

非線形境界要素法を用いた浮体の 3 次元有限振幅運動の解析法

池野 正明*・高橋 健吾**

1. はじめに

非線形波と浮体構造物との強非線形相互干渉を解析できる浮体の動揺計算法の開発が望まれている。しかしながら、上記のような強非線形モデルは、境界要素法や有限要素法等を用いて浮体の断面 2 次元有限振幅運動を対象に開発されつつある段階であり、非線形平面波と浮体との強非線形相互干渉を取り扱うことのできる 3 次元モデルの具体的な計算例は未だ皆無である。そこで、本研究では、非線形平面波作用下における係留浮体の 3 次元有限振幅運動の解析手法を、境界要素法を用いた強非線形ポテンシャルモデルに基づき開発し具体的な定式化と解法アルゴリズムを提案する。ついで、強非線形断面 2 次元境界要素法および既往の実験結果との比較によりその妥当性を検証する。

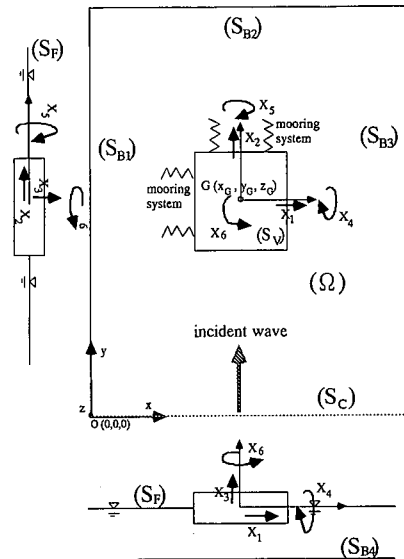
2. 境界要素法による強非線形 3 次元解析モデル

(1) 支配方程式と境界条件

図一に示すように、数値波動水槽内に浮体が係留されている場合を考える。流体は非粘性、非圧縮と仮定し、その運動を非回転と仮定すると速度ポテンシャル ϕ が存在する。この場合、流体域を囲む境界を図一のように定義すると、速度場および加速度場の支配方程式と境界条件は以下ようになる。

ここで、加速度場では速度ポテンシャル ϕ を時間で偏微分した $\dot{\phi}$ が場を支配する。 $\dot{\phi}$ は、擾乱流速の自乗以上の項が無視できる条件でその勾配が流体の加速度を与えるが、そうでない場合は「場の加速度ポテンシャル」を意味し「流体の加速度ポテンシャル」とは厳密には一致しない。Tanizawa (1995) が断面 2 次元計算に実際に適用したように、「流体の加速度ポテンシャル」を厳密に定式化することも可能であるが、実際の 3 次元数値計算が非常に煩雑かつ大容量となる。このため、本研究では、 $\dot{\phi}$ を「流体の加速度ポテンシャル」と近似的に見なせると仮定して、以下の定式化を行う。

・支配方程式



図一 計算領域の座標系と浮体運動の定義

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad \dots\dots\dots (1 \cdot a)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad \dots\dots\dots (1 \cdot b)$$

・境界条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial y} = -U(x, y, z, t) \quad (\text{on } S_C) \quad \dots\dots\dots (1 \cdot c)$$

$$\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial n} = -\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial y} = -\dot{U}(x, y, z, t) \quad (\text{on } S_C) \quad \dots\dots\dots (1 \cdot d)$$

ここに、 n は境界上の外向き法線ベクトルであり、 U と \dot{U} は入射波の水平流速と水平水粒子加速度である。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{on } S_B) \quad \dots\dots\dots (1 \cdot e)$$

$$\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial n} = 0 \quad (\text{on } S_B) \quad \dots\dots\dots (1 \cdot f)$$

$$\frac{D(\xi, \zeta, \eta)}{Dt} = (\phi_x, \phi_y, \phi_z) \quad (\text{on } S_F) \quad \dots\dots\dots (1 \cdot g)$$

ここに、 (ξ, ζ, η) は時々刻々変化する水面の x, y, z 座標、 ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z は水粒子の x, y, z 方向速度を表している。また、 D/Dt は t に関する全微分 (実質微分) を意味する。

* 正会員 工博 (財)電力中央研究所 我孫子研究所 水理部
** (株)電力計算センター 我孫子事業部

$$\phi + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + g\eta = 0 \quad (\text{on } S_f) \dots\dots (1 \cdot h)$$

ここに、 g は重力加速度である。

図-1 に示すように、浮体の6自由度運動を surge X_1 , sway X_2 , heave X_3 , roll X_4 , pitch X_5 , yaw X_6 と定義すると、没水浮体の境界条件として、以下を満たす必要がある。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \sum_{j=1}^6 \dot{X}_j n_j \quad (\text{on } S_v) \dots\dots (1 \cdot i)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} = \sum_{j=1}^6 \ddot{X}_j n_j \quad (\text{on } S_v) \dots\dots (1 \cdot j)$$

ここに、 \dot{X}_j, \ddot{X}_j は浮体の6自由度の運動変位速度と運動変位加速度である。 n_j は以下のようである。

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= n_x \\ n_2 &= n_y \\ n_3 &= n_z \\ n_4 &= (y_v - y_c)n_x - (z_v - z_c)n_y \\ n_5 &= (z_v - z_c)n_x - (x_v - x_c)n_z \\ n_6 &= (x_v - x_c)n_y - (y_v - y_c)n_z \end{aligned} \right\} \dots\dots (1 \cdot k)$$

ここに、 (n_x, n_y, n_z) は n の x, y, z 方向余弦である。 (x_v, y_v, z_v) は浮体境界上の任意点の座標、 (x_c, y_c, z_c) は浮体重心の座標である。

ただし、式(1・i)の右辺の \dot{X}_j は時刻 t の段階では未知数であるので、既知量である前ステップ時刻値の回りに1次まで Taylor 展開したものとして近似すると、結局浮体没水境界条件式は以下のようになる。

$$\phi_n = \sum_{j=1}^6 (\dot{X}_j^{t-1} + \Delta t \cdot \ddot{X}_j^{t-1}) n_j \quad (\text{on } S_v) \dots\dots (1 \cdot l)$$

(2) 境界要素と形状関数

本研究で対象とする境界要素は、アイソパラメトリック四辺形要素を用い、図-2 に示すように、4 節点を四辺形要素の4個の隅角点に配置した。この要素は、双1次適合要素とも呼ばれる。この場合、ポテンシャル値等の物理量が4 節点上で既知ならば、要素内の任意の点の物理量は内挿関数で表示できる。特に図-2のように、適合要素の場合には、内挿関数は形状関数と等しくなる。

図-2 に示すように、2つの座標が-1 から+1の値をとる局所座標系を導入する。座標軸として、要素の図心を原点とし、節点1 → 2方向に平行に s 軸、1 → 4方向に平行に s' 軸をとる。

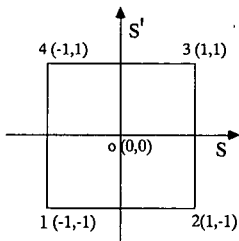


図-2 アイソパラメトリック四辺形要素

4 節点双1次適合要素の場合の形状関数 $N_j, U^* = 1 \sim 4$ は以下のように表される。

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-s)(1-s'), & N_2 &= \frac{1}{4}(1+s)(1-s') \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+s)(1+s'), & N_4 &= \frac{1}{4}(1-s)(1+s') \end{aligned} \right\} \dots\dots (2 \cdot a)$$

上記の形状関数を用いて、 (x, y, z) 座標や速度・加速度ポテンシャル等の物理量 A およびその要素上 s, s' に関する1階偏微分値は、以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^4 A_j N_j, & \frac{\partial A}{\partial s} &= \sum_{j=1}^4 A_j \frac{\partial N_j}{\partial s}, \\ \frac{\partial A}{\partial s'} &= \sum_{j=1}^4 A_j \frac{\partial N_j}{\partial s'} \end{aligned} \dots\dots (2 \cdot b)$$

同様に、上記物理量の s, s' に関する2階以上の偏微分値も、形状関数 N_j の同階数の偏微分値として表すことができる。

(3) 速度場におけるグリーン関数の積分方程式と解法

速度場ポテンシャル ϕ に関する境界積分方程式は以下のように表される。

$$\alpha(p)\phi(p) + \int_S \{ \phi(q)G_n(p, q) - \phi_n(q)G(p, q) \} dS(q) = 0 \dots\dots (3)$$

ここに、添え字 n は対応する境界上の外向き法線方向微分を意味する。 p および q は、各々境界面上の任意点を表す。 G はグリーン関数で、以下の支配方程式(4・a)と水底境界条件(4・b)をあらかじめ満たす3次元の基本解式(4・c)を用いることにより、実際の水底面のメッシュ分割を省略できる。

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = -4\pi\delta(x_p - x_q, y_p - y_q, z_p - z_q) \quad (\text{in } \Omega) \dots\dots (4 \cdot a)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = 0 \quad (\text{at } z = -h) \dots\dots (4 \cdot b)$$

$$G(p, q) = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \dots\dots (4 \cdot c)$$

ここに、 δ はデルタ関数、 h は水深、 r_1, r_2 は以下のようである。

$$r_1 = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2} \dots\dots (4 \cdot d)$$

$$r_2 = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p + z_q + 2h)^2} \dots\dots (4 \cdot e)$$

α は点 p での境界面の幾何学的形状から決まる係数であり、ここでは、以下の方法により求める。上記式(3)は、任意の速度場ポテンシャル ϕ について成立するので、一様ポテンシャル場 ($\phi = \text{const.}, \partial\phi/\partial n = 0$ (on S)) に式(3)を適用すると、以下のように算定できる。

$$\alpha(p) = - \int_S G_n(p, q) dS(q) \dots\dots (4 \cdot f)$$

ある t 時刻の速度場の境界積分方程式 (3) 中には、各境界要素上の速度ポテンシャル ϕ とその法線外向き微分値 $\partial\phi/\partial n$ が未知量として存在する。そこで、各境界条件式を代入して $\partial\phi/\partial n$ か ϕ のどちらかを消去し未知数を減少させた方程式に変換する。上記式 (2・b) 等の4節点要素を代入し離散化すると以下のようになる。

$$\alpha_i \cdot \phi_i + \sum_e \sum_j \int_{s_j} N_j \cdot \phi_j \cdot \frac{\partial G}{\partial n} \det |J_c| ds ds' - \sum_e \sum_j \int_{s_j} N_j \cdot \phi_{nj} \cdot G \det |J_c| ds ds' = 0 \quad \dots\dots (4 \cdot g)$$

ここに、 i は任意の要素節点番号、 e は四辺形要素の番号で、 \sum は四辺形要素の総和を意味する。 j は一四辺形要素内のある節点の番号で、 \sum_j は一四辺形要素内の節点の総和を意味する。 $\det |J_c|$ はヤコビアンである。式 (4・g) を連立方程式としてを解くと、全ての境界節点上の ϕ と $\partial\phi/\partial n$ が求められる。

(4) 時刻 $t + \Delta t$ における自由水面上の速度ポテンシャルと移動座標の予測

時刻 $t + \Delta t$ における自由水面上の移動後の座標 (ξ, ζ, η) と速度ポテンシャル ϕ を既知量である時刻 t の値の回りに Taylor 展開すると、以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \xi(t + \Delta t) &= \xi(t) + \Delta t \frac{D\xi(t)}{Dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{D^2\xi(t)}{Dt^2} + \dots \\ \zeta(t + \Delta t) &= \zeta(t) + \Delta t \frac{D\zeta(t)}{Dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{D^2\zeta(t)}{Dt^2} + \dots \\ \eta(t + \Delta t) &= \eta(t) + \Delta t \frac{D\eta(t)}{Dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{D^2\eta(t)}{Dt^2} + \dots \\ \phi(t + \Delta t) &= \phi(t) + \Delta t \frac{D\phi(t)}{Dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{D^2\phi(t)}{Dt^2} + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

上式を2次の項までで打ち切り、右辺の導関数値を評価して、 Δt 後の自由水面上の節点の位置座標とポテンシャル値を近似的に求める (池野・松山, 1996)。

(5) 浮体の運動方程式とその変形

浮体の運動方程式は3次元の場合、以下のように表される。

$$M_i \ddot{X}_i + \sum_{j=1}^6 K_{ij} X_j + d_i |\dot{X}_i| \dot{X}_i = -\rho \int_{sv} \left\{ \dot{\phi} + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + gz \right\} n_i ds - \delta_{i3} M_{sg} \quad (i=1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad \dots\dots (6)$$

ここに、 ρ は流体の密度、 M_i は浮体の質量あるいは慣性モーメント、 d_i は抗力係数である。 K_{ij} は係留係数であり、線形係留あるいは非線形係留の場合に応じて変化する。 δ_{i3} はクロネッカーのデルタ記号 ($i=3$ の時1, それ以外は0) である。

前出の式 (6) の左辺第3項の抗力項は、未知量 X_i の2乗となり非線形であるので陽的に解くことができず、

解法が面倒になる。そこで、 X_i の一つを1ステップ時刻前の値で近似し線形化をはかる。

式 (6) 中右辺の ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z は、速度場の境界積分方程式 (3) を解くことにより求まっているので、未知量は時刻 t における $X_j, \dot{X}_j, \ddot{X}_j, \dot{\phi}$ である。さらに、 X_j と \dot{X}_j を newmark- β 法 ($\beta=1/6$) を適用して消去し変形すると、 \ddot{X}_j と $\dot{\phi}$ の関係式が導かれる (池野・松山, 1996)。これを、加速度場の速度ポテンシャルの解法の際に、没水浮体の境界条件式 (1・j) に代入し、 \dot{X}_j を消去して未知量を $\dot{\phi}$ に統一する。

(6) 加速度場におけるグリーンの積分方程式と解法

加速度場の境界積分方程式は、前出の式 (3) 中の ϕ を $\dot{\phi}$ で置換することにより、以下のように表される。

$$\alpha(p) \dot{\phi}(p) + \int_s \{ \dot{\phi}(q) G_n(p, q) - \dot{\phi}_n(q) G(p, q) \} dS(q) = 0 \quad \dots\dots (7)$$

上記式 (7) を解いて得られた $\dot{\phi}$ を用いて、 $\ddot{X}_j (j=1 \sim 6)$ が求められる。さらに、求めた \ddot{X}_j から newmark- β 法を用いて、 $X_j, \dot{X}_j (j=1 \sim 6)$ が求められる。これで、 t 時刻における浮体重心の6自由度運動が確定したので、これを、以下に示す剛体としての座標変換式 (8) に代入すれば、任意の没水浮体境界点の移動後の座標 (x_v, y_v, z_v) が算定される。浮体境界をリメッシュし、次の $t+1$ 時刻における計算時の境界として使用する。

$$\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos X_4 & -\sin X_4 \\ 0 & \sin X_4 & \cos X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos X_5 & 0 & \sin X_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin X_5 & 0 & \cos X_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos X_6 & -\sin X_6 & 0 \\ \sin X_6 & \cos X_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{co} - x_{co} \\ y_{co} - y_{co} \\ z_{co} - z_{co} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{co} + X_1 \\ y_{co} + X_2 \\ z_{co} + X_3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots (8)$$

ここに、下付き記号 G は重心座標、下付き記号 V は没水境界上の任意点座標、下付き記号 o は静止時座標である。

(7) 自由水面と浮体没水境界の交点の扱い

自由水面と浮体没水境界の交点は、自由水面と浮体の1あるいは2側壁面の境界条件が重なる点である (2重, 3重節点)。この交点においては、以下の条件が成り立つと仮定するのが妥当であると考えられる。

- ・浮体境界法線方向の水粒子速度・加速度は浮体の剛体運動の法線方向速度・加速度と一致する。
- ・接線方向の水粒子速度・加速度は浮体表面に沿って運動する。
- ・自由水面の力学的境界条件 (ベルヌイ式) を満足する。浮体と水面との交点は不連続な境界上にあるため、速度・加速度ポテンシャルの接線・法線方向の微分値は、(x, y, z) 座標は同一でも、浮体表面側と水面側とで異なる値を持つことになる。このため、つぎの時間ステップ

に進む前にこれらの値を，上記の仮定の基に同一化する必要がある。また，上記交点以外に造波・固定不透過境界と自由水面境界が同様の理由により2重，3重節点となっている。これらの交点の扱いは，上記に準じて，造波・固定不透過境界条件を満足するように同一化する。

3. 計算結果の検証

(1) 計算条件

計算対象とした浮体は，箱型バージの1/100縮尺模型(長さと幅142 cm，喫水11.6 cm)である。過去にはこの浮体模型を平面水槽に設置して，3次元動揺実験が実施されている。係留方式はドルフィンリンク型係留装置4基による2辺水平係留を想定している。詳細は文献(池野，1992)を参照されたい。

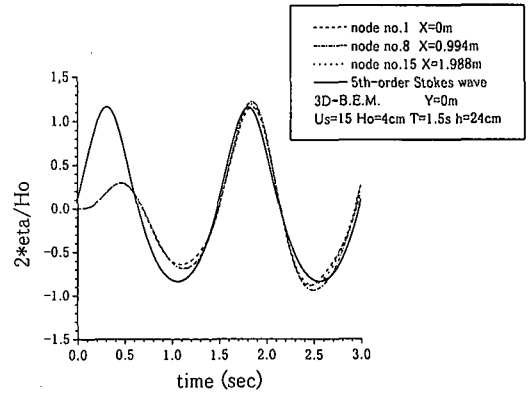
造波境界からの入力波は，磯部ら(1978)の非線形波の摂動解を用いて水平流速を与えた。すなわち，浅水アセル数 $U_s (=gH_o T^2/h^2)$ を定義し， $U_s \leq 25$ でストークス波の第5次近似解， $25 < U_s$ でクノイド波の第3次近似解を入力した。ここに， H_o は波高， T は周期である。

さらに，造波境界では，水粒子の水平加速度も入力する必要がある。上記の水平流速を，時間 t について数値微分することにより求めた。なお，浮体の運動方程式(6)中左辺の抗力係数 d_i を設定することにより，抗力を取り込むこともできるが，ここでは，解析モデルの基本特性を検討するために， $d_i = 0$ とした。

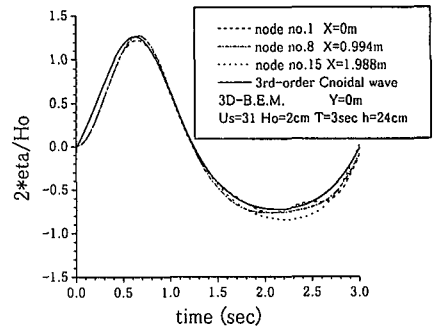
図一1の計算対象領域を x 方向に4.26 m， y 方向に7.1 m， z 方向に水深24 cmとし， x 方向に30分割， y 方向に50分割し等間隔に要素節点を配置した。これにより，水面と没水浮体底面が長さ14.2 cmの正方形要素から構成されることになる(浮体長さの1/10)。また，浮体没水側面を z 方向に2分割した。水路側壁および岸側の固定境界では z 方向に水深を2分割した。計算の時間刻みは，周期1 sの時0.005 s，周期1.5~3 sの時0.01 sとした。造波境界からの入力波が不安定になる場合には，始めの1周期分のみ緩起動を施した。計算機DECのAlphaStation (CPU; Alpha 21164/500 MHz)を用いて6 s間計算したところ，109 hrのCPU時間を要した。

(2) 非線形波の解析解との比較

まず，本手法の基本特性を調べるため，浮体に入射波が到達するまでの時刻を対象に非線形波の水面変動の理論解と比較する。図一3は，本計算法(3D-B.E.M.)による造波境界近傍の水面上の幾つかの節点における z 座標の時間変化(水位変動)を出力し，ストークス波の第5次近似解と比較したものである。また，図一4は，本計算法による水位変動とクノイド波の第3次近似解と比較したものである。これらによると，図一3中の造波初期の緩起動部分を除いて，概して本計算法による水位波形と非



図一3 3D-B.E.M.による水面変動とストークス波の第5次近似解との比較



図一4 3D-B.E.M.による水面変動とクノイド波の第3次近似解との比較

線形波の理論解とはよく一致している。図一4横軸2.3 s付近において，no.15の節点の水位波形に理論解と若干違いが生じている。これは，この節点が浮体中心軸の沖への延長線付近に近いため，浮体からの反射波がいち早くこの節点に伝播したものと推察される。以上により，手法の妥当性が検証された。

(3) 浮体の断面2次元運動解析との比較

つぎに，強非線形断面2次元境界要素法(池野・松山，1996)を用いて，水面や係留浮体没水部の要素節点の時々刻々の動きを比較する。2D-B.E.M.では，3D-B.E.M.における浮体中心軸を水路方向に延長した断面で水路を切った場合の水面と浮体没水部の要素節点の配置と完全に一致するように設定した。係留バネ定数や質量等は，3次元浮体の諸元を浮体の長さ142 cmで割って入力した。図一5は，浮体中心軸断面での3D-B.E.M.と2D-B.E.M.による要素節点の空間変動の比較例である。図一5によると，まず浮体に到達する前の3D-B.E.M.と2D-B.E.M.による入射波水面の空間変動はよく一致している。つぎに，3D-B.E.M.では，矩形浮体の両側海域に侵入してきた入射波が浮体の隅角部から回折し浮体の背後の海域に回

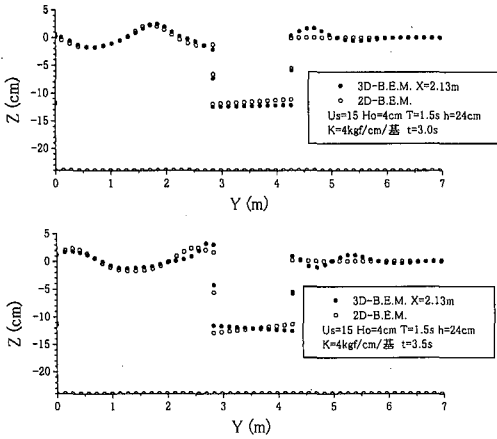


図-5 3D-B.E.M.と2D-B.E.M.との要素節点の空間変動の比較例

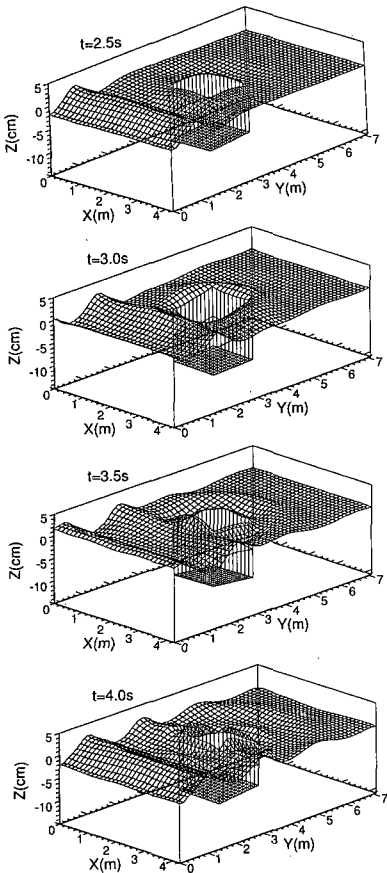


図-6 3D-B.E.M.による自由水面と浮体没水部の3次元空間変動鳥瞰図
($U_s=15$, $H_o=4$ cm, $T=1.5$ s, $h=24$ cm, $K=4$ kgf/cm/基)

り込むため、浮体背後の水面変動量が、浮体の下のみを通過して浮体背後に侵入する2D-B.E.M.よりも大きくなっている。同様の回折波の影響により浮体の運動にも

両者の間に差異が生じている。

図-6に、3D-B.E.M.による水面と浮体没水部節点の空間変動鳥瞰図を示す。

(4) 既往の実験結果との比較

最後に、係留浮体の3次元動揺実験結果(池野, 1992)との比較に

より本手法の妥当性を検証する。実験は水路側壁や岸側固定境界の無い開境界で実施されているので、固定境界からの反射波が浮体まで到達する以前の計算値を比較の対象にした。図-7は、2種類の周期の入射波による係留浮体の運動振幅を本計算と実験とで比較した例である。図-7によれば、水平・鉛直・回転運動とも両者の対応は良好である。

4. おわりに

境界要素法による強非線形ポテンシャルモデルでは長い計算時間を要する。本手法では、解を効率的に求めるため、浮体運動、水面形状、速度・加速度ポテンシャル等の収束計算は一切施していない。このため、各時刻の解が確定論的に求めり次の時刻の計算に更新できる。非線形波の水面変動の解析解、2D-B.E.M.および過去の実験結果との比較を通じて本手法の妥当性が検証された。

参考文献

池野正明 (1992): 浮揚式発電所の不規則波浪による動揺と係留の安定性評価 2-多方向不規則波浪場における3次元動揺解析手法の開発一, 電力中央研究所報告, 研究報告 U92023.
池野正明・松山昌史 (1996): 津波作用下における浮体構造物の2次元非線形挙動解析, 電力中央研究所報告, 研究報告 U95043.
磯部雅彦・西村仁嗣・堀川清司 (1978): 保存波の摂動解の波高による表示, 第33回年次学術講演会概要集, II, pp. 760-761.
Boo, S. Y. and C. H. Kim (1996): Fully nonlinear diffraction due to a vertical circular cylinder in a 3-D HOBEM numerical wave tank, Proc. of the 6th Int. Offshore and Polar Eng. Conf., Vol. 3, ISOPE, pp. 23-30.
Tanizawa, K. (1995): A nonlinear simulation method of 3-D body motions in waves, J. of the Society of Naval Architects of Japan, Vol. 178, 2-9, pp. 179-191.

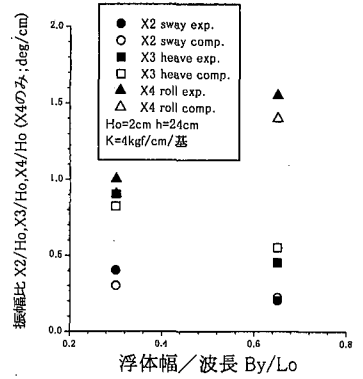


図-7 浮体運動振幅の計算結果と実験結果との比較例