta_{i,0}}{\partial t} + \nabla(A_{i,\alpha\beta} \nabla f_{i,\beta}) - B_{i,\alpha\beta} f_{i,\beta} \\ + (C_{i,\beta\alpha} - C_{i,\alpha\beta}) \nabla f_{i,\beta} \nabla h_i + \frac{\partial Z_{i,\beta}^{\eta_{i,1-m}}}{\partial h_i} Z_{i,\alpha}^{\eta_{i,1-m}} f_{i,\beta} \nabla \eta_{i,1-m} \nabla h_i \\ - \frac{\partial Z_{i,\beta}^{\eta_{i,0}}}{\partial h_i} Z_{i,\alpha}^{\eta_{i,0}} f_{i,\beta} \nabla \eta_{i,0} \nabla h_i = 0 \quad \cdots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{i,\beta}^{\eta_{i,1-m}} \frac{\partial f_{i,\beta}}{\partial t} + g \eta_{i,1-m} + \frac{p_{i-n} + P_i}{\rho_i} \\ + \frac{1}{2} Z_{i,\gamma}^{\eta_{i,1-m}} Z_{i,\beta}^{\eta_{i,1-m}} \nabla f_{i,\gamma} \nabla f_{i,\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial Z_{i,\gamma}^{\eta_{i,1-m}}}{\partial z} \frac{\partial Z_{i,\beta}^{\eta_{i,1-m}}}{\partial z} f_{i,\gamma} f_{i,\beta} \\ + \frac{\partial Z_{i,\gamma}^{\eta_{i,1-m}}}{\partial h_i} Z_{i,\beta}^{\eta_{i,1-m}} f_{i,\gamma} \nabla f_{i,\beta} \nabla h_i = 0 \quad \cdots (23) \end{aligned}$$

ここで、 $Z_{i,\alpha}^{\eta_{i,1-m}} = Z_{i,\alpha}|_{z=\eta_{i,1-m}}$  であり、また、例えば、 $\partial Z_{i,\alpha}^{\eta_{i,1-m}} / \partial z = \partial Z_{i,\alpha} / \partial z|_{z=\eta_{i,1-m}}$  である。また、 $P_i = \sum_{k=1}^{i-1} (\rho_i - \rho_k) g h_k$  である。 $m$  は、 $\eta_{i,0}$  が既知なら 0 であり、 $\eta_{i,1}$  が既知なら 1 である。 $n$  は、 $p_i$  が既知なら 0 であり、 $p_{i-1}$  が既知なら 1 である。

式 (22) 及び (23) は、それぞれ、連続方程式及び境界面における Bernoulli の式という様相を呈しながら、磯部 (1994) と同様に上・下両境界面における運動学的境界条件を  $O(\nabla h_i)$  まで厳密に満たすものである。また、海底地形の挙動についても、他の境界面の変動と対等に扱えるため、海底勾配を水面勾配のオーダーまで考慮できる。従って、後野 (1995) で試みられたように、境界面近傍において鉛直分布関数に任意の鉛直分布をとらせれば、式 (23) を緩勾配の制約から解き放てるであろう。

### 4. 方程式系の特徴

本方程式系は、次のような特徴を有する。

- (1) 2 層密度流問題に対し、摂動法を用いることによって、喜岡ら (1997) が表面波と内部波の共存場に対する Boussinesq 型方程式を導き、また、Choi and Camassa (1999) は、下層が浅海または深海である各水域に対して使い分ける二組の非線形方程式を導いた。本方程式は、導出過程において連成振動の概念を適用したため、広周波数帯域に対して適用

可能であり、長周期内部波から短周期内部波まで同時に扱える。また、方程式の適用に際して密度成層の層厚と波の条件の相互関係から制約を受けないため、浅海・深海の条件を問わず同一の方程式系を用いて解析できる。

- (2) 本モデル方程式は、2 層問題のみならず、多層の場合も解析できるように一般化されている。
- (3) 鉛直方向の積分を解析的に行なう際に、各層の速度ポテンシャルの鉛直分布を有限個の鉛直分布関数の重み付き重ね合わせとして表わす。
- (4) 海底地形や最上面が時間的に変化する場合にも適用できる (柿沼・渡辺, 2000)。更に、最上層が空気と接し、表面波が生成する場合も取り扱える。従って、風波の発生が内部境界面に及ぼす影響や、海底地形の時間変化に伴う表面波並びに内部波の発生・伝播過程といった問題への応用が考えられる。その際には境界面における摩擦を考慮する必要がある。
- (5) 適切な鉛直分布関数を選ぶことにより、表面波と内部波の両者の強非線形性・強分散性を考慮できる。

### 5. 表面波・内部波共存場の数値計算

#### 5.1 数値計算法

ここでは、第  $i$  層の速度ポテンシャルを次式のような 3 項の和によって近似する。

$$\phi_i = 1 \cdot f_{i,1} + \left( \frac{z + \sigma_i}{h_i} \right)^2 \cdot f_{i,2} + \left( \frac{z + \sigma_{i-1}}{h_i} \right)^2 \cdot f_{i,3}, \quad \sigma_i = \sum_{k=1}^i h_k \quad \cdots (24)$$

例として、鉛直断面における 2 層問題を考える。最上面すなわち第 1 層の上面を空気と接する自由表面とし、大気圧を  $p_0 = 0$  とする。また、最下面すなわち第  $I$  層の下面を固定床とする。このとき、表面及び内部境界面の位置をそれぞれ  $z = \zeta(x, t)$  及び  $z = \eta(x, t)$  のように表わす。

式 (22) で  $i=1$  とし、各  $\alpha$  に対する  $N$  個の式からなる式群 (i) を得る。同様に、式 (22) で  $i=2$  とし、式群 (ii) を得る。他方、式 (23) で、 $i=1, m=1$  かつ  $n=0$  とした場合と、 $i=2, m=0$  かつ  $n=1$  とした場合の 2 式を得る。これら 2 式から内部境界面の圧力  $p_i$  を消去して式 (iii) を得る。更に、式 (23) で  $i=1, m=0$  かつ  $n=1$  とし、式 (iv) を得る。

そして、次の二つの操作を交互に繰り返し、新しい時刻 (時間ステップ) の値を次々に求める。

- (1) 式群 (i) と式 (iv) より、次の時刻の  $f_{i,\alpha}$  と  $\zeta$  を求める。その際、 $f_{2,\alpha}$  と  $\eta$  には、既知の値を用いる。
- (2) 式群 (ii) と式 (iii) より、次の時刻の  $f_{2,\alpha}$  と  $\eta$  を求める。その際、 $f_{1,\alpha}$  と  $\zeta$  には、既知の値を用いる。

基礎方程式は、差分方程式に変形し、各操作において

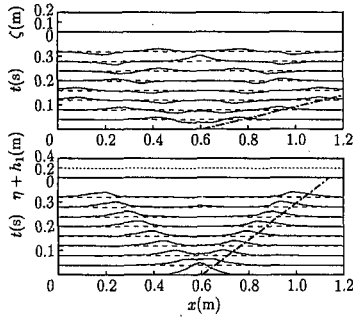


図-2 表面波及び内部波の伝播

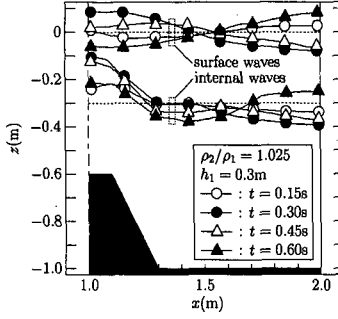


図-3 潜堤上のセイシュ

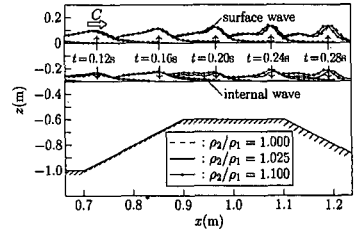


図-4 潜堤上を進行する表面波及び内部波

1層問題と同様のアルゴリズムを用いて解く。

## 5.2 非線形内部波の数値計算

図-2に、2層流体の境界面に与えた隆起が、二つの内部波に分離し、生成した内部波及び表面波が前後の固定壁で完全反射しながら伝播する様子を示す。初期条件として  $\zeta(x, 0) = 0$ ,  $\eta(x, 0) = 0.5/(10^5 + 10^{-5}) - 1$ ,  $s = 10x - 6$  かつ  $f_{i,a}(x, 0) = 0$  を与えた。  $x = 0$  及び  $x = 1.2$  に鉛直壁がある。また、 $\rho_2/\rho_1 = 1.5$  であって、 $h_1 = h_2 = h = 1(\text{m})$  であるとする。一点鎖線は、長波理論による位相速度の近似値  $\sqrt{gh(1 \pm \sqrt{\rho_1/\rho_2})}$  の逆数を傾きとする線分である。表面及び内部境界面ともに二つのモードの波動が見られる。波高を比較すると、内部境界面では、位相速度の小さい内部波の方が先行する内部波よりも大きい。表面では、この場合、二つのモードの波高が同程度である。

図-3に、潜堤上に腹がある場合の内部セイシュを示す。初期条件として  $\zeta(x, 0) = 0.1 \cos(\pi x)$ ,  $\eta(x, 0) = -0.3$  かつ  $f_{i,a}(x, 0) = 0$  を与えており、 $x = 0$  及び  $x = 2.0$  に完全反射の固定壁がある。また、 $\rho_2/\rho_1 = 1.025$  である。天端上では、内部境界面の平均水位が静水時よりも鉛直上方に移動している。また、内部波の節の位置が表面波の節の位置よりも潜堤から遠ざかっている。

図-4に、潜堤上での内部波の分裂を示す。初期条件に  $\zeta(x, 0) = 0.4/(10^5 + 10^{-5})$ ,  $s = 10x - 3$ ,  $\eta(x, 0) = -0.3$  かつ  $f_{i,a}(x, 0) = 0$  を与えた。先行するモードのみを描いており、表面波と内部波の位相がほぼ等しい。密度比が大きいほど表面波・内部波ともに位相速度が減少する。

## 6. 結 論

境界面における圧力を考慮した、流体運動のLagrangianを求め、これに変分原理を適用することによって、表面波と内部波が共存する波・流れ場の支配方程式を導いた。数値シミュレーションでは、潜堤上での内部波の分

裂や浅水変形といった非線形性の強い現象を再現した。得られた数値解析手法は、平面波領域を鉛直方向に結合したモデルであるため、内部セイシュのように比較的広領域を対象とする問題に対しても有効であろう。今後、モデルのより詳細な検証を行ないながら、非線形性を有する短周期内部波や広周波数帯域にわたる成分を含む内部波の発生・伝播過程を対象として、実現象の解明に取り組みたい。

本研究を遂行するにあたり貴重な御助言をいただいた東京大学大学院工学系研究科教授渡辺 晃先生に謝意を表します。

## 参 考 文 献

- 磯部雅彦(1994): 波浪変形解析のための波動方程式の比較研究, 土木学会論文集, No. 491/II-27, pp. 1-14.
- 柿沼太郎・渡辺 晃 (2000): 海面や海底の動揺が生成する内部波の数値計算, 土木学会第55回年譜概要集, II.
- 喜岡 渉・柏原謙爾・Md. Akter Hossain・猪垣智博 (1997): 流動化した底質による湾水振動の制御について, 海岸工学論文集, 第44巻, pp. 711-715.
- 喜岡 渉・古川智将・佐藤慎司 (1998): 沿岸付近の短周期内部波と長周期表面波, 海岸工学論文集, 第45巻, pp. 256-260.
- 灘岡和夫・中川康之 (1993): 不規則波動シミュレーションのための強分散性波動方程式の導出とその基本特性の検討, 土木学会論文集, No. 467/II-23, pp. 83-92.
- 後野正雄 (1995): 任意地形上の不規則波に対する新しい連成振動方程式, 海岸工学論文集, 第42巻, pp. 16-20.
- 柳 哲雄・山本隆司・石丸 隆・才野敏郎 (1993): 大阪湾の潮汐フロント近傍で観測された短周期内部波, 沿岸海洋研究ノート, 第30巻, 第2号, pp. 201-207.
- Choi, W. and R. Camassa (1999): Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system, J. Fluid Mech., Vol. 396, pp. 1-36.
- Luke, J. C. (1967): A variational principle for a fluid with a free surface, J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 395-397.
- Roberts, J. (1975): Internal Gravity Waves in the Ocean, Marine Science, Vol. 2, Marcel Dekker, Inc., New York, pp. 1-51.